Prin conținutul și modul de prezentare a problematicii reglării conducerii automate, lucrarea de față este mai mult decât un manual. Ea definește un cadru sintetic de tratare conceptuală și aplicativă a unor probleme specifice automatizării proceselor.

Lucrarea încearcă să aducă o contribuție la dezvoltarea capacității de analiză și sinteză a viitorului inginer, solicitat să decidă asupra soluțiilor de conducere și a impactului acestora asupra evoluției proceselor.

O atenție deosebită se acordă problemelor specifice de realizare și implementare a algoritmilor de reglare pe cale numerică, analizându-se aspectele legate de dezvoltarea unor sisteme inteligente hardware-software și a unor protocoale de comunicație avansate. Trecerea spre o nouă generație de sisteme de conducere, în care sunt integrate cele patru componente: conducere, calculatoare, comunicație și cunoștințe, este evidențiată prin prezentarea sintetică a problematicii sistemelor inteligente de conducere.

Tratarea echilibrată a conceptelor cu care operează inginerul automatist și a instrumentelor tehnice necesare implementării soluțiilor de automatizare sintetizate asigură lucrării un nivel ridicat de accesibilitate.

Lucrarea de față oferă un material consistent atât studenților care audiază cursul Ingineria reglării automate, cât și studenților de la alte facultăți care audiază cursuri apropiate de cel menționat. Doctoranzii și inginerii specialiști pot folosi această lucrare atât pentru partea convențională de algoritmi și structuri de reglare, cât și pentru algoritmii de conducere avansată.

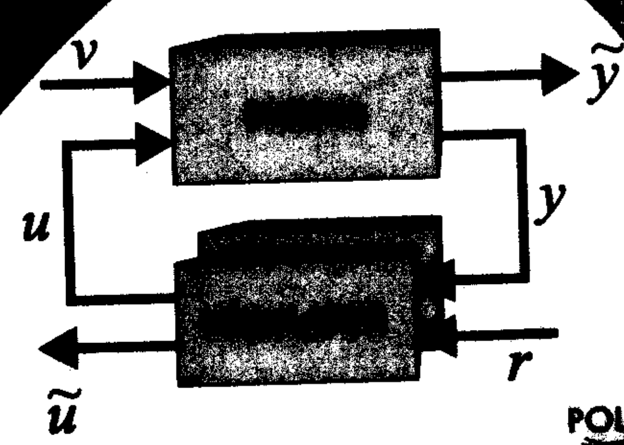
Ingineria reglării automate, ca lucrare de sinteză a problematicii conducerii (reglării) proceselor, incorporează experiența didactică și de cercetare a autorului, dar și o sinteză a principalelor rezultate prezentate în literatura de specialitate din acest domeniu.

Exemplele și studiile de caz se constituie în elemente de reală utilitate pentru cei care se încumetă să parcurgă și să înțeleagă ceea ce se prezintă în această lucrare.

ISBN: 973-8449-72-3

IOAN DUMITRACHE

INGINERIA REGLĂRII AUTOMATE



Tai 49982

B. AUT

Copyright ©, 2005, Editura Politehnica Press.
Toate drepturile asupra acestei ediţii sunt rezervate editurii.

Adresa: Calea Griviţei, nr. 132
78122, Sector 1, Bucureşti
Telefon: 402.94.76

INVENTARIAT
Nr. 735203/2006
FB.

Redactor: Anca PERŞOIU
Coperta: Adriana BUTMĂLAI

Bun de tipar: 15.03.2005, Coli tipo: 45,375

ISBN: 973-8449-72-3

PREFAŢĂ

Trecerea la societatea bazată pe cunoaştere reprezintă nu numai o consecinţă a evoluţiei tehnologiei informaţiilor şi comunicaţiilor, ci şi o cerinţă a creşterii competitivităţii într-o lume a schimbării şi a globalizării.

Dezvoltarea de procese şi produse competitive impune un nou concept de fabricaţie, care incorporează cunoaştere şi inovare, agilitate şi flexibilitate.

Suportul natural al unor procese tehnologice performante într-o economie competitivă este asigurat prin creşterea gradului de automatizare, prin înnobilarea acestora cu noi atribute de calitate, de eficienţă şi de compatibilitate cu mediul înconjurător.

Automatica, prin suportul formal asigurat de teoria sistemelor, prin suportul conceptual oferit de teoria conducerii, de teoria informaţiei şi prin suportul hardware oferit de tehnologia circuitelor integrate pe scară largă şi foarte largă, a microprocesoarelor şi a sistemelor avansate de calcul, furnizează instrumentele şi conceptele necesare automatizării proceselor din diverse domenii de activitate. Prin concepte şi instrumente software şi hardware avansate, automatica este prezentă practic în toate sectoarele socio-economice.

Procesele tehnologice integrate într-o economie competitivă vor fi proiectate în vederea automatizării pentru a răspunde rapid şi eficient condiţiilor de adaptare la cerinţele pieţei. Conceptul „IPDC" (Integrated Process Design and Control) se impune tot mai mult în contextul globalizării şi, evident, al pieţelor concurenţiale, răspunzând unor cerinţe înalte de productivitate şi utilizabilitate.

Inginerii tehnologi, proiectanţii de procese cooperează strâns cu inginerii automatişti proiectanţi de soluţii şi echipamente de automatizare, pentru a concepe şi realiza sisteme competitive tehnic şi economic, flexibile şi tolerante la defecte, integrabile într-o economie bazată pe cunoaştere. Proiectarea integrată a proceselor şi a produselor presupune o nouă abordare în economia bazată pe inovare şi cunoaştere. Conceptul de întreprindere colaborativă capătă noi valenţe într-o economie bazată pe competiţie şi calitate, iar automatizarea proceselor şi a întreprinderilor reprezintă condiţii esenţiale pentru atingerea acestor deziderate.

Automatizarea unui proces presupune asigurarea tuturor mijloacelor şi metodelor necesare evoluţiei acestuia, în concordanţă cu cerinţele de eficienţă economică, de calitate, de siguranţă în funcţionare şi de compatibilitate cu mediul înconjurător.

Conceptul de „proces curat“ sau/şi „produs curat“ integrat în conceptul larg de „ECO-ECONOMIE”, care pătrunde tot mai mult în sfera de activitate a inginerului proiectant, impune o nouă abordare a proiectării proceselor şi a sistemelor de conducere automată.

Ingineria reglării, ca parte integrantă a domeniului larg ce vizează automatizarea proceselor, se bazează pe conceptele specifice ale teoriei sistemelor şi pe suportul hardware necesar implementării strategiilor de reglare/conducere.

În esenţă, în cadrul acestei lucrări sunt prezentate principalele aspecte ale aplicării teoriei sistemelor automate pentru rezolvarea problemelor specifice de proiectare şi analiză a soluţiilor şi a strategiilor pentru reglarea sau conducerea unor procese, inclusiv aspectele practice ale alegerii echipamentelor pentru implementarea strategiilor de reglare.

Structurată în trei părţi, cartea acoperă principalele aspecte conceptuale şi aplicative ale reglării automate.

În prima parte, sunt prezentate elementele esenţiale ale analizei sistemelor de reglare şi problematica alegerii şi a acordării legilor de reglare pentru arhitecturi convenţionale de reglare cu unul şi două grade de libertate. Astfel, după o succintă prezentare a problemelor reglării parametrilor tehnologici, apelând la diferitele structuri de sisteme de reglare automată, în capitolul al doilea sunt prezentate particularităţile diferitelor modele matematice ale proceselor conduse şi modalităţile inginereşti de obţinere a acestora.

Capitolul al treilea al lucrării prezintă, sintetic, problematica formulării şi alegerii obiectivelor reglării/conducerii pentru diferite categorii de sisteme de reglare şi pentru diferite tipuri de mărimi exogene ce acţionează asupra sistemelor de reglare automată. Sunt evidenţiate şi elementele specifice robusteţii stabilităţii şi ale performanţelor în prezenţa incertitudinilor structurate şi nestructurate ale modelelor matematice ce caracterizează procesele supuse automatizării.

În capitolele al IV-lea şi al V-lea sunt prezentate problemele de alegere şi acordare a algoritmilor convenţionali de tip PID în varianta continuă şi discretizată. Sunt analizate aspectele specifice ale acordării analitice pe bază de model simplificat al procesului şi modalităţile de acordare experimentală pe obiectul condus în funcţiune. O atenţie specială este acordată discretizării algoritmilor PID în vederea implementării pe cale numerică a acestora, cu luarea în consideraţie a tuturor regimurilor de funcţionare şi a modurilor de lucru ale unui sistem de reglare automată.

Partea a doua a lucrării prezintă, sintetic, principalele probleme ale proiectării structurilor şi ale strategiilor de reglare/conducere. Astfel, în capitolul al VI-lea sunt prezentate problemele sintezei legii de reglare pe bază de model în cadrul structurilor cu unul şi două grade de libertate, inclusiv problemele sintezei strategiei de reglare cu model intern (parametrizarea afină a regulatoarelor). Sinteza legii de reglare după stare cu estimarea stării şi problemele specifice implementării strategiei de reglare după stare sunt prezentate în capitolul al VII-lea al lucrării.

Diferite proceduri de sinteză a legii de reglare cu două grade de libertate pe baza modelului discret al obiectului condus în prezenţa perturbaţiilor deterministe şi stocastice sunt prezentate în capitolele al VIII-lea şi al IX-lea ale lucrării. Sunt prezentate şi strategii de reglare de minimă varianţă şi strategii de conducere predictivă pentru procese supuse perturbaţiilor stocastice.

Elemente introductive în conducerea neliniară a proceselor sunt prezentate în capitolul al X-lea al lucrării. Astfel, sunt prezentate categorii de sisteme neliniare şi limitări ale liniarizării modelelor, precum şi metode de analiză şi sinteză a sistemelor neliniare. Principalele metode de analiză a stabilităţii şi utilizarea conceptului de stabilitate şi hiperstabilitate pentru proiectarea legilor de reglare neliniară sunt prezentate în ultima parte a acestui capitol.

În capitolul al XI-lea sunt prezentate principalele probleme ale conducerii adaptive a proceselor, inclusiv problemele specifice implementării diferitelor strategii de conducere adaptivă, directă şi indirectă, pentru procese cu diferite grade de complexitate.

Capitolul al XII-lea este destinat prezentării principalelor probleme ale proiectării algoritmilor de reglare pentru procese cu mai multe intrări şi mai multe ieşiri. Sunt extinse metodele de sinteză pentru procese monovariabile la procesele multivariabile şi sunt prezentate metode specifice de sinteză a legii de conducere, pentru procese caracterizate prin modele cu mai multe intrări şi mai multe ieşiri.

Partea a doua a lucrării se încheie cu capitolul al XIII-lea, destinat prezentării sintetice a problematicii sistemelor inteligente de conducere, a sistemelor cu autonomie ridicată. Sunt prezentate cele patru metodologii inteligente şi modalităţile de utilizare ale acestora pentru rezolvarea problemelor de identificare şi de conducere a proceselor complexe.

Ultima parte a lucrării (capitolele al XIV-lea şi al XV-lea) este destinată prezentării principalelor probleme ale implementării pe cale analogică şi pe cale numerică a diferitelor strategii de reglare. Sunt

evidenţiate limitările introduse de suportul hardware utilizat pentru implementarea legilor de reglare în realizarea performanţelor sistemelor de reglare/conducere.

Lucrarea prezintă, sintetic, principalele probleme ale conceperii, dezvoltării şi implementării unor soluţii pentru reglarea/conducerea unor procese tehnologice.

Prezentarea graduală a conceptelor şi a procedurilor de analiză şi sinteză a sistemelor de reglare automată, precum şi exemplele incluse în lucrare asigură accesibilitatea mai multor categorii de cititori, studenţi, doctoranzi şi ingineri proiectanţi.

Exemplele prezentate în lucrare, precum şi o serie de studii de caz sunt incluse detaliat în C.D.-ul care însoţeşte lucrarea.

În încheiere, doresc să mulţumesc prof. dr. ing. Toma Dragomir pentru ideile şi observaţiile pertinente făcute în urma citirii manuscrisului, precum şi prof. dr. ing. Costică Niţu pentru observaţiile consistente făcute după citirea ultimei părţi a lucrării.

Mulţumesc în mod deosebit domnişoarei ing. Raluca Misleanu pentru efortul depus pentru tehnoredactarea lucrării, domnului as. ing. Mihai Spătaru pentru pregătirea C.D.-ului ataşat lucrării, precum şi doamnelor ing. Dana Neacşu şi fiz. Anca Perşoiu pentru activitatea de pregătire a lucrării în vederea tipăririi.

Autorul

CUPRINS

1. INTRODUCERE 19
1.1. Scurt istoric 20
1.2. Problematica sistemelor de reglare (conducere) 23
1.3. Tendinţe în automatizarea proceselor industriale 38

2. MODELE MATEMATICE ALE OBIECTELOR CONDUSE 39
2.1. Problematica modelării şi identificării proceselor 39
2.2. Modele intrare – stare – ieşire 45
2.3. Modele intrare-ieşire 49
2.4. Parametrizarea modelelor procesului condus 54
2.5. Discretizarea modelelor continue 60
2.6. Modele matematice stocastice 64
2.7. Sisteme cu parametrii distribuiţi şi cu timp mort 70
2.8. Modele neparametrice 76
2.8.1. Răspunsul în frecvenţă (caracteristici de frecvenţă) 76
2.8.2. Răspunsul indicial 82
2.9. Erori de modelare. Incertitudini 88
2.10. Exemple de modele obţinute prin modelare analitică 91

3. PERFORMANŢELE SRA 103
3.1. Introducere 103
3.2. Stabilitatea SRA 107
3.2.1. Stabilitatea relativă a SRA 109
3.3. Precizia SRA în regim staţionar (permanent) 113
3.4. Evaluarea performanţelor în regim tranzitoriu 120
3.4.1. Criterii locale de performanţă 127
3.4.2. Indicatori integrali de performanţă 129
3.5. Robusteţea stabilităţii şi a performanţelor 133
3.5.1. Condiţia de stabilitate robustă 133
3.5.2. Condiţia de performanţă robustă 137
Probleme 141

4. ALGORITMI ŞI STRUCTURI CONVENŢIONALE DE REGLARE 144
4.1. Introducere 144
4.2. Analiza performanţelor SRA cu regulatoare convenţionale 156

4.2.1. Analiza SRA cu regulator P 157
4.2.2. Analiza SRA cu regulator PI 158
4.3. Analiza SRA cu regulatoare PID pentru procese cu timp mort 166
4.4. Acordarea regulatoarelor PID 173
4.4.1. Acordarea regulatoarelor pentru procese rapide 173
4.4.2. Alegerea şi acordarea regulatoarelor pentru procese lente 177
4.5. Robusteţea SRA cu regulatoare PID 191
4.6. Structuri de reglare 198
4.6.1. Principiul modelului intern (IMP) 198
4.6.2. Structura de reglare cu două grade de libertate 201
4.6.3. Structura de reglare combinată 202
4.6.4. Structura de reglare în cascadă 204
4.6.5. Structura de reglare cu predictor Smith 208
Probleme *212*

5. ALGORITMI NUMERICI DE REGLARE PID 215
5.1. Introducere 215
5.2. Algoritmul PID de poziţie şi incremental 219
5.3. Algoritm PID cu filtrare 222
5.4. Algoritmi PID modificaţi 227
5.5. Alegerea perioadei de discretizare 231
5.6. Acordarea algoritmilor numerici 233
5.7. Implementarea algoritmilor PID numerici 236

6. PROIECTAREA SRA PE BAZA MODELELOR INTRARE – IEŞIRE 244
6.1. Introducere 244
6.2. Problematica proiectării SRA monovariabile 251
6.3. Problematica proiectării în frecvenţă 255
6.4. Proiectarea SRA pe baza funcţiilor de transfer $H_0(s)$ şi $H_d(s)$ 259
6.5. Proiectarea SRA pe baza caracteristicilor logaritmice de frecvenţă 265
6.6. Proiectarea pe baza caracteristicilor amplitudine-fază 276
6.7. Sinteza legii de reglare prin proceduri de alocare a polilor 280
6.7.1. Formularea problemei 280
6.7.2. Sinteza algoritmilor PI şi PID prin proceduri de alocare a polilor 287
6.8. Proiectarea SRA prin parametrizarea regulatoarelor 289
6.8.1. Elemente preliminarii 289
6.8.2. Problematica proiectării 292
6.8.3. Rejecţia perturbaţiilor 293
6.8.4. Efortul de comandă 296

6.8.5. Alegerea funcţiei de transfer $Q(s)$ 297
6.8.6. Sinteza regulatorului PID apelând la parametrizarea afină 298
Probleme *305*

7. SINTEZA LEGII DE REGLARE DUPĂ STARE 308
7.1. Reglarea prin reacţie după stare 309
7.2. Estimarea stării 316
7.2.1. Calculul direct al variabilelor de stare 317
7.2.2. Reconstrucţia stării folosind un sistem dinamic 318
7.3. Proiectarea regulatorului cu estimator de stare 322
7.4. Proiectarea regulatorului în prezenţa perturbaţiilor 325
7.5. Proiectarea regulatorului pentru urmărirea referinţei 328
7.6. Regulator cu două grade de libertate 330
7.7. Sinteza legii de conducere optimală 333
7.7.1. Formularea problemei de conducere optimală 333
7.7.2. Sinteza legii de comandă optimală prin metoda programării dinamice 335
7.7.3. Sinteza legii de reglare optimală pentru modele extinse 339
Probleme *342*

8. PROIECTAREA SISTEMELOR NUMERICE DE REGLARE PE BAZA MODELELOR INTRARE – IEŞIRE 346
8.1. Metoda răspunsului impus 347
8.2. Algoritmul Dead-Beat (DB) 354
8.2.1. Algoritmul Dead-Beat normal (DBn) 354
8.2.2. Algoritmul Dead-Beat extins (DBe) 357
8.3. Proiectarea sistemelor de reglare prin proceduri de alocare a polilor 360
8.3.1. Formulare generală 360
8.3.2. Proiectarea regulatoarelor cu două grade de libertate cu compensarea polilor şi a zerourilor procesului 367
8.4. Probleme ale robusteţei regulatoarelor numerice 372
Probleme *376*

9. SISTEME STOCASTICE DE REGLARE 379
9.1. Introducere 379
9.2. Sinteza legii de reglare de minimă varianţă 381
9.2.1. Proiectarea predictorului optimal 382
9.2.2. Sinteza legii de reglare de minimă varianţă 385
9.3. Algoritmi de minimă varianţă cu penalizarea comenzii 388
9.4. Algoritmi de minimă varianţă modificaţi 391
9.5. Sinteza legii de comandă optimală după stare pentru procese stocastice 395
9.5.1. Sinteza legii de comandă optimală 395
9.5.2. Estimarea stării în prezenţa perturbaţiilor stocastice 397

9.6. Algoritmi de conducere predictivă ... 402
9.6.1. Predicţia ieşirii ... 404
9.6.2. Sinteza legii de conducere predictivă ... 405
9.6.3. Conducerea predictivă în comparaţie cu reglarea cu predictor Smith ... 410
Probleme ... *412*

10. SISTEME NELINIARE ... 415
10.1. Tipuri de neliniarităţi ... 415
10.2. Sisteme de reglare neliniare ... 417
10.3. Analiza sistemelor neliniare prin metoda planului fazelor ... 426
10.3.1. Puncte singulare în planul fazelor ... 428
10.3.2. Traiectorii de fază pentru sisteme neliniare ... 433
10.3.3. Cicluri limită în planul fazelor ... 443
10.4. Analiza intrare-ieşire a sistemelor neliniare ... 448
10.4.1. Funcţia de descriere ... 449
10.4.2. Analiza oscilaţiilor într-un SRA neliniar ... 454
10.5. Stabilitatea sistemelor neliniare ... 457
10.5.1. Stabilitatea sistemelor neliniare ... 458
10.5.2. Stabilitatea sistemelor liniare ... 466
10.5.3. Stabilitatea absolută ... 468
10.5.3.1. Criteriul cercului ... 469
10.5.3.2. Criteriul lui Popov ... 474
10.6. Tehnici de conducere a sistemelor neliniare ... 477
10.6.1. Conducere multi-model ... 477
10.6.2. Conducere neliniară bazată pe model intern ... 481
Probleme ... *482*

11. SISTEME ADAPTIVE ... 486
11.1. Introducere ... 486
11.2. Sisteme adaptive cu model de referinţă (SAMR) ... 498
11.2.1. Introducere ... 498
11.2.2. Urmărirea modelului ... 499
11.2.3. Metoda gradientului (Regula MIT) ... 501
11.2.4. Proiectarea SAMR pe baza teoriei stabilităţii ... 504
11.2.5. Procedura generală de sinteză a SAMR ... 507
11.3. Sisteme adaptive cu identificarea modelului (sisteme adaptive cu autoacordare – SAA) ... 509
11.3.1. Regulatoare cu autoacordare indirectă ... 510
11.3.2. Regulatoare cu autoacordare directă ... 513
11.4. Reglarea adaptivă cu reacţie după stare ... 514
11.5. Probleme ale implementării algoritmilor adaptivi ... 518
11.5.1. Implementarea estimatorului ... 519
11.5.2. Implementarea regulatorului ... 520
Probleme ... *525*

12. SISTEME DE REGLARE CU INTRĂRI ŞI IEŞIRI MULTIPLE ... 528
12.1. Introducere ... 528
12.2. Probleme ale proiectării regulatoarelor multivariabile ... 540
12.2.1. Elemente de analiză ... 540
12.2.2. Tehnici SISO în conducerea proceselor multivariabile ... 543
12.3. Proiectarea sistemelor multivariabile apelând la tehnici de control optimal ... 557
Probleme ... *562*

13. SISTEME INTELIGENTE DE CONDUCERE ... 564
13.1. Introducere ... 564
13.2. Sisteme inteligente autonome ... 567
13.3. Sisteme bazate pe cunoştinţe (Sisteme Expert) ... 573
13.3.1. Introducere ... 573
13.3.2. Arhitecturi de sisteme expert ... 576
13.3.3. Sisteme expert în timp real ... 582
13.4. Tehnici fuzzy în conducerea proceselor ... 585
13.4.1. Elemente introductive ... 585
13.4.2. Reglarea fuzzy a proceselor ... 594
13.4.3. Proiectarea regulatoarelor fuzzy ... 600
13.5. Sisteme de conducere bazate pe reţele neurale ... 608
13.5.1. Reţele neurale artificiale ... 608
13.5.2. Arhitecturi de reţele neurale artificiale ... 612
13.5.3. Algoritmi de antrenare a RNA ... 614
13.5.4. Reţele neurale aplicate pentru modelarea şi conducerea proceselor ... 620
13.6. Algoritmi genetici ... 624
13.7. Tehnici inteligente hibride ... 629

14. IMPLEMENTAREA ANALOGICĂ A ALGORITMILOR DE REGLARE ... 631
14.1. Introducere ... 631
14.2. Structuri de regulatoare ... 634
14.3. Elaborarea comenzii folosind amplificatoare operaţionale ... 639
14.3.1. Structură cu AO cu reacţie paralelă de tensiune şi montaj inversor ... 642
14.3.2. Structură cu AO şi reacţie paralelă de tensiune-montaj neinversor ... 644
14.3.3. Structură cu AO în montaj diferenţial ... 646
14.3.4. Structură cu AO şi reacţie în T, montaj inversor ... 646
14.3.5. Structură cu AO şi reacţie potenţiometrică de tensiune ... 647
14.4. Realizarea legilor de reglare de tip P, PI, PD, PID ... 648
14.4.1. Realizarea legii de reglare de tip P ... 648

14.4.2. Realizarea legii de reglare PD cu filtrare (PDF) 651
14.4.3. Realizarea legii de reglare I, PI 654
14.4.4. Realizarea legii de reglare PID 657
14.4.5. Probleme ale preciziei de realizare a legii de reglare şi de acordare a algoritmilor implementaţi cu AO 660
14.5. Elemente de compatibilitate a comenzii cu diferite elemente de execuţie 662
14.6. Blocuri de transfer în structura regulatoarelor 667
14.7. Fenomenul wind-up şi tehnici de eliminare a acestuia 670

15. IMPLEMENTAREA NUMERICĂ A ALGORITMILOR DE REGLARE 675
15.1. Introducere 675
15.2. Arhitecturi hardware pentru sisteme de conducere 678
15.2.1. Problematica alegerii şi dimensionării structurii şi a modulelor funcţionale 678
15.2.2. Arhitecturi de sisteme numerice de conducere 687
15.3. Probleme ale implementării algoritmilor numerici 694
15.3.1. Reprezentări ale algoritmilor de reglare. Realizări 694
15.3.2. Realizarea software a algoritmilor de reglare numerică 700
15.4. Aspecte operaţionale ale implementării 707
15.5. Programarea regulatoarelor numerice 711
15.5.1. Introducere 711
15.5.2. Planificarea taskurilor 716
15.6. Organizarea unui algoritm de reglare numerică în jurul unui EXECUTIV de timp real 718

BIBLIOGRAFIE 721

CONTENTS

1. INTRODUCTION
1.1. Short history 19
1.2. Paradigms of control engineering 20
1.3. Trends in control of industrial processes 23

2. MATHEMATICAL MODELS OF CONTROLLED PROCESSES 39
2.1. The problems of processes modeling and identification 39
2.2. State – space models 45
2.3. Input – output models 49
2.4. Parameterization of processes models 54
2.5. Discretization of continuous models 60
2.6. Stochastic models 65
2.7. Distributed parameters and time –delay systems 70
2.8. Nonparametric models 76
2.9. Modeling errors. Uncertainties 88
2.10. Examples of analytical models 91

3. THE PERFORMANCES OF COTROL SYSTEMS 103
3.1. Introduction 103
3.2. Stability 107
3.3. Precision 113
3.4. Performances evaluation 120
3.5. Stability and performances robustness 133
Problems 141

4. CONVENTIONAL CONTROL STRUCTURES AND ALGORITHMS 144
4.1. Introduction 144
4.2. The analysis of control systems with conventional controllers 156
4.3. The analysis of control systems with PID controllers for time – delay processes 166
4.4. Tuning of PID controllers 173
4.5. Robustness of control systems with PID controllers 191
4.6. Control architectures 198
Problems 212

5. NUMERICAL PID CONTROL ALGORITHMS 215
5.1. Consistent abbreviation 215
5.2. Position and incremental PID algorithms 219
5.3. Filtering PID algorithm 222
5.4. Modified PID algorithm 227
5.5. Selection of discretization (sampling) time 231
5.6. Tuning of discrete algorithms 233
5.7. Problems of discrete PID algorithms implementation 236

6. DESIGN OF CONTROL SYSTEMS BASED ON INPUT - OUTPUT MODELS 244
6.1. Introduction 244
6.2. SISO control systems design problems 251
6.3. Frequency domain design problems 255
6.4. Design of control systems based on transfer functions 259
6.5. Design of control systems using Bode diagrams 265
6.6. Design of control systems using the $M(\omega)$ and $\varphi(\omega)$ diagrams 276
6.7. Synthesis by Pole Assignment procedure 280
6.8. Design of control systems by SISO controller parameterizations 287
Problems *305*

7. SYNTHESIS VIA STATE - SPACE MODELS 308
7.1. Control by state feedback 309
7.2. Estimators 316
7.3. Combining state feedback with estimation 322
7.4. Controller design with included disturbance 325
7.5. Controller design with reference tracking 328
7.6. Two degree of freedom controller design 330
7.7. Synthesis of optimal controller 333
Problems *342*

8. DIGITAL CONTROL SYSTEM DESIGN BY INPUT - OUTPUT MODELS 346
8.1. Direct design by imposed response of system 347
8.2. Dead - Beat algorithms 354
8.3. Design of digital systems by pole assignment 360
8.4. The robustness of digital controllers 372
Problems *376*

9. STOCHASTIC CONTROL SYSTEMS 379
9.1. Introduction 379
9.2. Minimum - Variance Control 381
9.3. Minimum - Variance Control with command penalties 388
9.4. Modified minimum - variance control 391

9.5. Linear Quadratic Gaussian Control 391
9.6. Predictive control algorithms 402
Problems *412*

10. NONLINEAR SYSTEMS 415
10.1. Types of nonlinearities 415
10.2. Nonlinear control systems 417
10.3. Analysis of nonlinear systems by phase portraits 426
10.4. Input – Output Analysis. Describing functions 448
10.5. Nonlinear systems stability 457
10.6. Nonlinear control techniques 477
Problems *482*

11. ADAPTIVE SYSTEMS 486
11.1. Introduction 486
11.2. Model – Reference Adaptive Systems (MRAS) 498
11.3. Adaptive Systems with Model Identification (Autotuning Adaptive Systems) 509
11.4. Adaptive control via state feedback 514
11.5. Implementation problems of adaptive controllers 518

12. MULTIVARIABLE CONTROL SYSTEMS 528
12.1. Introduction 528
12.2. Special problems of multivariable controllers design 540
12.3. Design of multivariable systems via optimal control techniques.. 557
Problems *562*

13. INTELLIGENT CONTROL SYSTEMS 564
13.1. Introduction 564
13.2. Autonomous Intelligent Systems 567
13.3. Knowledge – Based Systems (Expert Systems) 573
13.4. Fuzzy techniques in process control 585
13.5. Neural Networks Control Systems 608
13.6. Genetic Algorithms 620
13.7. Hybrid Intelligent Techniques 629

14. IMPLEMENTATION OF CONTROL ALGORITHMS BY ANALOGIC ELECTRONIC CIRCUITS 631
14.1. Preview 631
14.2. The structure of electronic controllers 634
14.3. Operational amplifier used to implement the controller 639
14.4. Implementation of PID Controllers 648
14.5. The compatibility of controller with different actuators 660
14.6. Transfer models in the controller structure 662
14.7. Anti – wind up schemes 670

15. DIGITAL IMPLEMENTATION OF CONTROL SYSTEMS............ 675
15.1. Introduction........ 675
15.2. The architectures for control systems........ 678
15.3. Problems of implementation of numerical control systems........ 694
15.4. Operational aspects of implementation........ 707
15.5. The programming of digital systems........ 711
15.6. The structuring of numerical algorithms by real – time operating systems........ 718

BIBLIOGRAPHY........ 721

1. INTRODUCERE

Proiectarea şi funcţionarea unor procese automatizate, astfel încât să fie menţinute specificaţiile dorite, ca de exemplu, profitabilitatea, calitatea, siguranţa, impactul asupra mediului etc, presupun o strânsă colaborare între experţi în diferite domenii: teoria sistemelor, tehnologia prelucrării şi transmiterii informaţiilor, ingineria reglării/conducerii, calculatoare, instrumentaţie etc. Fiecare dintre aceste domenii contribuie, mai mult sau mai puţin, la dezvoltarea conceptuală şi realizarea practică a sistemelor de conducere automată a proceselor industriale.

Succesul sau insuccesul unui proiect de automatizare a proceselor industriale depinde în esenţă de doi factori: a) gradul de înţelegere şi de cunoaştere a modurilor de funcţionare a procesului condus şi b) capacitatea de manipulare a conceptelor specifice teoriei sistemelor, a reprezentării formale a semnalelor şi a principiilor reglării (conducerii).

Complexitatea proceselor industriale, corelată cu cerinţe înalte de performanţă, impune automatizarea ca pe o necesitate obiectivă în contextul globalizării economiei şi a pieţelor de procese şi produse. În afara unor cerinţe de performanţă specifice vizând eficienţa, calitatea, siguranţa în funcţionare, optimizarea consumurilor energetice, sistemele de conducere automată sunt tot mai mult supuse unor norme specifice de compatibilitate cu mediul în care evoluează.

Astfel, în afara cerinţelor tehnice şi economice, sistemele de conducere automată sunt supuse tot mai mult restricţiilor ecologice. Conceptele de „produs curat“ şi „proces curat“, integrate în noţiunea largă de „ECO-ECONOMIE“, care pătrunde tot mai mult în sfera de activitate a inginerului proiectant, reclamă mutaţii substanţiale în proiectarea proceselor industriale şi, implicit, în conceperea, proiectarea şi realizarea sistemelor de conducere automată.

Pentru a fi automatizate, procesele tehnologice se proiectează integrând problemele de automatizare şi echipamentele de conducere în sisteme cu performanţele impuse încă din faza de concepţie şi proiectare a proceselor. Procesele complet automatizate se proiectează integrat cu

soluțiile specifice de conducere automată. Proiectarea și conducerea procesului trebuie tratate în paralel, pentru a atinge niveluri înalte de productivitate și utilizabilitate. Conceptul „IPDC" (Integrated Process Design and Control) se impune tot mai mult în contextul globalizării și, evident, al piețelor concurențiale.

Inginerii tehnologi proiectanți de procese trebuie să coopereze strâns cu inginerii automatiști proiectanți de soluții și echipamente de automatizare. Conceptul „IPPD" (Integrated Process and Products Design) este strâns corelat cu IPDC și se impune a fi tratat în termeni specifici „Ingineriei concurente" (IC).

În acest context, automatica și automatizarea proceselor capătă noi valențe, în strânsă corelație cu cerințele de performanță impuse sistemelor de conducere și având la bază rezultatele evoluției științei și tehnologiei.

1.1. Scurt istoric

Sistemele de reglare (conducere) automată au o lungă istorie, fiind mai vechi decât însăși umanitatea. Multe sisteme biologice de reglare se regăsesc în structura primilor locuitori ai planetei.

În jurul anului 300 î.e.n., grecul Ktesibios a inventat ceasul cu apă, care controla curgerea apei cu viteză constantă într-un container. Nivelul apei în container permitea măsurarea timpului. O etapă importantă în evoluția sistemelor de reglare a apărut în timpul revoluției industriale. Astfel, mașinile realizate în acea etapă, cum ar fi mașinile cu abur, necesitau vehicularea unor importante cantități de materiale și energie, dificil de controlat manual. Ca sistem reprezentativ pentru reglarea vitezei mașinilor cu abur remarcăm regulatorul centrifugal datorat lui James Watt. Cu ajutorul acestui regulator se asigura reglarea vitezei mașinilor cu abur prin modificarea debitului de abur.

Cele două războaie mondiale au contribuit substanțial la dezvoltarea sistemelor de reglare (conducere), fie în domeniul sistemelor de ghidare automată, fie în domeniul sistemelor de fabricație cu productivitate ridicată.

O etapă importantă în evoluția sistemelor de reglare (conducere) este marcată de programele de cercetări spațiale în anii 1960 și 1970, care au impus noi concepte și noi tehnologii în automatizarea proceselor. Se poate remarca o reală lansare a automaticii moderne odată cu lansarea cercetărilor privind cunoașterea spațiului extraterestru, aerian și acvatic.

Automatica – domeniu de avangardă al științelor inginerești – a cunoscut o continuă evoluție în ultimii 40 ani, constituindu-se într-o ramură

a științei ce contribuie esențial la înnobilarea multor domenii ale științei și tehnologiei. Având la bază un avansat formalism matematic, automatica îmbină în mod fericit concepte, strategii de conducere și metodologii cu cele mai avansate tehnologii care asigură achiziția, transmiterea și procesarea informațiilor și cunoștințelor despre procesul condus și mediul său extern, în scopul realizării conducerii automate.

Evoluția automaticii este strâns legată de cea a tehnologiei, în general, și a științei calculatoarelor, în particular, rezultate semnificative obținându-se în ultimele două decenii, atât în plan conceptual, cât mai ales în cel aplicativ, ca urmare a dezvoltării microelectronicii, a introducerii circuitelor electronice pe scară largă și foarte largă, a dezvoltării de sisteme de operare în timp real. Progrese remarcabile au fost realizate în domeniul interfețelor de proces, în domeniul elementelor de execuție și al traductoarelor cu ridicat nivel de inteligență, în domeniul procesoarelor de semnal și al microcontrolerelor, fiind astfel posibilă implementarea celor mai avansate strategii de conducere, având la bază modele matematice ale proceselor sau strategii euristice, respectiv modele lingvistice sau modele calitative.

Astfel, dacă se consideră evoluția strategiilor de conducere a proceselor industriale, pot fi evidențiate mai multe categorii și, corespunzător acestora, se pot atașa generații de sisteme de conducere [42] cum ar fi:

- sisteme convenționale având la bază strategii convenționale de reglare (reglare PID, reglare în cascadă, reglare directă);
- sisteme avansate de conducere având la bază tehnici clasice de conducere (ajustarea amplificării, compensarea timpului mort, reglare prin decuplare, reglare selectivă etc.);
- sisteme avansate de conducere bazate pe tehnici noi (reglare predictivă, reglarea cu model intern, reglare adaptivă, control statistic al calității etc.);
- sisteme avansate bazate pe modele matematice complexe (control neliniar, control robust, control optimal);
- sisteme avansate având la bază tehnici inteligente (sisteme bazate pe cunoștințe, tehnici fuzzy, tehnici neurale);
- sisteme inteligente hibride având la bază tehnici avansate de procesare a informațiilor și a cunoștințelor, care integrează tehnicile neurale, tehnicile fuzzy, tehnicile IA și programarea evoluționistă.

Corespunzător acestor categorii de strategii de conducere și ținând seama de evoluția arhitecturilor hardware și software pentru implementarea lor, pot fi evidențiate diferite generații de sisteme de conducere automată.

Desigur, sistemele avansate de conducere cu autonomie ridicată, ce presupune implementarea unor tehnici inteligente hibride, necesită utilizarea unor echipamente de procesare a informaţiilor şi cunoştinţelor, având la bază comportarea creierului uman şi inteligenţa moleculară. Se realizează astfel în mod natural corespondenţa dintre sistemele de calcul din generaţia a VI-a şi sistemele avansate de conducere autonome, cu un înalt nivel de inteligenţă.

Parcurgerea diferitelor etape în dezvoltarea automaticii şi, corespunzător, a sistemelor de conducere automată, care incorporează, atât strategiile de conducere, cât şi suportul hardware şi software pentru implementarea acestora, evidenţiază trecerea de la structurile triviale de reglare, cu unul sau două grade de libertate, având la bază reacţia negativă şi comanda directă după mărimile exogene măsurabile, la structurile cu multiple interacţiuni şi cu un înalt nivel de inteligenţă, cu organizare multinivel şi multistrat, care funcţionează pe *principiul creşterii preciziei cu descreşterea inteligenţei*, structuri multirezoluţionale [24].

Astfel, arhitecturile de sisteme de conducere automată au evoluat de la simple bucle de reglare cu o intrare şi o ieşire, la arhitecturi de sisteme autonome multistrat, multifuncţionale, cu nivel ridicat de inteligenţă.

La începutul noului mileniu, automatizarea reprezintă, indubitabil, un factor esenţial al societăţii moderne. Virtual, orice sistem cu care venim în contact incorporează tehnologii avansate de automatizare. Astfel, de la echipamentele simple, domestice, de control a temperaturii şi a umidităţii în încăperi de locuit, la sisteme complexe de automatizare a avioanelor, automobilelor, combinatelor chimice, centralelor termoelectrice şi nucleare, a proceselor complexe de fabricaţie etc., identificăm o gamă variată de sisteme de conducere dintre cele mai performante.

Procesele tehnologice complexe pot fi conduse numai apelând la sisteme de conducere ce includ mii de bucle de reglare, cel mai adesea într-o puternică interacţiune. Nivelul performanţelor, corelat cu cerinţele tehnologice care vizează controlul unor forţe sau fluxuri de energie de valoare mare, impune precauţii importante în adoptarea tehnologiei de automatizare.

Acestea presupun utilizarea unor echipamente hardware de mare precizie, instrumente performante de calcul şi tehnici inteligente de conducere.

În afara aplicaţiilor industriale, sistemele de reglare (conducere) reprezintă elemente centrale în funcţionarea sistemelor biologice, a sistemelor de comunicaţie, a sistemelor economice şi chiar a interacţiunilor umane. Într-adevăr, dacă se analizează atent, automatica (automatizarea) se regăseşte, într-o formă sau alta, în orice aspect al vieţii.

Se poate aprecia că ingineria reglării (conducerii) este una dintre cele mai provocatoare şi interesante domenii ale ingineriei moderne. Aceasta incorporează concepte, modele, metode, tehnici şi tehnologii din diverse discipline, reprezentând un domeniu interdisciplinar cu larg spectru aplicativ.

Ingineria reglării (conducerii), datorită globalizării pieţei şi dezvoltării economiei, va cunoaşte în viitor o dezvoltare semnificativă, atât în plan conceptual, cât şi în planul aplicaţiilor. Competiţia în afaceri impune o producţie cu preţuri minime şi de calitate maximă, obiective realizabile printr-un ridicat nivel de automatizare. În prezenţa unor resurse naturale limitate şi a unor restricţii privind prezervarea mediului nostru fragil, automatizarea apare ca singura cale de a obţine beneficii şi de a te menţine în competiţie. Desigur, în acest context remarcăm impactul factorilor economici, politici şi de mediu asupra dezvoltării ingineriei reglării (conducerii) automate.

1.2. Problematica sistemelor de reglare (conducere)

Proiectarea unui sistem de reglare necesită un efort ciclic, în care se iterează etapele de *modelare*, *proiectare*, *simulare*, *testare* şi *implementare*.

În funcţie de particularităţile procesului, de gradul de generalitate şi aplicabilitate a sistemului proiectat pot fi evidenţiate particularităţi ale metodelor de proiectare. Pentru procesele care nu includ aspecte comerciale (cercetare, educaţie şi misiuni speciale ca de exemplu lansarea primului om pe lună), predominante sunt aspectele tehnice, pedagogice, siguranţa în funcţionare, deşi nici costul nu trebuie neglijat.

În cazul proiectării unui sistem de reglare cu motivaţie comercială, se vor lua în consideraţie aspectele economice în strânsă corelaţie cu performanţele şi complexitatea aplicaţiei.

Un sistem de reglare automată (SRA) asigură menţinerea variabilei reglate la o valoare constantă impusă prin referinţa sistemului care în acest caz este o constantă.

Orice SRA este orientat pe aplicaţie, instalaţia tehnologică fiind cea care determină arhitectura şi componentele SRA. Astfel, proiectarea unui SRA presupune o tratare holistică a tuturor componentelor hardware şi software şi a tuturor aspectelor funcţionale ale acestuia, şi anume: *instalaţia tehnologică*, *senzori* (traductoare), *elemente de execuţie*, *obiective*, *comunicaţii*, *arhitecturi* şi *interfeţe*, *calculatoare*, *algoritmi*, *perturbaţii* şi *incertitudini*.

Astfel, pe lângă elementele structurale ce compun un sistem de conducere automată (instalaţia tehnologică, interfeţe, senzori, elemente de execuţie, regulatoare (calculatoare)) se impune considerarea aspectelor funcţionale evidenţiate prin modelele matematice ataşate componentelor şi întregului sistem, prin cerinţele de performanţă şi prin modelele mărimilor exogene şi a incertitudinilor.

Atât problemele de analiză ale SRA, cât şi cele de proiectare se raportează practic la elementele deja menţionate. Funcţionarea oricărui SRA se raportează la obiective impuse (cerinţe de performanţă) iar acestea presupun integrarea sistemică într-o arhitectură optimă a componentelor şi a funcţiilor mai sus menţionate.

Instalaţia tehnologică (IT) reprezintă o parte componentă a SRA. Înţelegerea funcţionării acesteia, cunoaşterea regimului nominal de funcţionare, cunoaşterea perturbaţiilor şi a locului de aplicare, particularităţile sursei de energie şi a posibilităţilor de ajustare, dimensiunile fizice şi conexiunea cu cerinţele de performanţă ale instalaţiei tehnologice sunt elementele esenţiale, necesare pentru caracterizarea acesteia. Cunoaşterea legilor ce guvernează funcţionarea instalaţiei tehnologice în funcţie de particularităţile acestora (procese mecanice, electrice, chimice, termice, economice etc.) permite obţinerea unor modele analitice ce caracterizează regimurile de funcţionare.

Instalaţia tehnologică poate fi reprezentată sistemic ca în figura 1.1, unde intrarea este reprezentată prin fluxul de energie Q iar ieşirile sunt reprezentate prin mărimile din proces p_1, p_2, ..., p_n de natură fizică diferită (presiuni, temperaturi, debite, nivel, concentraţii, deplasări, viteze etc.).

Asupra IT pot acţiona diverse perturbaţii v_1, v_2 care determină, fie modificarea regimului de funcţionare (perturbaţii aditive), fie modificarea structurală a modelului matematic ataşat IT şi implicit comportarea acesteia (perturbaţii parametrice).

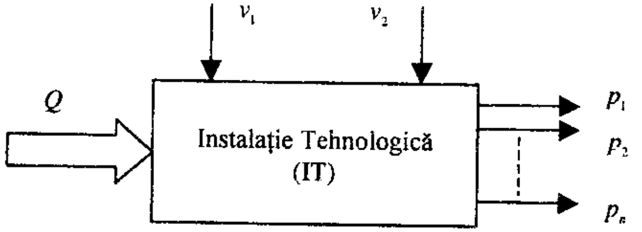


Fig. 1.1

Traductoarele (senzorii) într-un sistem de reglare automată au rolul esenţial în culegerea informaţiei din IT. Prin măsurarea şi conversia

mărimilor fizice din proces se asigură informaţia necesară pentru luarea deciziilor de conducere a IT. În cazul în care nu toate mărimile fizice sunt măsurabile, pot fi generate informaţii despre proces pe baza unor observaţii şi măsurări indirecte. Aceasta conduce la ideea de „senzor soft" sau „senzor virtual". Traductoarele într-un SRA sunt strâns legate de particularităţile IT, de natura fizică a mărimilor măsurate. În cele mai multe cazuri, traductoarele sunt integrate în IT, poziţia lor fiind bine precizată încă din faza de proiectare a IT, astfel încât informaţia obţinută prin măsurători să fie consistentă şi nedeformată.

La alegerea unui traductor pentru SRA se iau în consideraţie următoarele caracteristici [34]:

- precizia de măsurare (rezoluţia traductorului);
- liniaritatea caracteristicii statice a traductorului;
- sensibilitatea traductorului şi capacitatea de rejecţie a zgomotelor;
- fineţea şi fidelitatea;
- viteza de răspuns (dinamica traductorului);
- compatibilitatea cu cerinţele de mediu;
- costul traductorului.

Traductoarele, în componenţa cărora vom include elementele sensibile şi adaptoarele de semnal, furnizează mărimea măsurată ca semnal unificat, cel mai adesea sub formă de curent continuu în forma $(4-20)$ mA. Astfel, mărimile fizice generic notate prin p (parametri) sunt convertite în mărimi măsurate y (ieşiri măsurate), după cum se arată în figura 1.2.

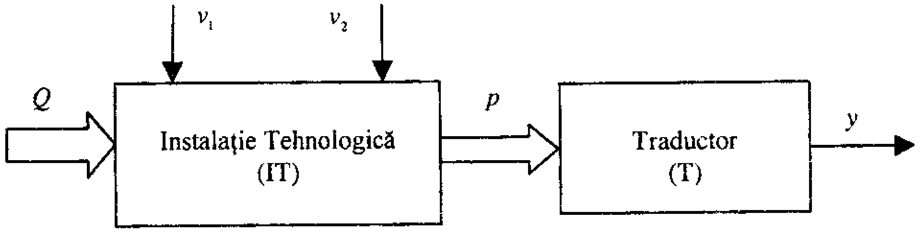


Fig. 1.2

Elemente de execuţie (EE)

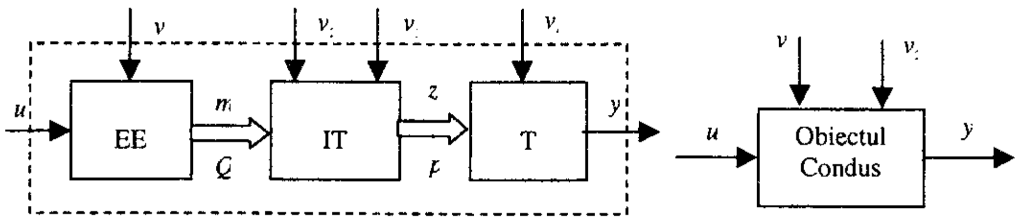
Odată alese traductoarele pentru a furniza informaţii asupra stării instalaţiei tehnologice, se impune a acţiona asupra IT cu scopul asigurării evoluţiei procesului din starea curentă în starea dorită. Acţiunile asupra sursei de energie a IT sunt realizate cu ajutorul elementelor de execuţie. Ca şi traductoarele, elementele de execuţie se aleg în funcţie de particularităţile

IT. Elementele de execuţie pot contribui la îmbunătăţirea performanţelor sau pot limita performanţele unui SRA dacă sunt alese şi dimensionate necorespunzător.

Alegerea, dimensionarea şi poziţionarea elementelor de execuţie (EE) pentru un SRA reprezintă una dintre sarcinile dificile ale proiectantului de sistem. Adesea elementele de execuţie se aleg şi se poziţionează în IT odată cu proiectarea şi realizarea acesteia. De menţionat faptul că elementele de execuţie convertesc un semnal de comandă (informaţional) într-un flux de energie controlat prin intermediul organului de execuţie. Un element de execuţie este alcătuit din organul de execuţie conectat direct la IT şi elementul de acţionare. Pot fi identificate în aplicaţii industriale diferite tipuri de organe de execuţie, determinate de particularităţile energetice ale IT şi în mod corespunzător diferite tipuri de elemente de acţionare (electrice, pneumatice, hidraulice).

Mărimea de execuţie, notată generic cu m, reprezintă cel mai adesea o mărime de natură energetică (Q) şi se constituie ca intrare în instalaţia tehnologică (IT). Ieşirea din instalaţia tehnologică, notată prin z, reprezintă mărimea fizică specifică acesteia şi este măsurată prin intermediul traductorului T.

Integrarea EE într-o instalaţie tehnologică alături de traductoare permite a defini printr-un termen generic „obiectul condus" sau „procesul generalizat", reprezentat ca în figura 1.3. În cele ce urmează vom înţelege prin termenul „proces" ansamblul format din IT, EE şi T.



(a) (b)

Fig. 1.3

În această reprezentare sintetică, u reprezintă comanda, y reprezintă ieşirea măsurată, iar v_i perturbaţile care pot acţiona asupra instalaţiei tehnologice, asupra elementului de execuţie şi asupra traductorului.

Ţinând seama de locul şi rolul EE într-un SRA, pentru alegerea acestora se impune considerarea următorilor factori:

- cuplul sau forţa dezvoltată de elementul de acţionare;

- liniaritatea caracteristicii statice a EE;
- dinamica EE şi compatibilitatea cu dinamica IT;
- capacitatea organului de execuţie de a asigura fluxul de energie necesar compensării perturbaţiilor ;
- compatibilitatea EE cu mediul industrial;
- volumul ocupat de EE în corelaţie cu puterea dezvoltată;
- costul şi siguranţa în funcţionare.

Performanţele unui SRA sunt substanţial influenţate de elementele de execuţie care pot introduce neliniarităţi esenţiale dificil de gestionat.

Tendinţele în domeniul EE vizează dezvoltarea unor EE inteligente cu ridicată compatibilitate, atât cu IT, cât şi cu sistemele numerice de conducere în timp real. Compensarea neliniarităţilor şi adaptarea EE la diferite regimuri de funcţionare ale IT reprezintă atribute importante ale EE inteligente.

Obiectivele oricărui SRA sunt de a asigura *rejecţia perturbaţiilor* şi *urmărirea referinţei*. Aceste obiective calitative pot fi detaliate pornind de la particularităţile SRA şi astfel pot fi enumerate obiectivele cantitative de tipul: nivelul preciziei, vitezei de răspuns, grad de stabilitate etc, sau obiective generale ca: profitabilitate, calitate, siguranţă în funcţionare, compatibilitate cu mediul etc. De remarcat faptul că obiectivele sunt corelate cu particularităţile procesului condus, cu variabilele ce trebuie controlate şi cu gradul de complexitate al sistemului de conducere. În capitolul al treilea sunt prezentate categorii de obiective utilizate în proiectarea SRA.

Calculatoarele sunt parte integrantă a sistemelor moderne de conducere a proceselor industriale. Organizate în structuri distribuite sau/şi ierarhice, sub forma unor unităţi singulare de tipul automatelor programabile a regulatoarelor numerice, sistemele numerice de procesare a informaţiei asigură puterea de calcul necesară şi flexibilitatea dorită sistemelor complexe de conducere. În afară de includerea în aplicaţiile de timp real, calculatoarele sunt instrumente eficiente pentru proiectarea asistată de calculator a sistemelor de conducere, pentru simularea şi testarea algoritmilor de conducere. Instrumentele moderne de proiectare asistată pentru realizarea rapidă a prototipurilor de sisteme de reglare automată permit dezvoltarea de medii integrate pentru modelarea sistemelor de reglare, proiectarea, simularea şi implementarea acestora. Utilizarea unor asemenea instrumente facilitează reducerea timpului necesar pentru proiectarea şi implementarea unor sisteme bazate pe strategii avansate de conducere.

Arhitecturi și interfețe. În funcție de complexitatea procesului, de numărul de variabile controlate pot fi adoptate diferite arhitecturi de sisteme de conducere, *centralizate* sau *descentralizate*. Descompunerea problemei de conducere în subprobleme sau subsisteme impune utilizarea unor arhitecturi distribuite de conducere, însă armonizarea și coordonarea diferitelor subsisteme necesită o ierarhizare multinivel sau multistrat. În capitolul al XV-lea sunt prezentate particularitățile sistemelor distribuite și ierarhizate de conducere. În cazul unor structuri distribuite, interfațarea diferitelor componente reprezintă o sarcină specială a proiectantului de sistem de conducere. Tendința în această direcție o constituie standardizarea interfețelor cu real impact asupra costurilor, flexibilității și siguranței în funcționare. La nivelul de bază (executiv) structura unui SRA se alege în funcție de numărul variabilelor controlate, în funcție de cerințele de performanță impuse și în funcție de numărul de elemente de execuție incluse în IT.

Comunicații. În ultimii 10-15 ani, o varietate mare de rețele de comunicații a fost dezvoltată fiind astfel utilizate în sistemele industriale la diferite niveluri: regulatoare (calculatoare), senzori, elemente de execuție și câmp.

Proiectarea sistemelor de comunicație și a protocoalelor asociate reprezintă în automatizarea avansată una dintre cele mai importante operații. Rețelele de comunicație la nivelul câmpului prezintă un interes special în automatizarea proceselor ca urmare a avantajelor oferite (costuri reduse de instalare, dimensiuni reduse ale cablurilor de conectare, flexibilitate ridicată, interfațarea dispozitivelor inteligente, distribuția funcțiilor de comandă la nivelul senzorilor și elementelor de execuție). Rețelele digitale de comunicație deschid noi oportunități pentru îmbunătățirea monitorizării proceselor, a identificării rapide a defectelor și remedierea acestora.

Rețelele FIELDBUS și PROFIBUS sunt cele mai răspândite în aplicațiile de timp real în automatizarea proceselor industriale. Extinderea utilizării traductoarelor și elementelor de execuție inteligente în configurații de sisteme numerice de conducere cu rețele PROFIBUS și FIELDBUS conduce la creșterea siguranței în funcționare a sistemelor de conducere, la creșterea calității și competitivității produselor.

Înainte de a alege variabilele din proces ce pot fi controlate și manipulate se determină numărul maxim de variabile ce pot fi specificate independent. Practic, se determină numărul gradelor de libertate N_L din numărul variabilelor din proces N_V și numărul ecuațiilor independente ce leagă aceste variabile N_E.

Astfel:

$$N_L = N_V - N_E. \tag{1.1}$$

În general, numărul variabilelor controlate (N_C) va fi mai mic sau egal cu numărul gradelor de libertate (N_L).

Pornind de la definiția obiectului condus și admițând că variabilele controlate notate cu $\tilde{y}$ reprezintă mărimi de calitate ale SRA (abateri față de regimul de funcționare al procesului, amplitudinea comenzii, amplitudinea variabilei fizice din proces) iar mărimile exogene w sunt perturbațiile și zgomotul ce însoțesc variabila măsurată, obiectul condus ca proces supus conducerii (proces condus) se poate reprezenta ca în figura 1.4.

Pentru un asemenea obiect pot fi selectate diferite structuri de SRA cu unul sau mai multe grade de libertate.

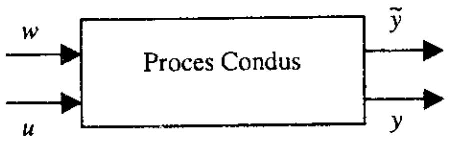


Fig. 1.4

Pornind de la structura prezentată în figura 1.5, unde regulatorul (calculatorul) generează comanda u pe baza informațiilor măsurate y, astfel încât să se asigure evoluția dorită a variabilelor $\tilde{y}$ în prezența mărimilor exogene w, se pot exemplifica structuri de reglare cu diverse grade de libertate.

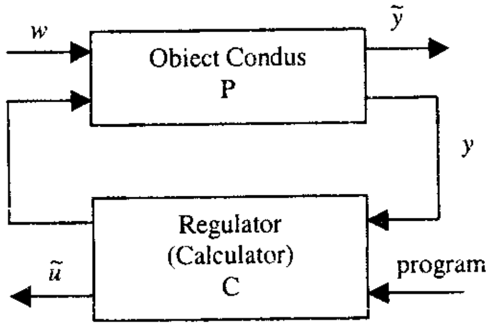


Fig. 1.5

Prin programul impus sistemului de conducere și ținând seama de evoluția ieșirii măsurate y, se generează comanda u și mărimile de calitate $\tilde{u}$ asociate regulatorului (calculatorului).

Pentru caracterizarea funcţionării obiectului condus şi a regulatorului utilizăm în continuare, din considerente de simplitate, operatorii liniari P, respectiv C. Aceşti operatori pot fi, spre exemplu, funcţiile de transfer ataşate acestor două sisteme.

Structura de reglare cu un singur grad de libertate. În figura 1.6 se prezintă structura trivială a unui SRA cu o intrare r şi o ieşire măsurată y supus acţiunii perturbaţiilor v_1 – aplicată la ieşirea procesului, v_2 – perturbaţie aplicată la intrarea procesului şi n – zgomotul de măsură.

În această structură evidenţiem ca mărimi de calitate (variabile controlate) mărimile ε, u şi y_p. Evoluţia acestor mărimi de calitate furnizează informaţii privind buna funcţionare a SRA. Este evident că, atât u, cât şi y_p trebuie limitate ca amplitudine. Variabila $\varepsilon = r - y$ reprezintă eroarea în SRA pe baza căreia se elaborează comanda u. Pentru un SRA se impune ca eroarea în regim staţionar să fie egală cu zero (pentru mărimi exogene de tip treaptă).

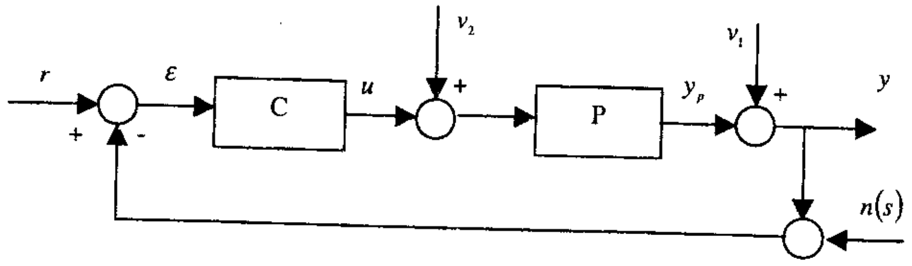


Fig. 1.6

Din figura 1.6 pot fi scrise următoarele relaţii:

$$y_p = \frac{PC}{1+PC}r - \frac{PC}{1+PC}v_1 + \frac{P}{1+PC}v_2$$
$$u = \frac{C}{1+PC}r - \frac{C}{1+PC}v_1 - \frac{PC}{1+PC}v_2 \qquad (1.2)$$
$$\varepsilon = \frac{1}{1+PC}r - \frac{1}{1+PC}v_1 - \frac{P}{1+PC}v_2.$$

În relaţiile (1.2) s-a neglijat efectul zgomotului n asupra variabilelor de calitate.

Dacă notăm: $w \overset{not}{=} [r \quad v_1 \quad v_2]$ şi $\tilde{y} \overset{not}{=} [y_p \quad u \quad \varepsilon]^T$ obţinem relaţia matriceală:

$$\tilde{y} = H_1 \cdot w \qquad (1.3)$$

unde:

$$H_1 = \begin{bmatrix} PC & -PC & P \\ C & -C & -PC \\ 1 & 1 & -P \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{1+PC} \qquad (1.4)$$

Cele două obiective ale SRA nu pot fi realizate simultan dacă se foloseşte o structură de SRA cu un grad de libertate. Perturbaţiile şi referinţa acţionează diferit asupra celor trei variabile reglate, iar în structură există un singur regulator. Astfel, prin alegerea regulatorului C nu pot fi controlate în mod corespunzător toate variabilele de interes.

Structura de reglare cu două grade de libertate. În figura 1.7 se prezintă structura de SRA cu două grade de libertate: regulatoarele cu funcţiile de transfer C_r şi C_y. Cele două regulatoare plasate pe cele două canale distincte asigură practic satisfacerea obiectivelor reglării.

Mărimile reglate (de calitate) pot fi exprimate, ca şi în cazul precedent, astfel:

$$y_p = \frac{PC_r}{1+PC_y}r - \frac{PC_y}{1+PC_y}v_1 + \frac{P}{1+PC_y}v_2$$
$$u = \frac{C_r}{1+PC_y}r - \frac{C_y}{1+PC_y}v_1 - \frac{PC_y}{1+PC_y}v_2 \qquad (1.5)$$
$$\varepsilon = \frac{1+P(C_y - C_r)}{1+PC_y}r - \frac{1}{1+PC_y}v_1 - \frac{P}{1+PC_y}v_2.$$

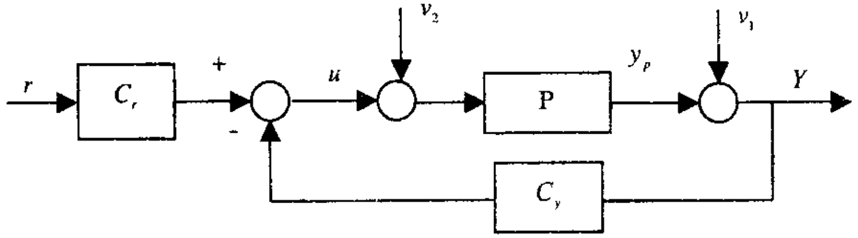


Fig. 1.7

Cu aceleaşi notaţii se obţine reprezentarea matriceală:

$$\tilde{y} = H_2 \cdot w \qquad (1.6)$$

unde matricea H_2 are forma:

$$H_2 = \begin{bmatrix} PC_r & -PC_y & P \\ C_r & -C_y & -PC_y \\ 1+P(C_y - C_r) & -1 & -P \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{1+PC_y} \qquad (1.7)$$

Se poate observa cu uşurinţă că regulatorul C_r, printr-o alegere corespunzătoare, asigură comportarea dorită a SRA în raport cu referinţa, iar C_y asigură practic rejecţia perturbaţiilor.

Structura de SRA cu trei grade de libertate. În condiţiile în care unele perturbaţii ce acţionează asupra procesului condus sunt măsurabile se poate adopta o structură de reglare cu compensarea directă a perturbaţiei măsurabile. Se realizează astfel o reglare directă (feedforward). Combinând această reglare directă cu reglarea cu două grade de libertate se obţine o structură de reglare combinată, cu trei grade de libertate.

În figura 1.8 se prezintă structura de reglare cu trei blocuri de reglare (trei grade de libertate, C_r, C_v, C_y).

Compensarea efectului perturbaţiei măsurabile v_2 cu ajutorul blocului de reglare C_v asigură o mai bună comportare a SRA în raport cu această perturbaţie. Pentru proiectarea acestui bloc de reglare se impune cunoaşterea modelelor P şi P_v.

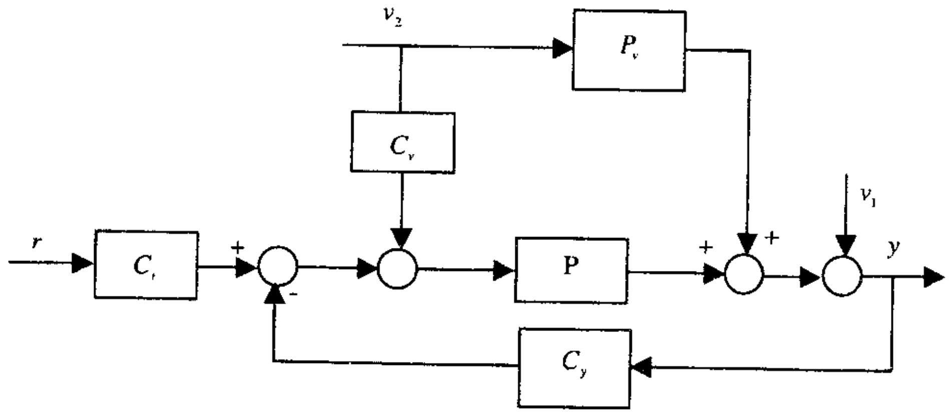


Fig. 1.8

Relaţii algebrice simple pot fi utilizate şi în acest caz pentru a obţine modelul în forma matriceală:

$$\tilde{y} = H_3 \cdot w \qquad (1.8)$$

7352203

unde H_3 are în componenţă cele trei funcţii de transfer al blocurilor de reglare C_r, C_y, C_v şi P şi P_v. Determinarea matricei H_3 este un simplu exerciţiu pentru cititor.

Structura de reglare în cascadă. Multe procese industriale pot fi reprezentate prin modele decompozabile cu variabile intermediare măsurabile şi de cele mai multe ori controlabile. Reglarea acestor variabile intermediare în cadrul unor bucle de reglare secundare aduce contribuţii importante la îmbunătăţirea comportării întregului SRA prin creşterea vitezei de răspuns şi a preciziei reglării.

În figura 1.9 se prezintă structura unui SRA în cascadă cu două bucle de reglare (realizate cu regulatoarele C_1 şi C_2) şi un regulator suplimentar C_r pentru urmărirea referinţei.

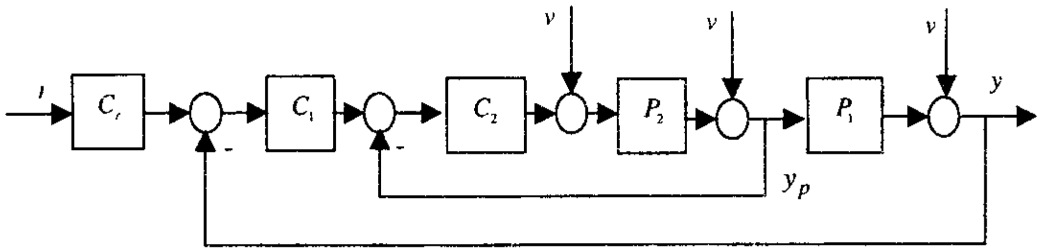


Fig. 1.9

Se admite că bucla secundară (C_2, P_2) este mai rapidă decât bucla principală (C_1, P_1) de $(3-5)$ ori, iar variabila y_p este măsurabilă.

O asemenea structură se adoptă în condiţiile în care mărimile intermediare sunt măsurabile şi se impune reglarea lor cu abateri controlate.

Calcule elementare pot conduce, ca şi în cazurile precedente, la o reprezentare matriceală de forma:

$$\tilde{y} = H_4 \cdot w \qquad (1.9)$$

unde H_4 este o matrice compusă din P_1, P_2, C_1, C_2 şi C_r.

O asemenea structură este eficientă dacă se aleg corespunzător variabilele intermediare şi se proiectează corect toate blocurile de reglare. O atenţie deosebită trebuie acordată alegerii variabilei intermediare care să conţină informaţii consistente despre perturbaţia dominantă ce acţionează în bucla interioară.

Structura de reglare cu model intern (Internal Model Control). În figura 1.10 se prezintă o structură de reglare cu model intern.

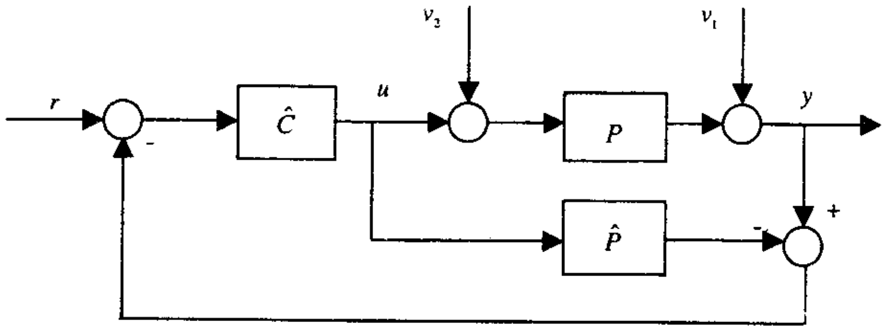


Fig. 1.10

În această structură, prin $\hat{P}$ şi $\hat{C}$ s-au notat modelele nominale pentru proces şi, respectiv, regulator, proiectat pe baza modelului nominal $\hat{P}$.

O structură echivalentă a SRA (v. fig. 1.11) se obţine dacă se introduce parametrizarea afină:

$$C := \frac{\hat{C}}{1-\hat{P}\hat{C}} \quad (1.10)$$

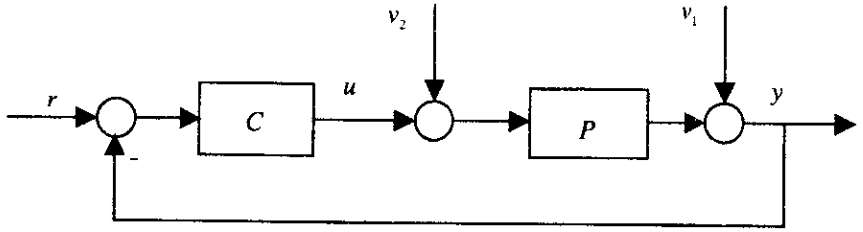


Fig. 1.11

Modelul matriceal ataşat acestui sistem se obţine înlocuind în relaţiile (1.2) expresia (1.10):

$$y_P = \frac{P\hat{C}}{1+\hat{C}\left(P-\hat{P}\right)}r - \frac{P\hat{C}}{1+\hat{C}\left(P-\hat{P}\right)}v_1 + \frac{P\left(1-\hat{P}\hat{C}\right)}{1+\hat{C}\left(P-\hat{P}\right)}v_2$$

$$u = \frac{\hat{C}}{1+\hat{C}\left(P-\hat{P}\right)}r - \frac{\hat{C}}{1+\hat{C}\left(P-\hat{P}\right)}v_1 - \frac{P\hat{C}}{1+\hat{C}\left(P-\hat{P}\right)}v_2 \quad (1.11)$$

$$\varepsilon = \frac{1-\hat{P}\hat{C}}{1+\hat{C}\left(P-\hat{P}\right)}r - \frac{1-\hat{P}\hat{C}}{1+\hat{C}\left(P-\hat{P}\right)}v_1 - \frac{P\hat{C}}{1+\hat{C}\left(P-\hat{P}\right)}v_2$$

sau

$$\tilde{y} = H_5 \cdot w$$

unde matricea H_5 are forma:

$$H_5 = \left[1+\hat{C}\left(P-\hat{P}\right)\right]^{-1} \begin{bmatrix} P\hat{C} & -P\hat{C} & P\left(1-\hat{P}\hat{C}\right) \\ \hat{C} & -\hat{C} & -P\hat{C} \\ 1-\hat{P}\hat{C} & -\left(1-\hat{P}\hat{C}\right) & -P\hat{C} \end{bmatrix} \quad 1.12)$$

În cazul în care $\hat{P} \equiv P$, rezultă o formă simplificată a matricei H_5. De remarcat faptul că abaterea modelului nominal faţă de modelul real al procesului joacă un rol important în structura modelului (1.12). În cazul în care incertitudinea de modelare $L_A = P - \hat{P}$ este egală cu zero, se pot calcula relaţiile:

$$y = P\hat{C} \cdot r = T \cdot r$$
$$\varepsilon = \left(1-P\hat{C}\right) \cdot r = S \cdot r \quad (1.13)$$

care evidenţiază posibilitatea de a calcula simplu funcţia de sensibilitate S a SRA şi complementara acesteia, T. Problematica parametrizării afine şi a proiectării regulatoarelor în acest caz este prezentată în § 6.8.

De remarcat faptul că în lipsa incertitudinilor ($L_A = 0$) sistemul de reglare este în circuit deschis având un singur grad de libertate, iar performanţele sunt determinate de structura funcţiei T ($T = P\hat{C}$).

Structuri de SRA adaptive. În condiţiile în care informaţia apriorică despre proces este săracă, incertitudinile de modelare a procesului sunt semnificative, se poate adopta o structură de reglare adaptivă, organizată pe mai multe niveluri ierarhice. În cadrul unor structuri de reglare adaptive se includ funcţii suplimentare care asigură completarea informaţiei despre proces, proiectarea on – line a regulatorului pe baza modelului matematic identificat al procesului şi elaborarea comenzii adaptive care asigură compensarea incertitudinilor parametrice.

În figura 1.12 se prezintă structura standard a unui sistem adaptiv cu identificarea modelului procesului.

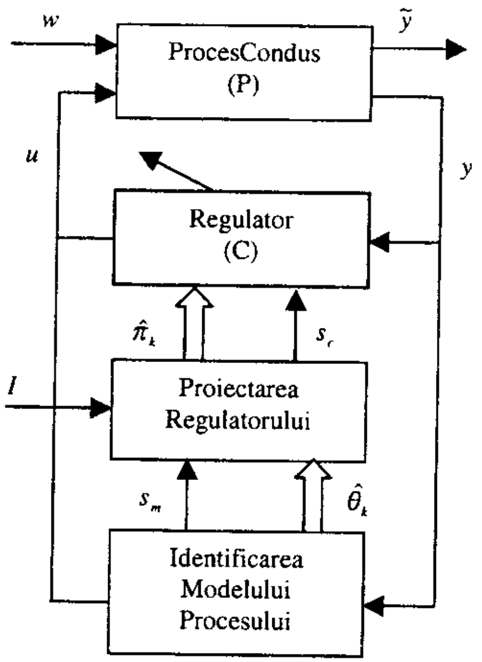


Fig. 1.12

În această structură se evidenţiază setul de parametri estimaţi $\hat{\theta}_k$ ai modelului procesului, setul de parametri calculaţi $\hat{\pi}_k$ ai regulatorului şi criteriul de performanţă I, utilizat pentru proiectarea regulatorului. Prin comenzile s_m şi s_c se evidenţiază posibilitatea de a selecta un model al procesului (s_m) dintr-o clasă apriori definită pentru caracterizarea procesului condus sau/şi un algoritm de conducere dintr-o bibliotecă de algoritmi potenţiali pentru conducerea procesului.

Structurile evoluate de sisteme adaptive includ şi un al treilea nivel de supervizare (v. fig. 1.12). Problematica analizei şi proiectării sistemelor adaptive este prezentată în capitolul al XI-lea.

Este evident că problema centrală a oricărui SRA, indiferent de structura selectată o constituie algoritmul de conducere, strategia de conducere a procesului. Dacă traductoarele reprezintă „ochii" SRA, iar elementele de execuţie „muşchii", în mod natural, în acelaşi sens figurativ, regulatorul reprezintă „creierul" SRA. Proiectarea algoritmului şi operaţionalizarea acestuia pe un suport hardware reprezintă, într-adevăr, sarcina cea mai importantă a inginerului automatist. În funcţie de complexitatea procesului, de cerinţele de performanţă impuse SRA, de clasa

de perturbaţii ce acţionează asupra procesului, pot rezulta algoritmi cu diferite grade de complexitate.

În cele ce urmează, vom considera algoritmul de reglare (conducere) sub forma unei relaţii liniare sau neliniare între variabilele de comandă u şi mărimile ce definesc informaţia funcţională a sistemului $x_f(t)$ şi parametrii structurali $\pi(t)$:

$$u(t)=F\left(x_f(t),\pi(t)\right).$$

Modalităţile de realizare a funcţiei F conduc la structuri cu diferite grade de libertate şi performanţe definite în raport cu diferitele categorii de mărimi exogene ce acţionează asupra obiectului condus.

Perturbaţii şi incertitudini. Procesele reale sunt supuse acţiunii perturbaţiilor, iar modelarea lor, de cele mai multe ori, se realizează cu incertitudini. Abilitatea proiectantului de SRA poate conduce la soluţii de SRA cu ridicată robusteţe la incertitudinile de modelare şi insensibilitate, în raport cu perturbaţiile.

Desigur, analiza tuturor factorilor ce pot interveni în adoptarea unei soluţii de automatizare a unui proces industrial urmăreşte optimizarea soluţiei, compatibilitatea cu cerinţele specifice de mediu şi, nu în ultimul rând, asigurarea unor costuri cat mai reduse. Analiza cost-beneficiu a oricărei soluţii de automatizare trebuie să se constituie printre problemele majore ce trebuie rezolvate de proiectantul de SRA.

Rezultatele acestei analize pot conduce la modificări în strategia de proiectare a sistemului de reglare automată, care, aşa cum s-a menţionat, reprezintă un proces iterativ şi interactiv.

Tratarea sistematică a problemelor de modelare a procesului condus, de alegere, dimensionare şi poziţionare a traductoarelor şi elementelor de execuţie, de selecţie a structurilor SRA şi de proiectare a algoritmilor, de simulare şi testare a algoritmilor proiectaţi şi de implementare a acestora pe un suport hardware performant precum şi de realizare a soluţiei de automatizare pe procesul industrial, de analiză a performanţelor obţinute în mediu real, reprezintă în esenţa, etapele dezvoltării unei aplicaţii de automatizare a proceselor industriale.

În lucrare se încearcă o prezentare a principalelor tehnici şi proceduri, care permit dezvoltarea şi implementarea unor soluţii de automatizare cu accent pe problematica reglării automate.

1.3. Tendințe în automatizarea proceselor industriale

Nivelul de automatizare a oricărui proces reprezintă un indicator sintetic al calității, productivității și eficienței. Cu cât procesele sunt mai complexe, cu atât automatizarea lor devine o necesitate și o cerință a menținerii în sfera de competiție în care se află producția de bunuri specifice. Automatizarea se extinde cu un ritm alert de la proces la întreprindere, asigurându-se performanțe globale prin integrarea conceptelor și a mijloacelor de automatizare, în vederea creșterii profitului, a productivității și producției de calitate. Competiția globală impune noi cerințe proceselor și întreprinderilor industriale vizând competitivitatea, succesul de piață și capacitatea de adaptare rapidă la cerințele pieței. Într-un asemenea context, rezistă cei care-și propun să evolueze și nu cei care-și propun să supraviețuiască. O asemenea abordare presupune a considera, în adoptarea soluțiilor, cele mai avansate rezultate din domeniul tehnologiei informaticii și ingineriei, din domeniul comunicațiilor și al automaticii.

Structurile distribuite de conducere cu integrarea procesoarelor de mare viteză, a microcontrolerelor și a automatelor programabile se constituie într-o direcție reală de dezvoltare a aplicațiilor în conducere în timp real a proceselor. Utilizarea facilităților de comunicații oferite de magistralele standardizate FIELDBUS și PROFIBUS, precum și a facilitaților de comunicație oferite de INTERNET și INTRANET, poate conduce la creșterea performanțelor sistemelor complexe de conducere.

Rezultatele semnificative din domeniul tehnologiei informației și comunicațiilor sunt însoțite de rezultate remarcabile din domeniul teoriei conducerii, care furnizează concepte, proceduri, metode avansate de sinteză a strategiilor de conducere, atât în domeniul liniar, cât și în cel neliniar.

Dezvoltarea de dispozitive inteligente (senzori, elemente de execuție) prin integrarea conceptelor hardware și software în structuri avansate de echipamente, deschide noi direcții în domeniul realizării echipamentelor de automatizare inteligente.

Progresele obținute în domeniul inteligenței artificiale, al metodologiilor inteligente de conducere, conduc în mod firesc spre o nouă generație de sisteme de conducere cu autonomie ridicată.

Integrarea resurselor hardware performante și a pachetelor software cu facilități de prelucrare paralelă în timp real reprezintă o direcție importantă în dezvoltarea noilor generații de echipamente și sisteme de conducere inteligente.

2. MODELE MATEMATICE ALE OBIECTELOR CONDUSE

2.1. Problematica modelării și identificării proceselor

Așa cum s-a menționat în capitolul precedent, vom defini drept obiect condus sau procesul generalizat ansamblul format din instalația tehnologică, elementele de execuție și traductoare.

Mărimile de intrare sunt reprezentate prin comanda u și vectorul mărimilor exogene notat prin $w=[v,r]^T$, ce conțin, atât mărimile perturbatoare $v(t)$, cât și referințele $r(t)$, iar mărimile de ieșire sunt variabilele măsurate $y(t)$ și mărimile de calitate $\tilde{y}(t)$, așa cum se arată în figura 2.1.

De menționat că, pentru procese cu mai multe intrări și mai multe ieșiri, operăm cu vectori de intrare și vectori de ieșire ($y(t)\in\Re^p$ și $u(t)\in\Re^m$, dacă procesul are m comenzi și p ieșiri măsurate).

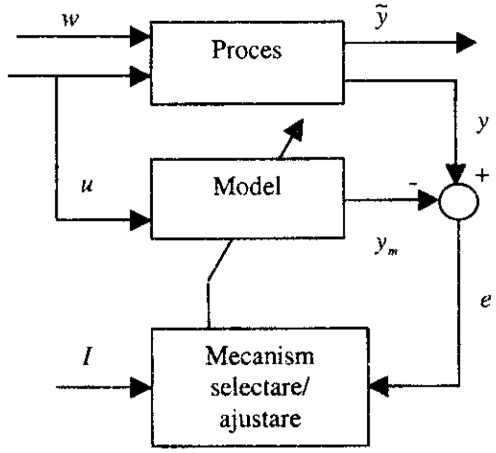


Fig. 2.1

Activitatea de modelare matematică a fenomenelor şi a proceselor din natură reprezintă una dintre cele mai vechi preocupări ale omului. A modela procese, obiecte naturale, sisteme înseamnă de fapt a determina un set de relaţii între variabilele fizice specifice, sub forma unor structuri matematice de tipul ecuaţiilor algebrice, al ecuaţiilor diferenţiale sau al sistemelor de ecuaţii diferenţiale ş.a. Astfel, prin determinarea unui model matematic al unui proces se urmăreşte obţinerea unei caracterizări cantitative a funcţionării acestuia cât mai apropiată de realitate.

Pentru determinarea modelelor matematice asociate unor procese (obiecte fizice) se utilizează o combinaţie adecvată de procedee teoretice şi experimentale, a căror succesiune este determinată de scopul modelării şi de caracteristicile sistemului supus modelării. Modelele matematice utilizate pentru caracterizarea proceselor pot fi structurale sau sintetice. Parametrii unui model structural au o interpretare structurală naturală, vor fi determinaţi de legile fizice specifice. Modelele sintetice nu sunt bazate pe legile fizice ce caracterizează procesul.

O modelare eficientă presupune satisfacerea următoarelor trei cerinţe:

- universalitatea (se poate aplica modelelor tuturor obiectelor ce fac parte dintr-o clasă de interes);
- număr limitat de parametri;
- identificabilitatea parametrilor.

Pot fi constituite pentru diferite clase de procese diverse tipuri de modele matematice: modele continue sau discrete; modele variante în timp sau invariante în timp; modele dinamice liniare sau neliniare; modele cu o intrare şi o ieşire sau cu mai multe intrări şi ieşiri; modele parametrice sau neparametrice; modele deterministe sau stocastice; modele cu parametri concentraţi sau modele cu parametri distribuiţi; modele fuzzy sau non-fuzzy; modele verbale sau neverbale.

De remarcat faptul că un model poate fi caracterizat prin mai mulţi descriptori dintre cei menţionaţi.

În mai multe cazuri, în funcţie de scopul urmărit, este suficient a avea un model care este valabil numai într-un punct de lucru. În acest caz, liniarizarea poate conduce la un model mai simplu şi mai util.

Determinarea modelelor matematice pentru procese date este posibilă pe cale analitică sau pe cale experimentală. În primul caz, modelul matematic se „construieşte" pe baza legilor fizice care generează dinamica procesului. Identificarea experimentală presupune construirea modelului matematic pe baza prelucrării datelor funcţionale (intrări-ieşiri) asociate procesului.

Pentru obţinerea unui model matematic pe cale analitică, se impune parcurgerea următoarelor etape:

1. Stabilirea conexiunilor procesului cu mediul înconjurător, a ipotezelor simplificatoare asupra sistemului, ipoteze care reduc efortul de analiză.
2. Stabilirea ecuaţiilor de bilanţ pentru masele, energiile şi impulsurile care apar în cadrul sistemului. Scrierea acestor ecuaţii se face pentru componentele sistemului sau pentru întregul sistem, evidenţiindu-se elemente acumulatoare şi disipatoare de energie în structura acestuia. Ecuaţiile de bilanţ, care reflectă variaţii ale acumulărilor, reprezintă ecuaţii diferenţiale, acestea fiind ecuaţii de stare ale sistemului.
3. Stabilirea ecuaţiilor de stare fizico-chimice.
4. Stabilirea ecuaţiilor fenomenologice, în cazul proceselor ireversibile (procese de propagare a căldurii, procese de difuzie, reacţii chimice).
5. Finisarea (prelucrarea, simplificarea) modelului teoretic. Modelul teoretic al procesului obţinut sub forma unor ecuaţii ordinare şi/sau cu derivate parţiale, de cele mai multe ori fiind deosebit de complex şi inutilizabil pentru aplicaţii inginereşti, este supus unor simplificări, cum ar fi:

- liniarizarea ecuaţiilor neliniare cu derivate parţiale, atunci când funcţionarea procesului are loc în vecinătatea unui punct nominal;
- aproximarea prin ecuaţii diferenţiale ordinare a ecuaţiilor cu derivate parţiale;
- reducerea ordinului ecuaţiilor diferenţiale ordinare.

Simplificarea modelului analitic este posibilă apelând la ipoteze simplificatoare adecvate chiar în prima etapă a elaborării modelului. Modelul analitic, chiar dacă nu poate fi utilizat în forma finală, sistemul de ecuaţii obţinut nu poate fi rezolvat explicit, furnizează informaţii utile asupra structurii sale, informaţii ce pot fi utilizate în cadrul analizei experimentale (identificării).

Identificarea proceselor îşi propune determinare modelului matematic pe baza măsurărilor efectuate asupra variabilelor ce caracterizează evoluţia sa într-un anumit regim de funcţionare. Pe baza informaţiilor apriori despre proces, măsurările efectuate asupra variabilelor de intrare şi de ieşire din proces permit a determina, printr-o procedură de identificare, legăturile dintre variabilele măsurate.

Modelele obţinute prin identificare (prelucrarea datelor experimentale) au următoarele proprietăţi, în contrast cu modelele obţinute prin modelare matematică:

- au validitate limitată pentru un punct de lucru precizat, un anumit tip de intrare şi un anumit proces;

– au o semnificaţie fizică redusă, parametrii modelelor nu au semnificaţii fizice directe;

– modelele sunt relativ uşor de construit şi de utilizat.

Modelele obţinute în urma analizei teoretice şi experimentale pot fi comparate, eventualele neconcordanţe eliminându-se prin refacerea unor etape parcurse în procesul de construcţie a modelului analitic sau experimental.

În funcţie de scopul urmărit, se poate alege fie modelul teoretic, fie modelul obţinut prin identificare. Modelul teoretic (analitic) reprezintă legătura funcţională dintre mărimile fizice ale procesului şi parametrii săi, fiind utilizat în condiţiile în care se cunosc suficiente elemente legate de legile care caracterizează comportarea sa dinamică sau dacă trebuie simulată comportarea sistemului. Modelul experimental conţine ca parametri valori numerice a căror legătură funcţională cu datele fizice rămâne necunoscută, fiind un model sintetic.

Pentru determinarea modelului unui sistem nu se poate utiliza exclusiv unul dintre procedeele de analiză teoretică sau experimentală, ci o combinaţie adecvată de procedee teoretice şi experimentale, succesiunea acestora fiind determinată în special de scopul modelării şi de particularităţile sistemului şi informaţia iniţială disponibilă.

În figura 2.1 se prezintă o schemă de principiu ce ilustrează modul de obţinere a unui model matematic apelând la ambele metode [89].

Astfel, pentru un proces dat, prin analiza teoretică se determină o structură a modelului matematic, iar printr-o procedură de identificare se ajustează parametrii modelului pentru a obţine aceeaşi comportare intrare-ieşire ca a procesului real.

Identificarea sistemelor reprezintă un proces iterativ, în care se utilizează o combinaţie adecvată de procedee teoretice şi experimentale, a căror succesiune este determinată de rezultatele care se obţin pe parcurs şi de scopul urmărit în construcţia modelului. Modelele obţinute în urma identificării pot fi utilizate pentru:

- cunoaşterea mai bună a evoluţiei procesului;
- verificarea şi validarea modelelor teoretice;
- predictarea evoluţiei unor variabile din proces;
- optimizarea proceselor în regim staţionar şi dinamic;
- sinteza sistemelor de reglare şi conducere a proceselor.

În funcţie de precizia modelului, de gradul de adecvanţă al acestuia la realitate, de domeniul de valabilitate al acestuia depind performanţele sistemelor de conducere sintetizate pe baza modelelor matematice ale proceselor.

În figura 2.2 se prezintă etapele principale ale identificării [89].

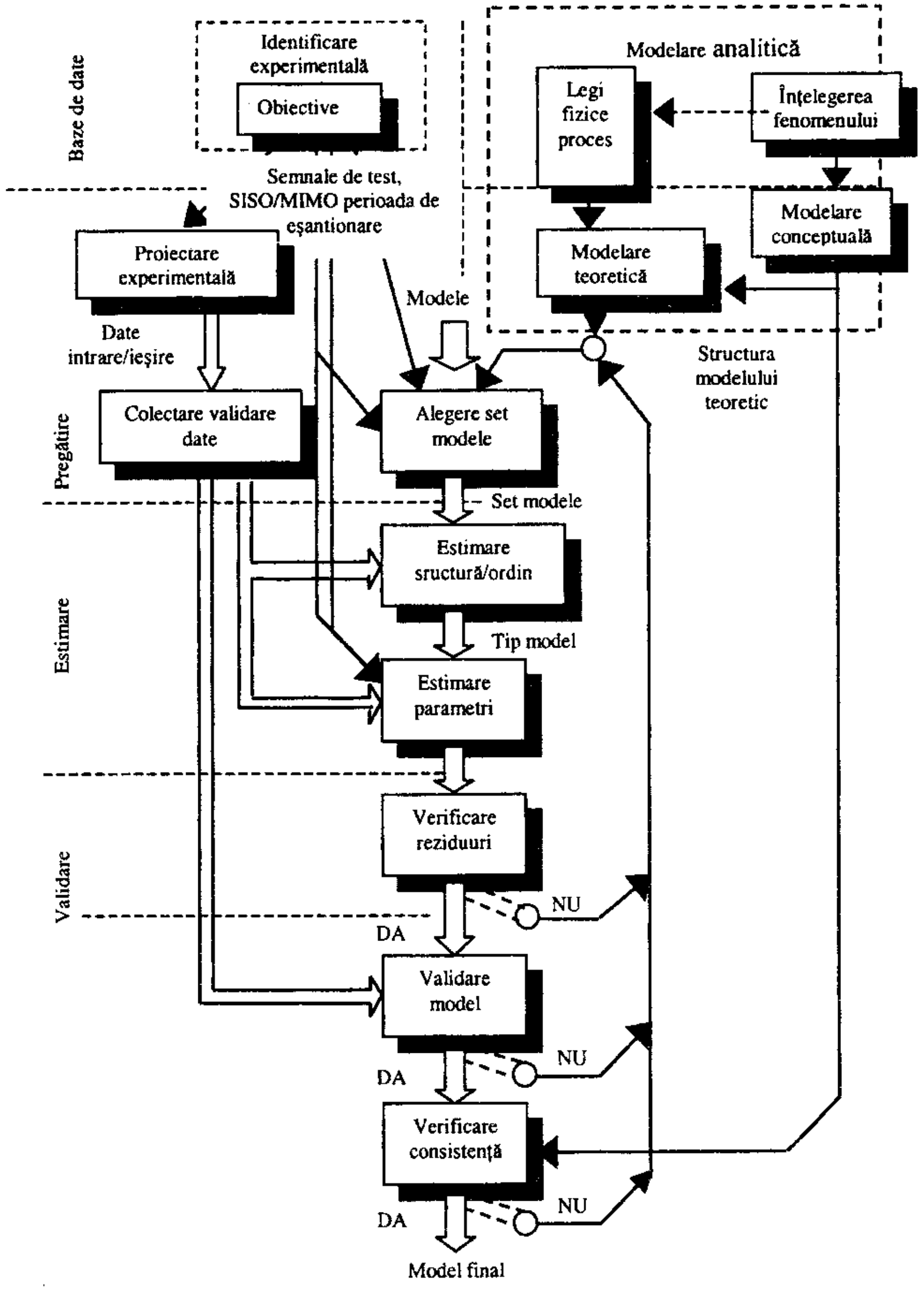


Fig. 2.2

În faza inițială a identificării procesului se impune a se delimita interacțiunile cu mediul, intrările măsurabile, perturbațiile ce acționează asupra procesului, asigurându-se astfel cunoașterea fenomenului.

Caracterizarea modelului presupune a selecta din mulțimea de caracterizări posibile acea caracterizare care definește cât mai veridic comportarea procesului, cu luarea în considerație a unor simplificări, a eliminării unor situații nerelevante pentru proces. Alegerea unei caracterizări de tipul: liniar, continuu, invariant, liniar în parametri, monovariabil, cu parametri concentrați, determinist etc., cu perechile lor, implică o bună cunoaștere apriorică a sistemului.

Obiectivele identificării sunt de o deosebită importanță în construcția modelului matematic. În funcție de obiectivele impuse se alege tipul modelului, gradul de complexitate al acestuia, particularitățile semnalelor de test, dacă se impune utilizarea unor asemenea semnale externe pentru excitarea procesului.

Cu aceste elemente primare se poate trece la *proiectarea experimentului*, în vederea stabilirii semnalelor de intrare, validării și corectării acestora pentru a fi utilizate optim în cadrul procedurii propriu-zise de identificare.

Alegerea setului de modele reprezintă fără îndoială cea mai importantă și cea mai dificilă etapă în cadrul procedurii de identificare. Această etapă presupune utilizarea eficientă apriori a cunoștințelor despre proces, intuiția inginerească și experiența proiectantului completate cu proprietățile formale ale modelelor și metodelor de identificare în scopul determinării clasei reprezentative de modele pentru procesul supus identificării.

Pe baza datelor obținute prin măsurare și dispunând de setul de modele fixat, se poate trece la determinarea modelului, care presupune determinarea structurii și a parametrilor acestuia, apelând la o anumită procedură de estimare.

Ultima etapă a identificării o reprezintă validarea modelului, verificându-se dacă întreaga informație conținută în datele de intrare-ieșire se regăsește în model, dacă există concordanță între model și informațiile disponibile asupra sistemului (consistența).

Identificarea obiectului apelând la proceduri de prelucrare a informațiilor funcționale, intrări și ieșiri (comenzile u și variabile măsurate y din proces) impun utilizarea reprezentării obiectului condus ca sistem cu intrarea u și ieșirea y, variabile măsurabile.

O altă abordare a construcției modelului matematic, condiționată de separabilitate, presupune descompunerea „obiectului condus" în cele trei componente și evidențierea unor modele matematice pentru elementul de execuție, instalația tehnologică și traductor, ținând seama de particularitățile fiecărei componente și de faptul că sunt interconectate în serie.

2.2. Modele intrare – stare – ieșire

Pentru obținerea modelului matematic atașat procesului condus pot fi utilizate tehnici de modelare analitică și tehnici de identificare experimentală. În cazul utilizării metodelor analitice, modelele matematice se obțin prin aplicarea legilor ce descriu funcționarea procesului (legea conservării masei, legea conservării energiei etc) ținând seama de particularitățile fiecărui proces. În general, modelele matematice obținute pe cale analitică sunt modele complexe, neliniare și cel mai adesea variabile în timp.

În funcție de scopul urmărit prin construcția modelului matematic, pe baza unor ipoteze simplificatoare, se pot obține modele mai simple, însă cu o acuratețe mai redusă. În general, în rezolvarea problemelor de proiectare a strategiei de conducere a unui proces se apelează la modele simplificate, deși ușor imprecise.

Utilizarea unor asemenea modele, pe lângă faptul că acestea pot fi manipulate, conduce la soluții implementabile cu costuri acceptabile.

Astfel, o primă problemă inginerească în proiectarea soluțiilor de automatizare rezidă în adoptarea unui model matematic al procesului condus, adecvat realității, dar suficient de simplu pentru a putea fi utilizat. Se cere astfel un compromis *complexitate-precizie.*

Prin identificarea experimentală, se obțin modele a căror adecvare este asigurată prin setul de mărimi funcționale atașate procesului pe un orizont de timp precizat. Astfel, se alege acel model matematic care asigură cea mai bună aproximare a comportării procesului descrisă prin măsurătorile efectuate asupra variabilelor de intrare și de ieșire.

Pentru proiectarea SRA pot fi folosite diferite categorii de modele dintre care cele mai utilizate sunt modelele matematice *parametrice* și *neparametrice*, modele de tipul *intrare-ieșire* și modele de tipul *intrare-stare-ieșire*.

Forma cea mai generală a modelului matematic atașat unui proces este modelul de stare:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t),u(t),w(t),t) \\ y(t) &= g(x(t),u(t),w(t),t) \qquad x(t_0)=x_0 \in \Re^n \\ \tilde{y}(t) &= h(x(t),u(t),\ t) \end{aligned} \tag{2.1}$$

unde:

- $x(t) \in \Re^n$ reprezintă vectorul de stare a sistemului;
- $u(t) \in \Re^m$ reprezintă vectorul mărimilor de comandă;
- $y(t) \in \Re^p$ reprezintă vectorul variabilelor măsurate din proces;

- $\tilde{y}(t) \in \Re^q$ reprezintă vectorul variabilelor de calitate ;
- $w(t) \in \Re^l$ reprezintă vectorul mărimilor exogene ce acționează asupra procesului;
- $x_0 = x(t_0)$ reprezintă valoarea lui $x(t)$ la timpul inițial $t = t_0 \geq 0$.

Variabilele de stare reprezintă o mulțime completă de variabile interne a cărei cunoaștere la un moment de timp permite a calcula ieșirea $y(t)$ ca o funcție de variabilele de stare și de variabilele prezente și viitoare ale intrărilor și de a estima tendința de evoluție a sistemului la momentul curent.

Funcțiile f, g și h sunt funcții vectoriale neliniare. Este evident că utilizarea acestui model pentru proiectare este dificilă, dacă nu chiar imposibilă, pentru multe aplicații.

În cazul în care funcțiile f și g sunt funcții ce pot fi liniarizate, se obține un model simplificat de forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u \qquad x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u \end{aligned} \tag{2.2}$$

dacă vom considera numai comanda $u(t)$ ca intrare și $y(t)$ ca mărimi de ieșire.

Matricele $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ și $D(t)$ cu elemente variabile în timp au dimensiuni corespunzătoare pentru cazul multivariabil:

$$A(t) \in \Re^{n \times n},\ B(t) \in \Re^{n \times m},\ C(t) \in \Re^{n \times p} \text{ și } D(t) \in \Re^{p \times m}.$$

În cazul în care funcțiile f și g sunt liniare și invariante în timp, se poate simplifica modelul și se obține un model invariant în timp, sub forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \qquad x(t_0) = x_0 \in \Re^n \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{2.3}$$

unde matricele A, B, C și D au aceleași dimensiuni ca în cazul anterior, însă au toate componentele constante.

Un asemenea model liniar invariant în timp se obține dacă modelul neliniar definit prin funcțiile f și g:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t), u(t)) \end{aligned} \tag{2.4}$$

este liniarizat.

Spunem că $\{x_s(t), u_s(t), y_s(t); t \in \Re\}$ este o mulțime de traiectorii care satisfac ecuațiile de mai sus, dacă:

$$\begin{aligned} \dot{x}_s(t) &= f(x_s(t), u_s(t)) \\ y_s(t) &= g(x_s(t), u_s(t)) \end{aligned};\ x_s(t_0) = x_{s_0} \in \Re^n \tag{2.5}$$

Traiectoria $\{x_s(t), u_s(t), y_s(t); t \in \Re\}$ poate corespunde la un punct de echilibru al modelului de stare. În acest caz x_s, u_s, y_s nu va depinde de timp și (x_s, y_s) va satisface $\dot{x}_s = 0$, adică $f(x_s, u_s) = 0$.

Pentru a descrie o traiectorie $\{x(t), u(t), y(t); t \in \Re\}$ cât mai aproape de traiectoria $\{x_s(t), u_s(t), y_s(t); t \in \Re\}$ folosim dezvoltarea în serie Taylor sub forma [46]:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &\cong f(x_s, u_s) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_s \\ u=u_s}} \cdot (x(t) - x_s) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_s \\ u=u_s}} \cdot (u(t) - u_s) + \cdots \\ y(t) &\cong g(x_s, u_s) + \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_s \\ u=u_s}} \cdot (x(t) - x_s) + \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_s \\ u=u_s}} \cdot (u(t) - u_s) + \cdots \end{aligned} \tag{2.6}$$

Derivatele funcțiilor vectoriale f și g sunt evaluate la traiectoria nominală, iar matricele $\frac{\partial f}{\partial x}$ și $\frac{\partial f}{\partial u}$ sunt constante, având elementele ij de forma $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$.

Dacă notăm $\Delta x(t) = x(t) - x_s(t)$, $\Delta u(t) = u(t) - u_s(t)$ obținem un model liniar în incremente sub forma:

$$\begin{aligned} \Delta\dot{x}(t) &= A\Delta x(t) + B\Delta u(t) \\ \Delta y(t) &= C\Delta x(t) + D\Delta u(t) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Astfel, se obține un model liniar în componentele incrementale ale intrărilor și ieșirilor alese în jurul unui punct de funcționare (model valabil pentru abateri reduse în jurul acestui punct de funcționare).

În acest caz, matricele A, B, C și D sunt calculate astfel:

$$\begin{aligned} A &= \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_s \\ u=u_s}};\ B = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_s \\ u=u_s}} \\ C &= \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_s \\ u=u_s}};\ D = \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_s \\ u=u_s}} \end{aligned} \tag{2.8}$$

și nu depind de timp.

O altă formă a modelului (2.7) este:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + E \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + F \end{aligned} \tag{2.8'}$$

unde matricele E și F au forma:

$$E = f(x_s, u_s) - \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_s \\ u=u_s}} \cdot x_s - \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_s \\ u=u_s}} \cdot u_s$$

- $\tilde{y}(t) \in \Re^q$ reprezintă vectorul variabilelor de calitate ;
- $w(t) \in \Re^l$ reprezintă vectorul mărimilor exogene ce acționează asupra procesului;
- $x_0 = x(t_0)$ reprezintă valoarea lui $x(t)$ la timpul inițial $t = t_0 \geq 0$.

Variabilele de stare reprezintă o mulțime completă de variabile interne a cărei cunoaștere la un moment de timp permite a calcula ieșirea $y(t)$ ca o funcție de variabilele de stare și de variabilele prezente și viitoare ale intrărilor și de a estima tendința de evoluție a sistemului la momentul curent.

Funcțiile f, g și h sunt funcții vectoriale neliniare. Este evident că utilizarea acestui model pentru proiectare este dificilă, dacă nu chiar imposibilă, pentru multe aplicații.

În cazul în care funcțiile f și g sunt funcții ce pot fi liniarizate, se obține un model simplificat de forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u \qquad x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u \end{aligned} \tag{2.2}$$

dacă vom considera numai comanda $u(t)$ ca intrare și $y(t)$ ca mărimi de ieșire.

Matricele $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ și $D(t)$ cu elemente variabile în timp au dimensiuni corespunzătoare pentru cazul multivariabil:

$$A(t) \in \Re^{n \times n},\ B(t) \in \Re^{n \times m},\ C(t) \in \Re^{n \times p} \text{ și } D(t) \in \Re^{p \times m}.$$

În cazul în care funcțiile f și g sunt liniare și invariante în timp, se poate simplifica modelul și se obține un model invariant în timp, sub forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \qquad x(t_0) = x_0 \in \Re^n \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{2.3}$$

unde matricele A, B, C și D au aceleași dimensiuni ca în cazul anterior, însă au toate componentele constante.

Un asemenea model liniar invariant în timp se obține dacă modelul neliniar definit prin funcțiile f și g:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t), u(t)) \end{aligned} \tag{2.4}$$

este liniarizat.

Spunem că $\{x_s(t), u_s(t), y_s(t); t \in \Re\}$ este o mulțime de traiectorii care satisfac ecuațiile de mai sus, dacă:

$$\begin{aligned} \dot{x}_s(t) &= f(x_s(t), u_s(t)) \\ y_s(t) &= g(x_s(t), u_s(t)) \end{aligned};\ x_s(t_0) = x_{s_0} \in \Re^n \tag{2.5}$$

Traiectoria $\{x_s(t), u_s(t), y_s(t); t \in \Re\}$ poate corespunde la un punct de echilibru al modelului de stare. În acest caz x_s, u_s, y_s nu va depinde de timp și (x_s, y_s) va satisface $\dot{x}_s = 0$, adică $f(x_s, u_s) = 0$.

Pentru a descrie o traiectorie $\{x(t), u(t), y(t); t \in \Re\}$ cât mai aproape de traiectoria $\{x_s(t), u_s(t), y_s(t); t \in \Re\}$ folosim dezvoltarea în serie Taylor sub forma [46]:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &\cong f(x_s, u_s) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_s \\ u=u_s}} \cdot (x(t) - x_s) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_s \\ u=u_s}} \cdot (u(t) - u_s) + \cdots \\ y(t) &\cong g(x_s, u_s) + \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_s \\ u=u_s}} \cdot (x(t) - x_s) + \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_s \\ u=u_s}} \cdot (u(t) - u_s) + \cdots \end{aligned} \tag{2.6}$$

Derivatele funcțiilor vectoriale f și g sunt evaluate la traiectoria nominală, iar matricele $\frac{\partial f}{\partial x}$ și $\frac{\partial f}{\partial u}$ sunt constante, având elementele ij de forma $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$.

Dacă notăm $\Delta x(t) = x(t) - x_s(t)$, $\Delta u(t) = u(t) - u_s(t)$ obținem un model liniar în incremente sub forma:

$$\begin{aligned} \Delta\dot{x}(t) &= A\Delta x(t) + B\Delta u(t) \\ \Delta y(t) &= C\Delta x(t) + D\Delta u(t) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Astfel, se obține un model liniar în componentele incrementale ale intrărilor și ieșirilor alese în jurul unui punct de funcționare (model valabil pentru abateri reduse în jurul acestui punct de funcționare).

În acest caz, matricele A, B, C și D sunt calculate astfel:

$$\begin{aligned} A &= \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_s \\ u=u_s}};\ B = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_s \\ u=u_s}} \\ C &= \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_s \\ u=u_s}};\ D = \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_s \\ u=u_s}} \end{aligned} \tag{2.8}$$

și nu depind de timp.

O altă formă a modelului (2.7) este:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + E \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + F \end{aligned} \tag{2.8'}$$

unde matricele E și F au forma:

$$E = f(x_s, u_s) - \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_s \\ u=u_s}} \cdot x_s - \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_s \\ u=u_s}} \cdot u_s$$

şi

$$F = g(x_s,u_s) - \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_s \\ u=u_s}} \cdot x_s - \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_s \\ u=u_s}} \cdot u_s .$$

Spunem că (2.2) este un sistem liniar finit-dimensional variabil în timp (LTV), iar (2.3) este un sistem liniar finit-dimensional invariant în timp (LTI).

În cazul în care, în cadrul modelului se pot evidenţia variabile de stare cu dinamică mai scăzută şi, respectiv, dinamică mare, modelul matematic are forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_{11}x + A_{12}z + B_1u \\ \mu\dot{z} &= A_{21}x + A_{22}z + B_2u \\ y &= C_1x + C_2z + Du \end{aligned} \tag{2.9}$$

unde $x \in \Re^{n_1}$ şi $z \in \Re^{n_2}$ şi $\mu > 0$ iar matricele A_{ij}, B_i, C_j şi D au dimensiuni corespunzătoare.

Cu ajutorul acestui model pot fi descrise fenomene lente (dominante) şi fenomene rapide (parazite). Prin intermediul numărului μ se caracterizează valorile constantelor de timp foarte reduse ce pot fi neglijate.

Remarcăm faptul că asupra modelului iniţial (dificil de manipulat, dar cu capacitate mare de adecvare la realitate), prin ipoteze simplificatoare s-au efectuat operaţii de liniarizare, operaţii de reducere a dimensiunii prin neglijarea dinamicii fenomenelor rapide (neglijarea constantelor de timp parazite) şi s-a admis că parametrii sunt constanţi.

Astfel, dintr-un model neliniar, variabil în timp, de dimensiune mare, s-a obţinut un model liniar, invariant în timp, de dimensiune redusă.

Prin operaţiile menţionate se introduc incertitudini în caracterizarea procesului respectiv, se utilizează un model matematic cu un anumit nivel al incertitudinilor.

Pentru cazul în care procesul are o intrare şi o ieşire, modelul matematic de stare asociat în aceleaşi ipoteze $w = 0$ este:

$$\begin{aligned} x &= Ax(t) + b\,u(t) \qquad x(t_0) = x_0 \in \Re^n \\ y &= c^T x(t) \end{aligned} \tag{2.10}$$

unde matricea $A \in \Re^{n \times n}$, iar $b \in \Re^{n \times 1}$ şi $c \in \Re^{n \times 1}$. În acest model s-a considerat că nu este transmisie directă de la comandă la ieşire şi deci $d = 0$.

În cazul în care modelul de stare conţine incertitudini parametrice definite prin vectorul parametrilor necunoscuţi q, forma acestuia este:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(q)x(t) + B(q)u(t) \\ y(t) &= C(q)x(t) \end{aligned} \tag{2.11}$$

Funcţia de transfer ataşată reprezentării de stare (2.5) este definită prin relaţia:

$$Y(s) = H(s,q) \cdot U(s) \tag{2.12}$$

Dacă se reprezintă mulţimea parametrilor Q, cu $q \in Q$, se poate vorbi de o „familie de procese". În unele probleme, Q este reprezentată numai printr-un număr finit de puncte de funcţionare $q(j) \in Q$, adică:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= A^{(j)}x + B^{(j)}u \\ y &= C^{(j)}x \end{aligned}\right. \; ; \; j = 1, 2, \cdots, N \tag{2.13}$$

unde

$$A^{(j)} = A(q^j),\; B^{(j)} = B(q^j),\; C^{(j)} = C(q^j).$$

Structura modelului (2.13) este menţinută, însă setul de parametri q^j diferenţiază matricele $A^{(j)}$, $B^{(j)}$ şi $C^{(j)}$ în cazul în care nu există transmitere directă a comenzii la ieşire ($D^{(j)} \equiv 0$).

Alternativ, o familie finită de matrice de transfer se defineşte prin:

$$H^j(s) = C^{(j)}\left(sI - A^{(j)}\right)^{-1} \cdot B^{(j)},\; j = 1, 2, \cdots, N \tag{2.14}$$

Putem, astfel, vorbi de o familie finită de modele liniare ataşate obiectului condus.

2.3. Modele intrare-ieşire

Dacă un sistem este descris de ecuaţii diferenţiale liniare de forma:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0y(t) = b_m u^{(n-1)}(t) + b_{m-1}u^{(n-1)}(t) + \ldots + b_0u(t)$$

unde coeficienţii a_i, b_j, $i = 0,1,\ldots,n-1$, $j = 0,1,\ldots,m$ sunt constanţi, se poate obţine funcţia de transfer pentru condiţii iniţiale nule sub forma:

$$H_p(s) := \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0} \tag{2.15}$$

Transformata Laplace inversă $h_p(t)$ a funcţiei de transfer $H_p(s)$ este cunoscută ca răspunsul la impuls al sistemului:

$$h_p(t) := L^{-1}[H_p(s)].$$

Răspunsul forţat al sistemului se poate astfel calcula cu relaţia :

$$y(t) = h_p(t) * u(t) \tag{2.16}$$

unde semnul * denotă convoluţia.

Când $u(t)=\delta_\Delta(t)$, unde $\delta_\Delta(t)$ este funcţia delta definită ca:

$$\delta_\Delta(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{I(t)-I(t-\varepsilon)}{\varepsilon}$$

unde $I(t)$ este funcţia treaptă unitară, atunci:

$$y(t)=h_p(t)*\delta_\Delta(t)=h_p(t)$$

Astfel, când intrarea unui sistem liniar invariant în timp este o funcţie delta (cunoscută ca impuls unitar la $t=0$), ieşirea sistemului este chiar răspunsul la impuls (funcţia pondere).

Spunem că $H_p(s)$ este proprie dacă $H_p(\infty)$ este finită, adică $n\geq m$; strict proprie, dacă $H_p(\infty)=0$, adică $n>m$ şi biproprie, dacă $n=m$. Dacă $m>n$, spunem că sistemul este impropriu.

Funcţia de transfer se poate defini pornind şi de la ecuaţia de stare prin aplicarea transformatei Laplace ecuaţiilor (2.10):

$$sX(s)-x_0=AX(s)+bU(s)$$
$$Y(s)=c^TX(s) \tag{2.17}$$

sau

$$Y(s)=c^T(sI-A)^{-1}bU(s)=H_p(s)U(s)$$

unde

$$H_p(s)=c^T(sI-A)^{-1}b$$

reprezintă funcţia de transfer în cazul sistemelor monovariabile sau matricea de transfer în cazul sistemelor cu mai multe intrări şi mai multe ieşiri.

Pentru a calcula răspunsul sistemului pornind de la modelul de stare observăm că:

$$x(t)=e^{A(t-t_0)}x(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \tag{2.18}$$

iar

$$y(t)=c^Te^{A(t-t_0)}x(t_0)+\int_{t_0}^{t}c^Te^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \tag{2.19}$$

unde $e^{A(t-t_0)}=\Phi(t-t_0)$ reprezintă matricea fundamentală a sistemului.

Răspunsul liber al sistemului este

$$y_l(t)=c^T\Phi(t-t_0)x_0 \tag{2.20}$$

iar răspunsul forţat are forma

$$y_f(t)=\int_{t_0}^{t}c^Te^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \tag{2.21}$$

Dacă introducem notaţia:

$$h_p(t):=c^Te^{At}b \tag{2.22}$$

atunci (2.21) capătă forma:

$$y_f(t)=\int_{t_0}^{t}h_p(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

sau

$$y_f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h_p^c(t-\tau)u(\tau)d\tau=h_p^c*u(\tau) \tag{2.23}$$

unde $h_p^c(t)=\begin{cases}h_p(t) & pentru\ t\geq 0\\ 0 & pentru\ t<0\end{cases}$.

Astfel, răspunsul forţat al sistemului se calculează printr-o integrală de convoluţie între funcţia pondere $h_p^c(t)$ şi comanda $u(t)$.

Pentru sistemele discrete caracterizate prin ecuaţii liniare cu diferenţe [6]:

$$y_k+a_1y_{k-1}+a_2y_{k-2}+\ldots+a_ny_{k-n}=b_1u_{k-1}+b_2u_{k-2}+\ldots+b_mu_{k-m}\ , \tag{2.24}$$

prin aplicarea transformatei Z, se obţine:

$$Y(z)=\frac{b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\ldots+b_mz^{-m}}{1+a_1z^{-1}+\ldots+a_nz^{-n}}U(z) \tag{2.25}$$

Funcţia de transfer în z se defineşte ca:

$$H_p(z):=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\ldots+b_mz^{-m}}{1+a_1z^{-1}+\ldots+a_nz^{-n}} \tag{2.26}$$

unde $z^{-1}=e^{-sT}$ reprezintă întârzierea cu un tact (T este perioada de discretizare).

Dacă se cunoaşte funcţia de transfer a unui sistem, se pot obţine diferite realizări (A,b,c^T), inclusiv formele canonice. Dacă vom dispune de o reprezentare de stare (A,b,c^T), atunci cu uşurinţă se obţine funcţia de transfer:

$$H_p(s)=\frac{1}{\det(sI-A)}\cdot c^T adj(sI-A)b \tag{2.27}$$

În cele ce urmează, considerăm că funcţiile de transfer $H_p(s)$ sunt strict proprii şi, în cel mai rău caz, proprii. Cele două polinoame

$$B(s)=b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1s+b_0$$

şi

$$A(s)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1s+a_0$$

pot fi:

- polinoame monice, dacă $B(0)=A(0)=1$
- polinoame Hurwitz, dacă rădăcinile ecuaţiilor $B(s)=0$; $A(s)=0$ sunt situate în semiplanul stâng.

Un sistem cu funcţia de transfer $H_p(s)=\dfrac{B(s)}{A(s)}$ este de fază minimă dacă polinoamele $A(s)$ şi $B(s)$ sunt polinoame Hurwitz şi este stabil dacă numai $A(s)$ este Hurwitz.

Dacă cele două polinoame $A(s)$ şi $B(s)$ nu au factori comuni, adică sunt polinoame coprime, spunem că sistemul este ireductibil şi are dimensiunea minimă. Un asemenea sistem este complet controlabil şi observabil [34, 56].

Rădăcinile polinomului $B(s)=0$ reprezintă zerourile sistemului, iar rădăcinile polinomului $A(s)=0$ reprezintă polii sistemului.

Sistemele reale sunt aproape totdeauna strict proprii. Unele metode de proiectare a regulatoarelor conduc la funcţii de transfer biproprii sau chiar improprii. Pentru a fi implementate asemenea legi de reglare, se introduc factori suplimentari la numitorul funcţiei de transfer, astfel selectaţi încât efectul lor să fie neglijabil (se introduc poli reali simpli, de regulă strict negativi, cât mai departe de origine).

Adesea, în practică, sistemele reale au o întârziere între intrare şi ieşire. Aceasta este asociată cu transportul de material de la un punct la altul.

Un element cu întârziere pură are o funcţie de transfer de forma:

$$H_p(s)=e^{-s\tau} \tag{2.28}$$

unde τ reprezintă timpul mort.

În cazul general, sistemele cu timp mort pot fi descrise prin intermediul unor modele de forma:

$$H_p(s)=\frac{B(s)}{A(s)}\cdot e^{-\tau s} \tag{2.29}$$

sau

$$H_p(s)=H(s)\cdot e^{-\tau s}$$

unde $H(s)$ este o raţională proprie sau strict proprie.

Astfel, o realizare minimală corespunde unei funcţii de transfer care nu are poli-zerouri comuni care să se compenseze, adică cele două polinoame $A(s)$ şi $B(s)$ ale funcţiei de transfer nu au factori comuni, altul decât o constantă.

O caracterizare importantă a faptului că cele două polinoame sunt coprime este dată prin următoarea lemă:

Lema 2.1. (Identitatea lui Bezout): Două polinoame $A(s)$ şi $B(s)$ sunt coprime dacă există polinoamele $C(s)$ şi $D(s)$, astfel ca

$$C(s)A(s)+D(s)B(s)=1 \tag{2.30}$$

Identitatea lui Bezout poate avea un număr finit de soluţii $C(s)$ şi $D(s)$ pentru o pereche dată de polinoame coprime $A(s)$ şi $B(s)$.

Această proprietate este adesea valorificată în proiectarea sistemelor de reglare automată liniare invariante în timp. O teoremă importantă, frecvent folosită pentru proiectarea sistemelor de reglare, este următoarea:

TEOREMA 2.1.: Dacă $A(s)$ şi $B(s)$ sunt coprime, având gradele n_a, respectiv n_b, $n_a>n_b$, atunci, pentru orice polinom arbitrar dat $A^*(s)$, de grad $n_{a^*}>n_a$, ecuaţia polinomială

$$A(s)Q(s)+B(s)P(s)=A^*(s) \tag{2.31}$$

are o soluţie unică $Q(s)$ şi $P(s)$, ale căror grade n_q şi respectiv n_p satisfac restricţiile $n_p<n_a$, $n_q\le\max[n_{a^*}-n_a,\ n_b-1]$.

Demonstraţie:

Din lema 2.1 există polinoamele $C(s)$ şi $D(s)$, astfel că:

$$A(s)C(s)+B(s)D(s)=1 \tag{2.32}$$

Multiplicând ecuaţia (2.32) pe ambele părţi cu polinomul $A^*(s)$ obţinem:

$$A^*(s)A(s)C(s)+A^*(s)B(s)D(s)=A^*(s) \tag{2.33}$$

Împărţind $A^*(s)D(s)$ prin $A(s)$ se obţine:

$$\frac{A^*(s)D(s)}{A(s)}=R(s)+\frac{P(s)}{A(s)}$$

unde $R(s)$ este câtul de grad $n_{a^*}+n_d-n_a$, iar $P(s)$ este restul de grad $n_p<n_a$.

Folosind egalitatea $A^*(s)D(s)=R(s)A(s)+P(s)$, putem exprima partea dreaptă a relaţiei (2.33) sub forma:

$$A^*(s)A(s)C(s)+R(s)B(s)A(s)+P(s)B(s)=$$
$$[A^*(s)C(s)+R(s)B(s)]A(s)+P(s)B(s)$$

sau

$$Q(s)A(s)+P(s)B(s)=A^*(s) \tag{2.34}$$

unde

$$Q(s)=A^*(s)C(s)+R(s)B(s).$$

Ecuaţia de mai sus evidenţiază faptul că gradul lui $Q(s)A(s)$ este egal cu gradul lui $[A^*(s)-P(s)B(s)]\le\max\{n_a,n_p+n_b\}$. Prin urmare, gradul lui $Q(s)$, notat cu n_q, satisface condiţia $n_q\le\max\{n_{a^*}-n_a,\ n_p+n_b-n_a\}$. Astfel, s-a stabilit că polinoamele $Q(s)$ şi $P(s)$, $n_p<n_a$ există şi că satisfac (2.34).

Deoarece $n_p < n_a$, atunci $n_p \le n_a - 1$, gradul polinomului $Q(s)$, satisface de asemenea, condiția $n_q \le \max\{n_{a*} - n_a,\ n_b - 1\}$.

Pentru a arăta unicitatea polinoamelor $Q(s)$ și $P(s)$, presupunem existența a două soluții $(Q_1(s), P_1(s)), (Q_2(s), P_2(s))$ pentru (2.34), care satisfac restricțiile:

$$n_p < n_a,\ \ n_q \le \max\{n_{a*} - n_a,\ n_b - 1\}\text{, adică}$$
$$A(s)Q_1(s) + B(s)P_1(s) = A^*(s),$$
$$A(s)Q_2(s) + B(s)P_2(s) = A^*(s)\ .$$

Dacă scădem o ecuație din alta, avem:

$$A(s)[Q_1(s) - Q_2(s)] + B(s)[P_1(s) - P_2(s)] = 0\,, \tag{2.35}$$

ceea ce conduce la:

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{Q_2(s) - Q_1(s)}{P_1(s) - P_2(s)} \tag{2.36}$$

Deoarece $n_p < n_a$, ecuația (2.36) arată că $A(s)$ și $B(s)$ au factori comuni, ceea ce contravine ipotezei că $A(s)$ și $B(s)$ sunt coprimi. Astfel, $Q_1(s) = Q_2(s)$ și $P_1(s) = P_2(s)$, ceea ce demonstrează că soluțiile $Q(s)$ și $P(s)$ din (2.34) sunt unice.

Dacă nu se impun restricții asupra gradelor polinoamelor $Q(s)$ și $P(s)$, ecuația (2.31) are un număr infinit de soluții. Ecuațiile de forma (2.31) sunt cunoscute sub denumirea de *ecuații diofantice* și sunt utilizate frecvent la proiectarea algebrică a regulatoarelor pentru procese caracterizate prin modele liniare invariante în timp [46].

2.4. Parametrizarea modelelor procesului condus

Considerăm modelul de stare

$$\dot{x} = Ax + bu;\qquad x(0) = x_0$$
$$y = c^T x \tag{2.37}$$

unde $x \in \Re^n, u \in \Re^1, y \in \Re^1$ și matricele A, b, c^T au dimensiuni corespunzătoare. Tripletul (A, b, c^T) constă din $(n^2 + 2n)$ elemente care reprezintă parametrii procesului. Dacă (2.37) este într-o formă canonică, atunci n^2 elemente ale realizării (A, b, c^T) sunt fixate și au valori 0 sau 1 și astfel cel mult $2n$ elemente sunt necesare pentru a specifica proprietățile procesului. Aceste $2n$ elemente reprezintă coeficienții polinoamelor de la numărătorul și numitorul funcției de transfer.

Pornind de la (2.37), funcția de transfer are forma:

$$H_p(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} \equiv \frac{B(s)}{A(s)} \tag{2.38}$$

și, în consecință, pentru a specifica unic proprietățile intrare-ieșire ale procesului, sunt necesari $2n$ parametri. Când sunt necesari mai mulți parametri pentru caracterizarea procesului, spunem că procesul este supraparametrizat. Spre exemplu, dacă scriem ieșirea în funcție de intrare sub forma:

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \cdot \frac{\Lambda(s)}{\Lambda(s)} U(s) \tag{2.39}$$

unde $\Lambda(s)$ este un polinom stabil de grad arbitrar $n > 0$, rezultă că procesul are aceleași proprietăți ca procesul descris de (2.38), însă în modelul matematic sunt incluși mai mulți parametri. Este evident că în acest caz reprezentarea de stare a sistemului nu este minimală.

Pentru estimarea parametrilor modelului și sinteza sistemelor de reglare automată pot fi utilizate diverse parametrizări ale modelului matematic al procesului condus.

Parametrizarea 1:

Consideram (2.37) sub forma ecuației diferențiale

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = b_{n-1}u^{(n-1)} + b_{n-2}u^{n-2} + \ldots + b_0 u \tag{2.40}$$

și introducem notațiile:

$$\theta = \left[b_{n-1},\ b_{n-2},\ \ldots,\ b_0\ \ a_{n-1},\ a_{n-2},\ \ldots, a_0\right]^T \text{ – vectorul parametrilor}$$

și

$$\varphi = \left[u^{(n-1)},\ u^{(n-2)},\ \ldots,\ u,\ -y^{(n-1)},\ -y^{(n-2)},\ \ldots, -y\right]^T = \left[\alpha_{n-1}^T(s)u,\ -\alpha_{n-1}^T(s)\ y\right]^T,$$

unde $\alpha_i(s) := \left[s^i, s^{i-1},\ \ldots,\ 1\right]^T$.

Cu aceste notații putem scrie (2.40) sub forma compactă

$$y^{(n)} = \theta^T \cdot \varphi \tag{2.41}$$

Ecuația (2.41) este liniară în parametri, fiind deosebit de importantă pentru proiectarea estimatoarelor de parametri.

În cazul discret, pe baza ecuației cu diferențe, obținem aceeași **reprezentare**, cu observația că φ are forma:

$$\varphi_{n-1} = \left[u_{k-1}, u_{k-2}, ..., u_{k-n}, -y_{k-1}, -y_{k-2}, ..., -y_{k-n}\right]^T =$$
$$= \left[\alpha_{n-1}^T\left(q^{-1}\right)u, \ -\alpha_{n-1}^T\left(q^{-1}\right) \ y\right]^T$$

unde $\alpha_i\left(q^{-1}\right) = \left[q^{-1}, q^{-2}, ..., q^{-n}\right]^T$, iar q^{-1} reprezintă operatorul de întârziere ($q^{-1}u_k = u_{k-1}$) și, prin urmare,

$$y_k = \theta^T \cdot \varphi_{k-1}.$$

Dacă folosim reprezentarea (2.41), pentru a evita utilizarea semnalelor $y^{(n)}$ și φ, se poate utiliza un filtru stabil de ordinul n $\frac{1}{\Lambda(s)}$ și obținem o nouă reprezentare:

$$Z = \theta^T \phi, \tag{2.42}$$

unde: $Z := \frac{1}{\Lambda(s)} y^{(n)} \to Z = \frac{s^n}{\Lambda(s)} y.$

$$\phi := \left[\frac{\alpha_{n-1}^T(s)}{\Lambda(s)} u, \ -\frac{\alpha_{n-1}^T(s)}{\Lambda(s)} y\right]^T$$

și $\Lambda(s) = s^n + \lambda_{n-1}s^{n-1} + ... + \lambda_0$ este un polinom în s, arbitrar, Hurwitz.

Este clar că semnalul scalar Z și vectorul ϕ pot fi generate fără utilizarea diferențiatoarelor prin filtrarea intrării u și y cu filtre stabile proprii de forma:

$$\frac{s^i}{\Lambda(s)}, \quad i = 0, 1, ..., n.$$

Astfel, putem exprima $\Lambda(s)$ sub forma:

$$\Lambda(s) = s^n + \lambda^T \alpha_{n-1}(s)$$

unde $\lambda = \left[\lambda_{n-1}, \lambda_{n-2}, ..., \lambda_0\right]^T$ și

$$Z = \frac{s^n}{\Lambda(s)} y = \frac{\Lambda(s) - \Lambda^T \alpha_{n-1}(s)}{\Lambda(s)} y = y - \lambda^T \frac{\alpha_{n-1}(s)}{\Lambda(s)} y, \text{ iar}$$

$$y = Z + \lambda^T \frac{\alpha_{n-1}(s)}{\Lambda(s)} y.$$

Deoarece $Z = \theta^T \phi = \theta_1^T \phi_1 + \theta_2^T \phi_2$, unde:

$$\theta_1 := \left[b_{n-1}, b_{n-2}, ..., b_0\right]^T, \quad \theta_2 := \left[a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_0\right]^T$$

$$\phi_1 := \frac{\alpha_{n-1}(s)}{\Lambda(s)} u, \quad \phi_2 := -\frac{\alpha_{n-1}(s)}{\Lambda(s)} y$$

se obține y sub forma:

$$y = \theta_1^T \phi_1 + \theta_2^T \phi_2 - \lambda^T \phi_2 \text{ sau}$$
$$y = \theta_\Lambda^T \cdot \phi, \tag{2.43}$$

unde:

$$\theta_\Lambda = \left[\theta_1^T, \ \theta_2^T, \ -\Lambda^T\right]^T.$$

Ecuațiile (2.42) și (2.43) sunt reprezentate sub forma schemei bloc în figura 2.3.

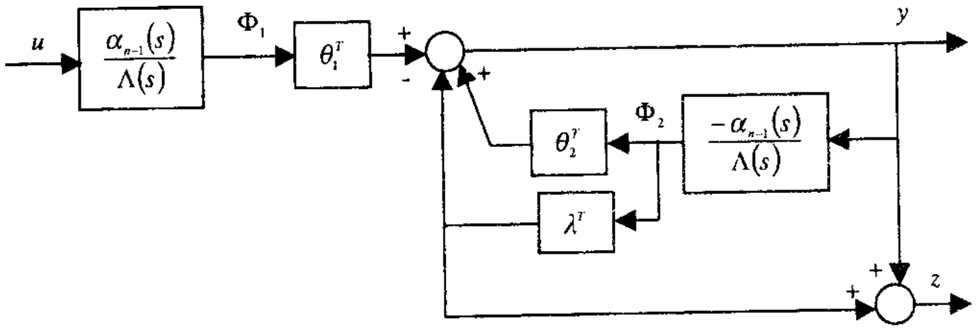


Fig. 2.3

Reprezentarea de stare pentru generarea semnalelor în (2.42) și (2.43) poate fi obținută prin utilizarea identității:

$$\left[adj\left(sI - \Lambda_c\right)\right] l = \alpha_{n-1}(s)$$

unde Λ_c, l sunt date sub forma:

$$\Lambda_c = \begin{bmatrix} -\lambda_{n-1} & -\lambda_{n-2} & . & . & . & -\lambda_0 \\ 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ 0 & 0 & . & . & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad l = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

şi care implică

$$\det(sI-\Lambda_c)=\Lambda(s),\quad (sI-\Lambda_c)^{-1}l=\frac{\alpha_{n-1}(s)}{\Lambda(s)}$$

Astfel, din (2.42) şi din figura 2.3 rezultă:

$$\begin{aligned}
&\dot\phi_1=\Lambda_c\phi_1+lu, && \phi_1\in\Re^n\\
&\dot\phi_2=\Lambda_c\phi_2-ly, && \phi_2\in\Re^n\\
&y=\theta_\Lambda^T\phi && \qquad (2.44)\\
&z=y+\Lambda^T\phi_2=\theta^T\phi
\end{aligned}$$

Deoarece $\Lambda(s)=\det(sI-\Lambda_c)$ şi $\Lambda(s)$ este un polinom Hurwitz, rezultă că Λ_c este o matrice stabilă.

Modelul parametric (2.44) este o reprezentare de stare neminimală pentru procesul (2.38), deoarece sunt folosite $2n$ integratoare pentru a reprezenta un sistem de ordinul n. Într-adevăr, funcţia de transfer calculată pe baza modelului (2.44) este:

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{B(s)}{A(s)}\cdot\frac{\Lambda(s)}{\Lambda(s)}=\frac{B(s)}{A(s)}$$

ceea ce implică n compensări poli-zerouri stabile.

Parametrizarea 2:

Considerăm modelul parametric (2.43)

$$y=\theta_\lambda^T\phi$$

şi identificăm $w_m(s)w_m^{-1}(s)=1$, unde $w_m(s)=\frac{B_m(s)}{A_m(s)}$ este o funcţie de transfer cu gradul relativ egal cu unu şi $B_m(s)$ si $A_m(s)$ sunt polinoame Hurwitz.

Deoarece θ_λ este un vector constant, putem exprima (2.43) sub forma:

$$y=w_m(s)\theta_\lambda^T w_m^{-1}(s)\Phi.$$

Dacă introducem

$$\psi:=\frac{1}{w_m(s)}\phi=\left[\frac{\alpha_{n-1}^T(s)}{w_m(s)\Lambda(s)}u\ \ -\frac{\alpha_{n-1}^T(s)}{w_m(s)\Lambda(s)}y\right]^T$$

avem

$$y=w_m(s)\theta_\lambda^T\psi. \qquad (2.45)$$

Deoarece toate elementele lui $\frac{\alpha_{n-1}(s)}{\Lambda(s)w_m(s)}$ sunt funcţii de transfer proprii cu poli stabili, starea $\psi=\left[\psi_1^T,\ \psi_2^T\right]^T$, unde:

$$\psi_1=\frac{\alpha_{n-1}(s)}{w_m(s)\Lambda(s)}u;\qquad \psi_2=-\frac{\alpha_{n-1}(s)}{w_m(s)\Lambda(s)}y,$$

poate fi generată fără diferenţierea variabilelor y şi u. Dimensiunea lui ψ depinde de ordinul n al polinomului $\Lambda(s)$ şi de gradul polinomului $A_m(s)$. Deoarece $B_m(s)$ poate fi arbitrar, dimensiunea lui ψ poate fi, de asemenea, arbitrară.

În figura 2.4 este prezentată schema bloc a parametrizării (2.45).

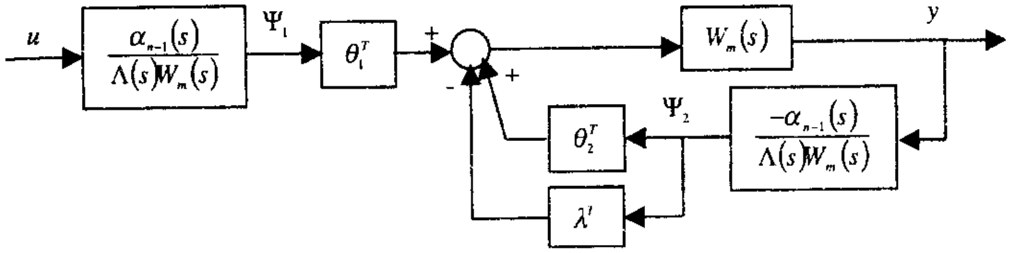


Fig. 2.4

Un caz special pentru (2.45) este arătat în figura 2.5, unde:

$$w_m(s)=\frac{1}{s+\lambda_0}$$

şi $s+\lambda_0$ este un factor al polinomului $\Lambda(s)$, adică:

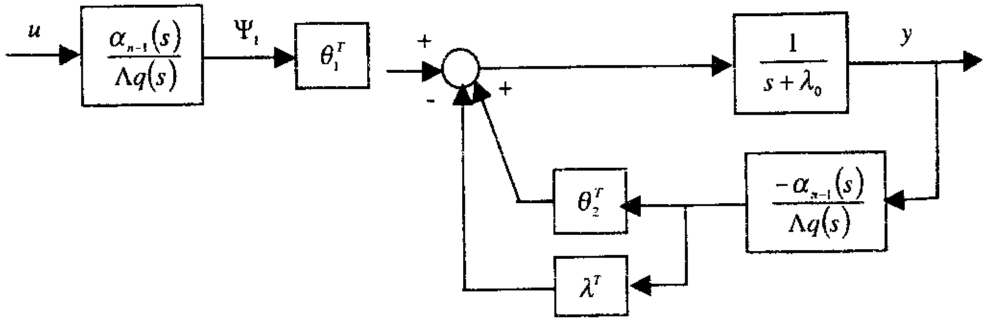


Fig. 2.5

$$\Lambda(s) = (s+\lambda_0)\Lambda_q(s) = s^n + \lambda_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \lambda_0,$$

iar

$$\lambda_q(s) = s^{n-1} + q_{n-2}s^{n-2} + \ldots + q_1 s + 1.$$

Această parametrizare a fost utilizată pentru a dezvolta observatoare adaptabile stabile [52].

2.5. Discretizarea modelelor continue

Pornind de la soluția ecuației de stare (2.18)

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} bu(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{2.46}$$

în cazul în care se consideră comanda ca o funcție constantă pe porțiuni $u(\tau) = u(kT) = u_k$ pentru $\tau \in [kT, (k+1)T]$, $T > 0$, $k \in Z$, se poate obține echivalentul discret al modelului continuu de stare.

Comanda u_k se menține constantă pe parcursul unei perioade de discretizare în cazul în care se utilizează un extrapolator de ordinul zero pentru aproximarea comenzii între două momente discrete de timp.

Dacă se consideră soluția (2.46) pentru $t_0 = kT$ și $t = (k+1)T$, unde T este perioada de discretizare, obținem:

$$x[(k+1)T] = e^{AT}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A[(k+1)T-\tau]} \cdot b\mathrm{d}\tau \cdot u(kT) \tag{2.47}$$

sau

$$x_{k+1} = \phi \; x_k + \Gamma u_k \tag{2.48}$$

unde $x_k \equiv x(kT)$, $u_k \equiv u(kT)$, $x_{k+1} = x[(k+1)T]$ și

$$\phi = e^{AT}, \quad \Gamma = \int_0^T e^{A\eta} d\eta b \text{ și } \eta = (k+1)T - \tau.$$

Cea de a doua ecuație ce definește evoluția ieșirii y în funcție de stare se obține direct:

$$y(kT) \equiv y_k = c^T x_k \tag{2.49}$$

Sistemul descris prin ecuațiile (2.48) și (2.49) se numește discretizatul cu pasul $T > 0$ al sistemului neted (A, b, c^T).

Astfel, pentru sistemul a cărui realizare este (A, b, c^T), se obține echivalentul discret având realizarea (ϕ, Γ, c^T). Pentru sistemele multivariabile se obține, în mod similar, echivalentul discret cu o realizare (ϕ, Γ, C), cu dimensiuni corespunzătoare ale matricelor.

Semnificația operației de discretizare este ilustrată în figura 2.6, unde, pe lângă sistemul neted (A, b, c^T), se includ convertoarele analog-numeric și numeric-analogic, care explicitează modalitatea de a „integra" un sistem care, natural, tranzitează funcții definite pe $\Re$, într-un sistem care să tranziteze funcții definite pe Z.

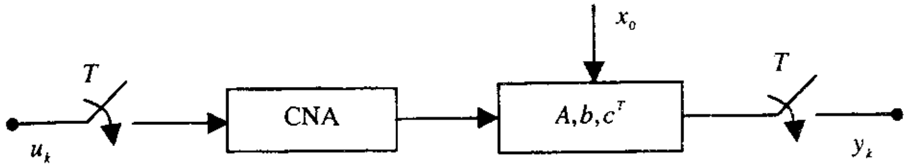


Fig. 2.6

Cele două matrice ϕ și Γ pot fi calculate pornind de la definițiile lor:

$$\phi = e^{AT} = I + \frac{1}{1!}AT + \frac{1}{2!}A^2T^2 + \ldots = I + AT\psi \tag{2.50}$$

unde

$$\psi = I + \frac{1}{2!}AT + \frac{1}{3!}A^2T^2 + \ldots = I + \frac{1}{2}AT\left(I + \frac{1}{3}AT\left(\ldots\frac{1}{N-1}AT\left(I + \frac{1}{N}AT\right)\right)\ldots\right)$$

și care reprezintă o serie cu bune proprietăți numerice.

Matricea Γ se obține prin evaluarea integralei:

$$\Gamma = \int_0^T e^{A\eta} \; d\eta b = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i+1)!} A^i T^{i+1} b = \psi T b. \tag{2.51}$$

Pentru calculul matricelor Φ, Γ se poate utiliza următorul algoritm [43]:

1. Selectează perioada T, N și descrie matricele A și b;
2. Matricea $I \leftarrow$ identitate;
3. Matricea $\Psi \leftarrow I$;
4. $k \leftarrow N$;
5. Dacă $k = 1$, merge la pasul 9;
6. Matricea $\psi \leftarrow I + \frac{1}{k}AT\psi$;
7. $k \leftarrow k - 1$;
8. Merge la 5;
9. Matricea $\Gamma \leftarrow T \;\; \psi \;\; b$;
10. Matricea $\Phi \leftarrow I + AT\psi$.

Numărul N reprezintă numărul termenilor la care se trunchează seria, în cazul în care testul de convergență este îndeplinit.

Dacă se dispune de funcţia de transfer a obiectului condus $H_P(s)$, se poate obţine direct echivalentul discret, fără a apela la determinările matricelor Φ şi Γ.

Pentru extrapolatorul de ordinul zero, se poate obţine cu uşurinţă funcţia de transfer ţinând seama că funcţia $u(t)$ este constantă pe intervalul $[0,T]$:

$H_{EOZ}(s) = H_{CNA}(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s}$ (în ipoteza unui coeficient de conversie unitar).

Astfel, comanda u_k se aplică la intrarea procesului caracterizat prin funcţia de transfer $H_p(s)$ prin intermediul extrapolatorului (fig. 2.7).

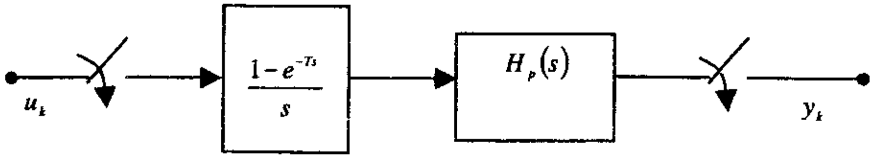


Fig. 2.7

Dacă se notează cu $h_c(t)$ funcţia pondere ataşată părţii continue a sistemului caracterizat prin funcţia de transfer:

$$H_c(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot H_p(s), \tag{2.52}$$

ieşirea discretă $y(kT)$ se calculează cu relaţia:

$$y(kT) \equiv y_k = \sum_{n=0}^{\infty} h_c(kT - nT)u(kT). \tag{2.53}$$

Aplicând transformata Z pe ambele părţi şi ţinând seama că ieşirea se calculează ca o convoluţie, se obţine:

$$Y(z) = H_c(z) \cdot U(z) \tag{2.54}$$

unde

$$H_c(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k} \tag{2.55}$$

reprezintă funcţia de transfer discretă a sistemului continuu caracterizat prin $H_p(s)$.

Astfel, funcţia de transfer discretă se obţine ca transformata Z a funcţiei pondere discrete:

$$H_c(z) = Z\left\{L^{-1}\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s} H_p(s)\right]\right\} \equiv \left(1-z^{-1}\right)Z\left[\frac{H_p(s)}{s}\right] \tag{2.56}$$

Exemplul 2.1:

Considerăm un proces caracterizat prin:

$$H_p(s) = \frac{k_p e^{-\tau s}}{\prod_{k=1}^{n}\left(T_k s + 1\right)}.$$

Se cere echivalentul discret pentru cazul în care $T = \frac{\tau}{d}$ *(d un număr întreg).*

Pornind de la relaţia (2.56), obţinem:

$$H_c(z) = \left(1-z^{-1}\right)z^{-d} Z\left[\frac{C_0}{s} + \frac{C_1}{s+\frac{1}{T_1}} + \ldots + \frac{C_n}{s+\frac{1}{T_n}}\right]$$

unde $C_0 = k_p$

$$C_i = \frac{-k_p \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{T_j}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(\frac{1}{T_j} - \frac{1}{T_i}\right)}; \quad i = 1,\ldots,m.$$

Ţinând seama de expresia transformatelor Z a funcţiilor treaptă unitară şi exponenţială, funcţia de transfer $H_c(z)$ *capătă forma:*

$$H_c(z) = \left(1-z^{-1}\right)\left[\frac{c_0}{1-z^{-1}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{1-e^{-T/T_i} z^{-1}}\right] \cdot z^{-d}$$

sau

$$H_c(z) = \frac{c_0 \prod_{i=1}^{n}\left(1-e^{-T/T_i} z^{-1}\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(1-z^{-1}\right)c_i \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\left(1-e^{-T/T_i} z^{-1}\right)}{\prod_{i=1}^{n}\left(1-e^{-T/T_i} z^{-1}\right)} \cdot z^{-d}$$

Pentru $m = 3$, $K_p = 1$, $T_1 = 10s, T_2 = 7.5$, $T_3 = 5s$ *şi* $\tau = 0$ *se obţine funcţia de transfer* $H_c(z)$ *pentru* $T = 2s$ *sub forma [57]:*

$$H_c\left(z^{-1}\right) = \frac{0{,}0027\, z^{-1} + 0{,}0093\, z^{-2} + 0{,}0019\, z^{-3}}{1 - 2{,}25498 z^{-1} + 1{,}69\, z^{-2} - 0{,}42\, z^{-3}}.$$

Forma generală a funcţiei de transfer obţinută prin discretizarea funcţiei $H_p(s)$, cu includerea elementului de reţinere este

$$H_c(z^{-1}) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + ... + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + ... + a_n z^{-n}} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \tag{2.57}$$

Cele două polinoame $A(z)$ şi $B(z)$ au gradul n, respectiv $n-1$. De remarcat faptul că prin discretizare se obţine şi polinomul $B(z)$ de dimensiunea $(n-1)$, dacă obiectul condus are n constante de timp. Pentru cazul în care comanda este întârziată cu un timp mort τ, se obţine modelul discret echivalent:

$$H_c(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d} \tag{2.58}$$

unde $d = \tau/T$ reprezintă *timpul mort normat al obiectului condus.*

2.6. Modelele matematice stocastice

În multe aplicaţii, utilizarea modelelor deterministe pentru caracterizarea proceselor şi a perturbaţiilor ce acţionează asupra acestora este ineficientă, impunându-se luarea în considerare a caracterului stocastic de evoluţie a variabilelor de intrare, stare şi ieşire ale proceselor. Pentru a defini un proces stocastic, considerăm o mulţime E de puncte e, numite *evenimente elementare*, şi fie F o familie de submulţimi s ale lui E, numite *evenimente*, iar $P(\cdot)$ o probabilitate pe F, adică o funcţie $P:[0,1] \to F$ care pune în corespondenţă fiecărui $f \in F$ un număr pozitiv, subunitar $P(f)$, numit *probabilitate a evenimentului* f. Mulţimea E cu structura (F, P) se numeşte ***câmp de probabilitate*** [6].

Vectorul $n(e) \in \chi$, unde χ este spaţiul euclidian n-dimensional, se numeşte *vector aleator* sau *variabilă aleatoare* cu valori în χ; funcţia $n: E \to \chi$ ce pune în corespondenţă fiecărui eveniment elementar $e \in E$ un vector $n(e) \in \chi$ poartă denumirea de variabilă aleatoare. Astfel, variabila $n(\cdot)$ capătă diverse realizări $n(e)$ funcţie de „întâmplările" e.

Un *proces stocastic* este definit prin:

$$n: T \times E \to \chi$$

care pune în corespondenţă fiecărui moment $t \in T$ şi fiecărui eveniment $e \in E$ un vector $n(t,e) \in \chi$. Valoarea procesului la momentul t fixat $n(t,.)$

este o variabilă aleatoare, iar procesul în ansamblu ca funcţie, poate fi gândit fie ca familie $n(t,.)$, $t \in T$ a acestor variabile, fie ca ansamblu, pentru $e \in E$, al valorilor sale $n(t,e)$, $t \in T$. *Un proces stocastic poate fi definit ca o familie de variabile aleatoare care este o funcţie de două argumente* $\{n(t,e), t \in T, e \in E\}$. În cazul în care $t = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ procesele stocastice sunt discrete. Media $\bar{n}$ este funcţia de timp ce exprimă „conţinutul stabil" sistematic repetabil şi comun al tuturor realizărilor $n(t,e)$ cu $e \in E$; ea se defineşte ca „suma" acestor realizări, ponderată cu probabilităţile respective:

$$\bar{n}(t) = E\{n(t)\} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} n(t) \tag{2.59}$$

Abaterea de la medie reprezintă partea fluctuantă, nesigură, „propriu-zis stocastică" a procesului considerat. În cazul în care $\bar{n}(t) = 0$, *procesul* se numeşte **centrat** (variaţiile au loc în jurul mediei zero). O caracteristică a semnalelor stocastice este definită de **funcţia de autocorelaţie**:

$$\Phi_{nn}(\tau) = E\{n(t) \ \ n(t+\tau)\} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} n(t) \ \ n(t+\tau) \tag{2.60}$$

Funcţia de autocorelaţie descrie relaţiile intrinseci ale semnalelor aleatoare, respectiv gradul de interdependenţă (stocastică) a componentelor procesului centrat $n(t,.)$. În particular, dacă se consideră numai deviaţiile de la medie, se obţine *matricea de autocovarianţă*:

$$R_{nn}(\tau) = \text{cov}[n,\tau] = E\{[n(t) - \bar{n}(t)]^T [n(t+\tau) - \bar{n}(t)]\} \tag{2.61}$$

Un **proces stocastic normal** este complet determinat prin două funcţii

$$\bar{n}(t) = E\{n(t)\}$$

$$R(s,t) = \text{cov}[n(t), n(s)] = E\{[n(s) - \bar{n}(s)]^T [n(t) - \bar{n}(t)]\} \tag{2.62}$$

denumite ***valoare medie*** şi ***funcţia de covarianţă***.

Un **proces stocastic** se spune a fi **staţionar** dacă valoarea medie este constantă şi $R_{nn}(\tau)$ nu depinde de t. Pentru $\tau = 0$, varianţa semnalului $n(t)$ se calculează cu relaţia:

$$\sigma_n^2 = R_{nn}(0) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} [n(t) - \bar{n}(t)]. \tag{2.63}$$

Procesele stocastice multivariabile sunt caracterizate prin *matricea de corelaţie* $\Phi_{nn}(\tau)$ şi *matricea de covarianţă* $R_{nn}(\tau)$.

Relația între două semnale stocastice staționare $n_1(t)$ și $n_2(t)$ poate fi descrisă prin *funcția de intercorelație* sau, în cazul multivariabil, prin *matricea de intercorelație*:

$$\Phi_{n_1n_2}(\tau)=E\{n_1(t)n_2(t+\tau)\}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}n_1(t)n_2(t+\tau) \qquad (2.64)$$

sau prin *funcția de intercovarianță*:

$$R_{n_1n_2}(\tau)=\mathrm{cov}(n_1,n_2,\tau)= \\ =E\{[n_1(t)-\bar{n}_1(t)][n_2(t+\tau)-\bar{n}_2(t)]\}+\Phi_{n_1n_2}(\tau)-\bar{n}_1\bar{n}_2 \qquad (2.65)$$

Două semnale stocastice se spune că sunt *necorelate* dacă

$$\mathrm{cov}[n_1,n_2,\tau]=R_{n_1n_2}(\tau)=0 \qquad (2.66)$$

și sunt *ortogonale* dacă $\bar{n}_1\bar{n}_2=0$, ceea ce implică $\Phi_{n_1n_2}=0$.

Un proces stocastic special este „zgomotul alb“, care este caracterizat prin faptul că valorile semnalelor la momente t de timp sunt stocastic independente de toate valorile la momente anterioare de timp. Dacă notăm prin σ_n^2 varianța semnalului $n(t)$, atunci funcția de covarianță a acestui semnal de medie $\bar{n}$ este dată de relația:

$$R(t)=\mathrm{cov}[n_1,\tau]=\sigma_n^2\delta(\tau) \qquad (2.67)$$

unde $\delta(\tau)$ este *funcția delta Kronecker* [58]

$$\delta(\tau)=\begin{cases}1 & \text{pentru} \quad \tau=0\\ 0 & \text{pentru} \quad \tau\neq 0\end{cases}.$$

Zgomotul alb se caracterizează printr-o densitate spectrală constantă [6]. Astfel, pornind de la definiția funcției de densitate spectrală:

$$\Phi(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega t}R(t)dt \qquad (2.68)$$

rezultă, ținând seama de (2.67), că zgomotul alb are $\Phi(\omega)=\mathrm{const}$. Pornind de la aceste noțiuni elementare, pot fi introduse modele matematice stocastice ale unor procese supuse acțiunii unor mărimi cu proprietăți stocastice. Maniera de introducere este de a considera procesul stocastic $n(t)\equiv n(k)\equiv n_k$ care acționează la ieșirea procesului condus (fig. 2.8).

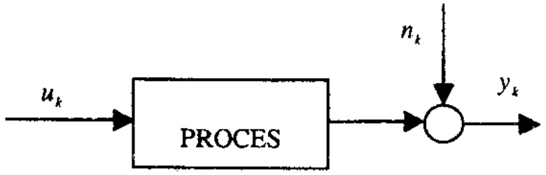


Fig. 2.8

Transferarea la ieșire a tuturor zgomotelor care acționează asupra procesului este posibilă datorită ipotezei de liniaritate pe care o impunem în vederea construcției modelului matematic al procesului. Zgomotul n_k se poate datora unor perturbații aleatoare interioare procesului, unor intrări nemăsurabile, unor zgomote de măsurare.

În condițiile utilizării unui model matematic sub forma ecuațiilor cu diferențe pentru caracterizarea procesului perturbat cu semnal n_t, putem scrie ieșirea perturbată sub forma:

$$y_k=\frac{b_0+\sum_{j=1}^{m_b}b_jq^{-j}}{1+\sum_{i=1}^{m_a}a_iq^{-i}}u_k+n_k \qquad (2.69)$$

unde q^{-1} reprezintă operatorul de întârziere $(u(k-1)=q^{-1}u(k))$.

Datorită ipotezei făcute asupra zgomotului ce acționează aditiv la ieșire, acestuia i se pot aplica teoreme de reprezentare a proceselor stocastice cu densități spectrale raționale [6]. Toate procesele staționare cu densități spectrale raționale pot fi generate prin trecerea zgomotului alb prin sisteme dinamice stabile. Astfel, n_k poate fi obținut trecând zgomotul alb printr-un filtru (rațional) stabil caracterizat prin funcția de transfer

$$H_v(z^{-1})=\frac{C_1(z^{-1})}{D_1(z^{-1})}, \qquad (2.70)$$

sau folosind reprezentarea în timp:

$$n(k)=\frac{1+\sum_{1}^{n_c}c_iq^{-i}}{1+\sum_{j=1}^{n_d}d_jq^{-j}}v(k), \qquad (2.71)$$

unde $v(k)$ reprezintă o secvență de variabile aleatoare independente și identic distribuite (*zgomot alb discret*), de medie zero și dispersie $E\{v^2(k)\}=\lambda^2$, iar polinoamele $D_1(z^{-1}), C_1(z^{-1})$ prime între ele, au toate zerourile în exteriorul cercului de rază unitară. Din (2.69) și (2.71) se obține *forma generală a unui model matematic monovariabil discret și stocastic:*

$$y(k)=\frac{B_1(q^{-1})}{A_1(q^{-1})}u(k)+\frac{C_1(q^{-1})}{D_1(q^{-1})}v(k) \qquad (2.72)$$

sau

$$A_1(q^{-1})y(k)=B_1(q^{-1})u(k)+C_0(q^{-1})v(k) \qquad (2.73)$$

unde

$$C_0\left(q^{-1}\right)=\frac{C_1\left(q^{-1}\right)}{D_1\left(q^{-1}\right)}A_1\left(q^{-1}\right)$$

este un filtru stabil şi de fază minimă [6]

$$\begin{aligned}A_1\left(q^{-1}\right)&=1+a_1q^{-1}+....+a_{m_a}q^{-m_a}\\ B_1\left(q^{-1}\right)&=b_0+b_1q^{-1}+....+b_{m_b}q^{-m_b}\\ C_1\left(q^{-1}\right)&=1+c_1q^{-1}+....+c_{n_c}q^{-n_c}\\ D_1\left(q^{-1}\right)&=1+d_1q^{-1}+....+d_{n_d}q^{-n_d}\end{aligned}\tag{2.74}$$

Modelul obţinut, folosind pentru caracterizarea zgomotului un model general *autoregresiv de medie alunecătoare*, este folosit mai rar în cadrul metodelor de identificare. Cel mai adesea, zgomotul este reprezentat, fie ca un proces de *medie alunecătoare* (*MA*), fie ca *autoregresie* (*AR*).

Dacă

$$n(k)=C_1\left(q^{-1}\right)v(k)\tag{2.75}$$

respectiv

$$n(k)=\frac{1}{D_1\left(q^{-1}\right)}v(k)\tag{2.76}$$

ieşirea perturbată a procesului este

$$y(k)=\frac{B_1\left(q^{-1}\right)}{A_1\left(q^{-1}\right)}u(k)+C_1\left(q^{-1}\right)v(k)\tag{2.77}$$

pentru modele de tip *MA* şi

$$y(k)=\frac{B_1\left(q^{-1}\right)}{A_1\left(q^{-1}\right)}u(k)+\frac{1}{D_1\left(q^{-1}\right)}v(k)\tag{2.78}$$

pentru modele *AR*.

Introducând notaţiile:

$$\begin{aligned}A\left(q^{-1}\right)&=A_1\left(q^{-1}\right)D_1\left(q^{-1}\right)\\ B\left(q^{-1}\right)&=B_1\left(q^{-1}\right)D_1\left(q^{-1}\right)\\ C\left(q^{-1}\right)&=C_1\left(q^{-1}\right)\end{aligned}\tag{2.79}$$

forma generală a modelului matematic este:

$$A\left(q^{-1}\right)y(k)=B\left(q^{-1}\right)u(k)+C\left(q^{-1}\right)v(k).\tag{2.80}$$

Dacă se introduc notaţiile:

$$A\left(q^{-1}\right)=\frac{A_1\left(q^{-1}\right)}{C_1\left(q^{-1}\right)};\quad B\left(q^{-1}\right)=\frac{B_1\left(q^{-1}\right)}{C_1\left(q^{-1}\right)};\quad D\left(q^{-1}\right)=D_1\left(q^{-1}\right)\tag{2.81}$$

se obţine modelul:

$$A\left(q^{-1}\right)y(k)=B\left(q^{-1}\right)u(k)+\frac{1}{D\left(q^{-1}\right)}v(k).\tag{2.82}$$

Reprezentările din (2.80) şi (2.82) nu mai sunt minimale în comparaţie cu (2.71), însă sunt convenabile pentru identificarea proceselor utilizând metode de estimare a parametrilor. Cu aceste notaţii, dacă se cunoaşte modelul discret al procesului condus sub forma $H_c\left(z^{-1}\right)$ şi dacă se notează cu $H_v\left(z^{-1}\right)$ funcţia de transfer a filtrului de perturbaţie, structura modelului matematic al procesului supus comenzii u_k şi perturbaţiei v_k se obţine din figura 2.9.

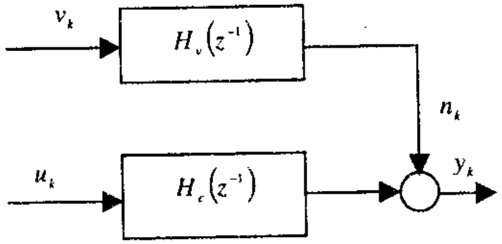


Fig. 2.9

Un model stocastic de stare cu semnale stocastice $v_1(k)$ şi $v_2(k)$ care acţionează asupra stării şi ieşirii sistemului are forma:

$$\begin{aligned}x(k+1)&=\Phi x(k)+\Gamma u(k)+v_1(k)\\ y(k)&=Cx(k)+v_2(k)\end{aligned}\tag{2.83}$$

unde $x(k)\in\Re^n$, $u(k)\in\Re^m$, $y(k)\in\Re^p$, iar $v_1(k)$ şi $v_2(k)$ sunt secvenţe de vectori independenţi, identic distribuiţi cu valori medii egale cu zero şi având matricea de covarianţă:

$$\begin{aligned}E\left\{v_1(k)v_1^T(k)\right\}&=R_1\\ E\left\{v_2(k)v_2^T(k)\right\}&=R_2\end{aligned}\tag{2.84}$$

Starea iniţială x_0 a sistemului este o variabilă aleatoare necorelată cu zgomotele albe discrete $v_1(k)$, $v_2(k)$, având media egală cu $\bar{x}_0$, $E\{x_0\}=\bar{x}_0$ şi matricea de covarianţă egală cu R_0:

$$E\left\{\left[x_0-\bar{x}_0\right]\left[x_0-\bar{x}_0\right]^T\right\}=R_0.$$

Modelul (2.83) poate fi utilizat pentru a reprezenta sisteme liniare finit dimensionale, incluzând perturbații stocastice cu densități spectrale raționale.

2.7. Sisteme cu parametri distribuiți și cu timp mort

O clasă largă de procese inerțiale cum ar fi cuptoarele termice, coloanele de distilare și fracționare, reactoarele chimice, reactoarele nucleare, liniile electrice lungi, etc sunt caracterizate matematic cu ajutorul ecuațiilor cu derivate parțiale. Variabilele de stare și de ieșire în acest caz sunt dependente de timp și de variabile spațiale.

Pentru a ilustra această categorie de sisteme se consideră procesul de încălzire a unei bare de dimensiuni uniforme într-un cuptor (fig. 2.10*a*).

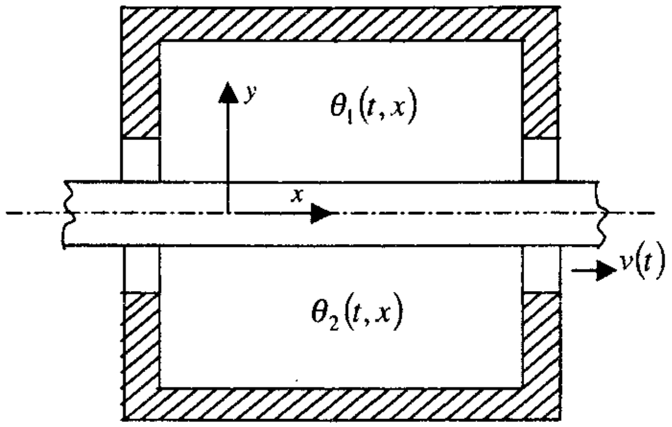


Fig. 2.10*a*

Distribuțiile de temperatură de o parte și de alta de-a lungul barei $\theta_1(t,x)$ și $\theta_2(t,x)$ sunt supuse unor restricții tehnologice de forma

$$\begin{matrix}\theta_1(t,x)\in[\theta_{1m},\ \theta_{1M}]\\ \theta_2(t,x)\in[\theta_{2m},\ \theta_{2M}]\end{matrix},\ t>0, x\in[0,l] \tag{2.85}$$

Dacă se apelează la ecuația difuziei [34], distribuția de temperatură în lungul barei are forma:

$$\frac{\partial\theta(t,x)}{\partial t}=\mu\frac{\partial^2\theta(t,x)}{\partial x^2}+v(t)\frac{\partial\theta(t,x)}{\partial x}+\sigma[\theta(t,x)-\theta_m(t,x)] \tag{2.86}$$

unde s-a considerat $\theta_1(t,x)=\theta_2(t,x)=\theta_m(t,x)$ pentru dimensiuni suficient de mici ale barei, μ - coeficientul de difuziune, σ – coeficientul de conductivitate al materialului, iar $v(t)$ reprezintă viteza de deplasare a barei.

Condițiile de frontieră pentru ecuația (2.86) au forma:

$$\theta(t,0)=0,\ \theta(t,l)=g_l(t). \tag{2.87}$$

Pentru încălzirea staționară a barei ($v(t)=0$) și în ipoteza unor dimensiuni reduse ale barei se poate scrie ecuația distribuției de temperatură sub forma:

$$\frac{\partial\theta(t,y)}{\partial t}=\mu\frac{\partial^2\theta(t,y)}{\partial y^2} \tag{2.88}$$

cu următoarele condiții la limită:

$$\begin{matrix}\theta(t,0)=g_0(t)\\ \theta(t,h)=g_h(t)\end{matrix} \tag{2.89}$$

În aceste modele se consideră ca mărimi de comandă $\theta_1(t,x)$, $\theta_2(t,x)$, $v(t)$, $g_0(t)$ și $g_h(t)$, iar variabilele de stare sunt $\theta(t,x)$ și $\theta(t,y)$, fiind dependente de poziția punctului în planul $x\circ y$.

Un alt exemplu de proces caracterizat prin modele cu parametrii distribuiți este reactorul nuclear. În [17] sunt prezentate mai multe metode pentru modelarea reactoarelor nucleare. Liniarizarea modelelor matematice cu parametrii distribuiți conduce la forma:

$$\frac{\partial x(r,t)}{\partial t}=A(r)x(r,t)+B(r)u(t) \tag{2.90}$$

unde r reprezintă variabila spațială definită pe corpul central al reactorului C și $x(r,t)$ reprezintă starea internă a reactorului. Pentru r fixat și t, starea reprezintă un vector N – dimensional, iar $A(r)$ este o matrice dependentă de variabila spațială care implică operatori de tip difuzie. Comanda $u(t)$ este un vector M – dimensional și reprezintă efectul poziționării barelor, iar $B(r)$ este o matrice de dimensiuni corespunzătoare.

Ecuației (2.90) i se asociază condițiile la limită și condițiile inițiale

$$x(r,t)=0 \tag{2.91}$$

și

$$x(r,t_0)=x_0(r)\in\Re^N \tag{2.92}$$

la momentul t_0.

Un alt model matematic cu parametrii distribuiți poate fi de forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.93}$$

care descrie un proces de transmitere a undelor. O soluţie simplificată a ecuaţiei (3.93) poate fi pusă sub forma:

$$U_s = A_m e^{-j\omega\beta r} + B_m e^{j\omega\beta r} \quad (2.94)$$

unde coeficienţii A_m şi B_m depind de condiţiile la limită, iar $\beta=\sqrt{\alpha}$.

Primul termen din (2.94) reprezintă unda care se deplasează în direcţia creşterii distanţei r, iar al doilea termen reprezintă unda inversă.

În cazul proceselor în care apare numai unda directă ($B_m = 0$)

$$U_s = A_m e^{-j\omega\beta r} \quad (2.95)$$

Pentru un proces de transport se poate defini la $r = 0$ intrarea $U(0)$ şi la distanţa l ieşirea $Y(l)$ sub forma:

$$Y = A_m e^{-j\omega\beta l},\ \text{dacă}\ U(0) = A_m. \quad (2.96)$$

În aceste condiţii se poate defini o funcţie de transfer sub forma:

$$H_\tau(s) = e^{-j\omega\tau} \quad (2.97)$$

unde $\tau = \beta l$.

În figura 2.10*b* se prezintă un proces de transport unde banda transportoare de lungime L se deplasează cu viteza $v(t)$.

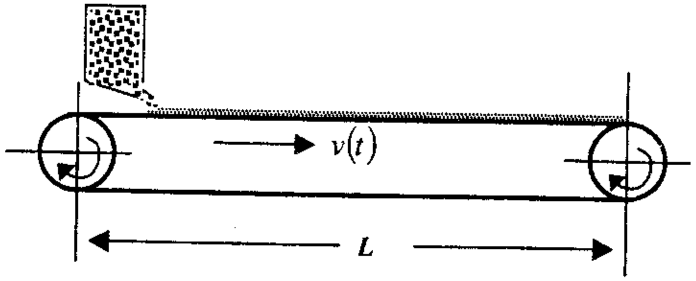


Fig. 2.10*b*

Dacă se notează cu $\tau = \frac{L}{v}$ timpul de transport al materialului se poate considera că ieşirea este întârziată cu τ, iar funcţia de transfer a transportorului se poate aproxima cu:

$$H_\tau(s) = K_t e^{-\tau s} \quad (2.97)$$

unde K_t reprezintă coeficientul de transfer al procesului.

În unele aplicaţii, modelele cu parametri distribuiţi pot fi aproximate cu modele liniare cu parametrii concentraţi variante în timp sau cu modele liniare cu parametri concentraţi cu timp mort.

Astfel, pot fi considerate modele liniare simplificate sub forma:

$$H_p(s) = H(s)e^{-\tau s} \quad (2.98)$$

unde $H(s)$ reprezintă o raţională strict proprie.

O reprezentare de stare pentru sistemele cu timp mort poate fi:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$
$$y(t) = c^T x(t-\tau) \quad (2.99)$$

sau

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t-\tau)$$
$$y(t) = c^T x(t) \quad (2.100)$$

În cazul cel mai general modelele matematice pentru procesele lente şi foarte lente cu timp mort inclus în stare au forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f\left(x(t), x(t-\tau_i), u(t), u(t-\tau_k)\right) \\ y &= g\left(x(t), x(t-\tau_i), u(t), u(t-\tau_k)\right) \end{aligned},\ x_0 \in \Re^n \quad (2.101)$$

unde τ_i şi τ_k reprezintă timpi morţi incluşi în stare şi comenzi.

În unele aplicaţii apar (într-o formă idealizată) tranziţii intrare-ieşire de tip „propagare" de forma:

$$y(t) = u(t-\tau), \qquad t \in \Re, \quad \tau > 0 \quad (2.102)$$

unde τ se numeşte *timp mort* sau *timp de propagare*.

Funcţia de transfer asociată unui proces cu timp mort este:

$$H_\tau(s) = e^{-\tau s} \quad (2.103)$$

care evidenţiază o clasă de sisteme infinit dimensionale.

Una dintre problemele legate de asemenea procese de „transport" este *problema realizabilităţii funcţiei de transfer* (2.103) printr-un sistem finit dimensional. Aceasta se reduce la „aproximarea" printr-o funcţie raţională strict proprie sau cel mult proprie a funcţiei $e^{-\tau s}$. Dacă notăm prin $H_{\tau a}(s)$ funcţia de transfer ce aproximează pe $H_\tau(s)$:

$$H_{\tau a}(s) = \frac{1 + a_1 s + a_2 s^2 + ... + a_n s^n}{1 + b_1 s + b_2 s^2 + ... + b_n s^n}, \qquad b_n \neq 0 \quad (2.104)$$

atunci, ţinând seama că $H_{\tau a}(0) = 1$, din dezvoltarea în jurul originii a acestei funcţii

$$H_{\tau a}(s) = 1 + c_1 s + c_2 s^2 + ... + c_{2n} s^{2n} + ... \quad (2.105)$$

prin identificare se obțin relațiile:

$$\begin{aligned} &c_1+b_1=a_1\\ &c_2+c_1b_1+b_2=a_2\\ &.\\ &c_n+c_{n-1}b_1+...+c_1b_{n-2}+b_n=a_n\\ &c_{n+1}+c_nb_1+...+c_2b_{n-1}+c_1b_n=0\\ &.\\ &c_{2n}+c_{2n-1}b_1+...+c_{n+1}b_{n-1}+c_nb_n=0\\ &.................. \end{aligned} \qquad (2.106)$$

Pe de altă parte, $H_\tau(s)=s^{-\tau s}$ poate fi pusă sub forma:

$$e^{-\tau s}=1-\tau\ s+\frac{\tau^2}{2}s^2-\frac{\tau^3}{6}s^3+\frac{\tau^4}{24}s^4-...+\frac{\tau^{2n}}{(2n)!}s^{2n}+.... \qquad (2.107)$$

deci coeficienții c_i pot fi calculați cu ajutorul relațiilor

$$c_1=-\frac{\tau}{1!},\quad c_2=\frac{\tau^2}{2!},\quad c_k=(-1)^k\frac{\tau_k}{k!}. \qquad (2.108)$$

Vom spune că $H_{\tau a}(s)$ aproximează $H_\tau(s)=e^{-\tau s}$, cu $k\in[0,n]$ dacă în (2.104) facem $a_{k+1}=...=a_n=0$, iar $a_1,a_2,...,a_k,b_1,b_2,...,b_n$ se determină din primele $n+k$ relații (2.106) în care coeficienții c_i se calculează cu (2.107). Astfel, dezvoltarea în jurul originii a raționalei (2.104) până la puterea k a lui s coincide cu dezvoltările în jurul originii până la aceeași putere a lui $e^{-\tau s}$. O asemenea aproximare este cunoscută sub denumirea de tip Padé. *Aproximațiile Padé* uzuale sunt de ordinul (2+0), (2+1), (1+1) și (2+2):

$$H_{\tau a}(s)=\frac{1}{1+\tau s+\frac{\tau^2}{2}s^2}$$

$$H_{\tau a}(s)=\frac{1-\frac{1}{3}\tau s}{1+\frac{2}{3}\tau s+\frac{\tau^2}{6}s^2} \qquad (2.109)$$

$$H_{\tau a}(s)=\frac{1-\frac{\tau}{2}s}{1+\frac{\tau}{2}s}$$

$$H_{\tau a}(s)=\frac{1-\frac{\tau}{2}s+\frac{\tau^2}{12}s^2}{1+\frac{\tau}{2}s+\frac{\tau^2}{12}s^2}$$

Oricare dintre realizările (2.109) reprezintă o realizare finit dimensională de tip Padé, de ordinul $(n+k)$, a lui $e^{-\tau s}$. O altă realizare a lui $e^{-\tau s}$ este de forma:

$$H_{\tau a}(s)=\frac{1}{(1+s\tau)^n},$$

cunoscută sub denumirea de aproximarea Strejk [53].

În cazul sistemelor discrete

$$y(k)=u(k-d),\qquad k,\tau\in N$$

și presupunând $u(.)$ z-transformabilă, rezultă

$$H(z)=\frac{1}{z^d},\qquad \left(d=\frac{\tau}{T}\right) \qquad (2.110)$$

care pentru $d\ge 1$ este o funcție rațională strict proprie.

O realizare imediată a lui (2.110) este, de exemplu:

$$A_d=\begin{bmatrix}0&1&.&.&.&0\\0&0&.&.&.&0\\.&&.&.&.&.\\.&&.&.&.&.\\.&&.&.&.&.\\0&0&.&.&.&1\\0&0&.&.&.&0\end{bmatrix},\quad b_d=\begin{bmatrix}0\\0\\.\\.\\1\end{bmatrix};\quad c_d^T=[1\ \ 0\ \ 0\ \ .\ \ .\ \ .\ \ 0] \qquad (2.111)$$

cu $A_d\in\Re^{d\times d}$ care ilustrează faptul că în cazul discret tranzițiile de tip propagare au realizări sistemice finit dimensionale, dimensiunea fiind egală cu numărul de pași asociați timpului de propagare $\left(d=\frac{\tau}{T}\right)$. În anumite ipoteze, sistemele descrise de ecuații cu derivate parțiale pot fi aproximate prin ecuații diferențiale cu întârziere, timpul mort fiind dependent de timp și de variabila spațială.

Un model liniar pentru un sistem monovariabil cu timp mort la intrare (timpul mort este egal cu un număr întreg de perioade de discretizare) are forma:

$$\begin{aligned} &x_{k+1}=\Phi x_k+\Gamma u_{k-d}\\ &y_k=c^Tx_k\qquad x_0\in\Re^n \end{aligned} \qquad (2.112)$$

iar pentru cazul în care timpul mort apare la ieșirea procesului, are forma:

$$\begin{aligned} &x_{k+1}=\Phi x_k+\Gamma u_k\\ &y_{k+d}=c^Tx_k \end{aligned} \qquad (2.113)$$

Ţinând seama de faptul că timpul mort poate fi reprezentat printr-o serie de elemente de întârziere cu un tact a cărui realizare este:

$$\begin{aligned} x_{k+1}^{d} &= A_d x_k^d + b_d u_k \\ u_{k-d} &= c^T x_k^d \end{aligned} \tag{2.114}$$

se poate obţine o realizare compactă

$$\begin{aligned} x_{k+1}^{0} &= \Phi_a x_k^0 + \Gamma_d u_k \\ y_k^0 &= c_{d_0}^T x_k^0 \end{aligned} \tag{2.115}$$

unde

$$\begin{aligned} & x_k^0 := \begin{bmatrix} x_k \\ x_k^d \end{bmatrix} \in \Re^{n+d}; \qquad (n_d = n+d) \\ & \Phi_d = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma c_d^T \\ 0 & A_d \end{bmatrix}; \ \Gamma_d = \begin{bmatrix} 0 \\ b_d \end{bmatrix}; \ c_{d_0}^T = \begin{bmatrix} c_d^T & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.116}$$

Astfel, prezenţa timpului mort aplicat la intrare determină creşterea dimensiunii spaţiului stării $(n_d = n+d)$.

2.8. Modele neparametrice

Din categoria modelelor neparametrice utilizate pentru analiza şi sinteza SRA, cele mai folosite sunt: 1) *caracteristicile de frecvenţă* şi 2) *răspunsul indicial.*

În acest paragraf sunt prezentate aceste două categorii de modele, evidenţiindu-se limitările şi avantajele oferite pentru analiza şi proiectarea SRA.

2.8.1. Răspunsul în frecvenţă (caracteristici de frecvenţă)

Considerăm un sistem liniar caracterizat printr-o funcţie de transfer $H(s)$ supus, la intrare, acţiunii unui semnal sinusoidal. Răspunsul la semnale sinusoidale conţine informaţii suficiente şi despre răspunsul la alte semnale.

Acesta poate fi apreciat din analiza Fourier, care arată că orice semnal definit pe un interval $[t_0, t_f]$ poate fi reprezentat ca o combinaţie liniară de unde sinusoidale cu frecvenţe 0, ω_0, $2\omega_0$, $3\omega_0$, ..., unde $\omega_0 = 2\pi/(t-t_0)$ este cunoscută ca frecvenţa fundamentală. Principiul

superpoziţiei permite a combina răspunsul la unde sinusoidale individuale pentru a obţine răspunsul la o formă de undă compusă.

Pentru sistemul stabil descris prin funcţia de transfer de forma:

$$H(s) = K \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{s^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j s^j} \tag{2.117}$$

considerăm o intrare sub forma exponenţială $e^{s_0 t}$.

Pentru simplificare, considerăm că toţi polii lui $H(s)$ sunt distincţi şi nici unul nu este egal cu s_0. În acest caz, răspunsul sistemului se obţine sub forma:

$$Y(s) = \frac{H(s_0)}{s - s_0} + Y_t(s) \tag{2.118}$$

unde primul termen este răspunsul permanent dat de intrarea de tip exponenţial, iar cel de-al doilea termen este răspunsul tranzitoriu.

Trecând (2.118) în domeniul timp, răspunsul sistemului este:

$$y(t) = H(s_0) e^{s_0 t} + \sum_{k=1}^{n} c_k e^{p_k t} \tag{2.119}$$

unde p_k, $k = 1, 2, \cdots, n$ sunt polii lui $H(s)$, iar c_k sunt determinaţi de condiţiile iniţiale ale sistemului şi de valorile coeficienţilor a_j, b_i din (2.117).

Este evident că pentru un sistem stabil, cel de-al doilea termen (componenta tranzitorie a răspunsului) în (2.119) scade la zero când $t \to \infty$.

Dacă ţinem seama că:

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right),$$

răspunsul sistemului la un semnal sinusoidal poate fi calculat prin combinarea răspunsului la $u(t) = e^{s_0 t}$ cu $s_0 = j\omega$ şi $u(t) = e^{-s_0 t}$ cu $s_0 = -j\omega$.

De notat că evaluarea lui $H(s)$ la $s = j\omega$ conduce la un număr complex, care poate fi reprezentat convenabil prin amplitudinea şi argumentul său în coordonate polare, ca

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \tag{2.120}$$

unde $|H(j\omega)|$ este amplitudinea, iar $\varphi(\omega) = \arg H(j\omega)$ este argumentul.

Astfel, răspunsul staţionar (permanent) la o intrare sinusoidală se obţine din (2.119) şi (2.120):

$$y_p(t)=\frac{1}{2j}\left[H(j\omega)e^{j\omega t}-H(-j\omega)e^{-j\omega t}\right]=$$

$$=\frac{1}{2j}\left[|H(j\omega)|e^{j[\omega t+\varphi(\omega)]}-|H(j\omega)|e^{-j[\omega t+\varphi(\omega)]}\right]=$$

$$=|H(j\omega)|\sin(\omega t+\varphi(\omega)) \qquad (2.121)$$

În aceste condiţii, putem concluziona că o intrare sub formă de undă sinusoidală forţează ieşirea la o undă sinusoidală cu aceeaşi frecvenţă. Mai mult, amplitudinea undei sinusoidale de la ieşire este modificată cu un factor egal cu amplitudinea lui $H(j\omega)$ şi faza deplasată cu faza lui $H(j\omega)$.

Dacă sistemul conţine timp mort, adică funcţia de transfer are forma:

$$H(s)=e^{-\tau s}\frac{B(s)}{A(s)}=e^{-\tau s}\frac{\sum_{i=0}^{m}b_i s^i}{s^n+\sum_{j=0}^{n-1}a_j s^j}, \qquad (2.122)$$

atunci poate fi demonstrat că ecuaţia (2.121) devine:

$$y_p(t)=\begin{cases}0\ , \text{ dacă } t<\tau\\ |H(j\omega)|\sin(\omega t+\varphi(\omega))+\sum_{k=1}^{n}c_k e^{p_k(t-\tau)}, \text{ dacă } t\geq\tau\end{cases} \qquad (2.123)$$

unde $\varphi(\omega)$ include şi termenul $-\omega\tau$. Ultimul termen în (2.123) este alcătuit din modurile naturale, iar constantele c_k depind de condiţiile iniţiale[46].

Răspunsurile în frecvenţă sunt instrumente foarte utile pentru toate aspectele de analiză, sinteză şi proiectare a regulatoarelor şi filtrelor. Pot fi utilizate ca reprezentări distincte amplitudine-frecvenţă şi fază-frecvenţă (diagrama Bode) sau în reprezentare polară (locul Nyquist).

Diagramele Bode [34] pot fi obţinute şi pe cale experimentală, dacă se consideră obiectul condus ca sistem liniar la intrarea căruia se aplică semnalul

$$u(t)=U_m\sin\omega t$$

unde U_m este amplitudinea undei sinusoidale şi se alege astfel încât să se menţină liniaritatea modelului procesului. În cazul conservării liniarităţii, răspunsul obiectului condus este:

$$y(t)=Y\sin(\omega t+\varphi), \qquad (2.124)$$

unde Y reprezintă amplitudinea ieşirii şi φ este defazajul ieşirii sinusoidale faţă de intrarea $u(t)$.

Pentru diferite valori ale frecvenţei, cu $U_m=\text{const.}$, se obţin valorile $Y_1(\omega_1)$, $Y_2(\omega_2)$, ..., $Y_N(\omega_N)$ şi respectiv $\varphi_1(\omega_1)$, $\varphi_2(\omega_2)$, ..., $\varphi_N(\omega_N)$.

Reprezentarea dependenţei $\frac{Y_i(\omega_i)}{U_m}$ pentru diferite valori ar conduce la caracteristica $A(\omega)$, întrucât $\frac{Y_i(\omega_i)}{U_m}=A_i(\omega_i)$.

Această caracteristică poate fi reprezentată folosind scala logaritmică şi, în consecinţă, amplitudinea se măsoară în decibeli ($A_{dB}=20\lg A(\omega)$), iar axa frecvenţelor (pulsaţiilor) se gradează în decade.

În figura 2.11 sunt ilustrate caracteristicile $A(\omega)$ şi $\varphi(\omega)$ în reprezentare logaritmică şi pot fi utilizate pentru determinarea unui model parametric de tipul:

$$H_p(j\omega)=\frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}, \qquad (2.125)$$

unde coeficienţii polinoamelor $A(j\omega)$ şi $B(j\omega)$ se obţin printr-o procedură de optimizare parametrică.

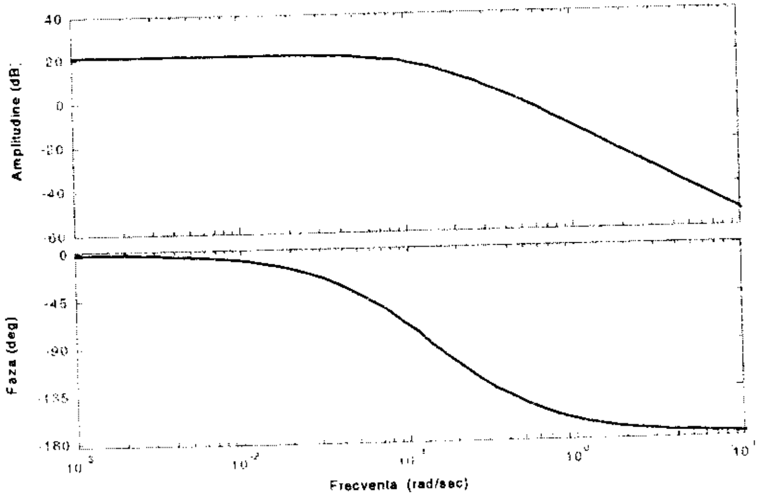


Fig. 2.11

Pentru construcția unui model parametric al obiectului condus pe baza caracteristicilor de frecvență obținute pe cale experimentală, se definesc erorile:

$$\varepsilon_{ia}(\theta)=\frac{A(\omega_i)-A_e(\omega_i)}{A_e(\omega_i)} \tag{2.126}$$

și

$$\varepsilon_{i\varphi}(\theta)=\mathrm{tg}\varphi(\omega_i)-\mathrm{tg}\varphi_e(\omega_i) \tag{2.127}$$

unde $A(\omega_i)$ și $\varphi(\omega_i)$ reprezintă valori asociate unui model parametric cu parametri a_i, b_j de forma:

$$H_p(j\omega)=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}=\frac{b_{n-1}(j\omega)^{n-1}+\dots+b_0}{(j\omega)^n+a_{n-1}(j\omega)^{n-1}+\dots+a_0} \tag{2.128}$$

iar $A_e(\omega_i)$ și $\varphi_e(\omega_i)$ reprezintă valorile amplitudinii și fazei la frecvențele ω_i, determinate experimental.

Aceste caracteristici pot fi utilizate direct pentru proiectarea regulatoarelor.

Prin utilizarea unor criterii pătratice de tipul:

$$I_a=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon_{ia}^2(\theta) \text{ sau } I_\varphi=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon_{i\varphi}^2(\theta) \tag{2.129}$$

și prin proceduri corespunzător alese pentru minimizarea unor asemenea criterii, se pot determina parametrii a_i, b_j ai modelului parametric.

O altă metodă pentru obținerea modelului parametric pe baza caracteristicii $A(\omega)$ presupune aproximarea caracteristicii cu asimptote pe domenii definite de frecvență. Punctele de intersecție ale dreptelor ce aproximează caracteristica $A(\omega)$ definesc valorile pulsațiilor de frângere sau singularitățile sistemului (poli și zerouri).

Pentru a ilustra aceasta metodă, considerăm un sistem ale cărui caracteristici Bode au fost determinate experimental și au forma din figura 2.12.

Din figura 2.12 se observă că sistemul are un pol în origine (prima pantă a caracteristicii $A(\omega)$ este egală cu $-20dB/dec$). De asemenea, se observă că sistemul mai are doi poli și un zero, întrucât pantele dreptelor ce aproximează $A(\omega)$ pe intervale definite de frecvență alternează $-20dB/dec$, $-40dB/dec$, $-20dB/dec$, $-40dB/dec$.

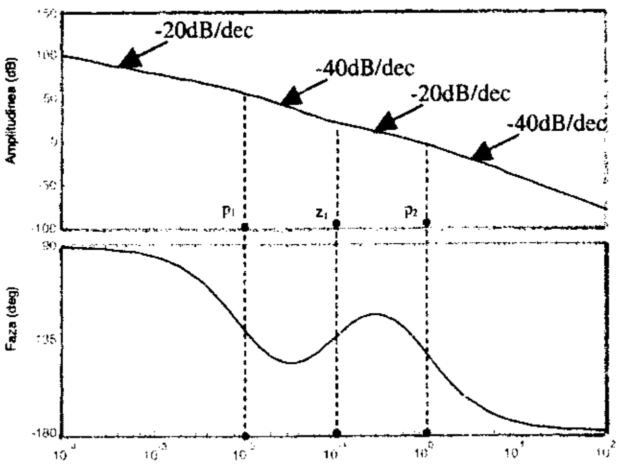


Fig. 2.12

Forma funcției de transfer atașată unui obiect ce are caracteristica $A(\omega)$ determinată experimental în acest caz este:

$$H(s)=\frac{k(s-z_1)}{s(s-p_1)(s-p_2)}$$

unde $|p_1|<|z_1|<|p_2|$.

Valorile pulsațiilor de frângere se pot determina direct pe graficul ce ilustrează caracteristica $A(\omega)$ obținută experimental.

Caracteristica $\varphi(\omega)$ ilustrează că sistemul conține un pol în origine, $\varphi(0)=-\pi/2$, iar $\varphi(\infty)=-180^\circ$, ceea ce înseamnă că gradul relativ al sistemului este egal cu 2 ($n-m=2$).

De menționat că pentru un model matematic de forma:

$$H_p(s)=K_p\frac{\prod_{i=1}^{m}(T_i s+1)}{\prod_{k=1}^{n}(T_k s+1)s^\alpha}$$

se obțin caracteristicile A(ω) și φ(ω), în reprezentare logaritmică:

$$A_{db}(\omega)=20\log|H_p(j\omega)|=$$

$$=20\log|K_p|-20\alpha\log|\omega|+\sum_{i=i}^{n}20\log\sqrt{1+T_i^2\omega^2}-\sum_{K=1}^{n}20\log\sqrt{1+T_K^2\omega^2}$$ și

$$\varphi(\omega)=-\alpha\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{m}arctg\ \omega T_i-\sum_{K=1}^{n}arctg\ \omega T_K\ .$$

Prezența unui număr α de poli în origine în funcția de transfer $H_p(s)$ determină o pantă a caracteristicii $A_{db}(\omega)$ egală cu *–20α db/decadă* și în mod corespunzător un defazaj egal cu $\alpha\frac{\pi}{2}$ la frecvențe joase.

Caracteristica logaritmică $A_{db}(\omega)$ poate fi trasată prin aproximare, cu asimptote pentru frecvențe joase și frecvențe înalte ale termenilor:

$(T_i s+1)$ respectiv $(T_k s+1)$.

Pentru $|T_i\omega| \ll 1$, $20\log\sqrt{1+T_i^2\omega^2} \simeq 0$, iar pentru $|T_i\omega| \ll 1$, $20\log\sqrt{1+T_i^2\omega^2} \simeq 20\log\omega T_i$, care reprezintă o dreaptă cu panta egală cu *–20 db/decadă.*

În mod similar se obțin cele două asimptote pentru elementele de întârziere. Astfel, pentru $|\omega T_K| \gg 1$, se obține o dreaptă cu parte egală cu *–20 db/decadă.*

Cele două caracteristici A(ω) și φ(ω), în reprezentare logaritmică sunt cunoscute ca fiind caracteristicile BODE [34].

2.8.2. Răspunsul indicial

Este cunoscut faptul că, dacă la intrarea unui sistem liniar se aplică în condiții inițiale nule o treaptă unitară, se obține răspunsul indicial.

În cazul unui răspuns indicial supraamortizat (fig. 2.13), prin utilizarea unor metode de aproximare a răspunsului se poate obține modelul parametric [19, 20, 34] sub forma unei funcții de transfer.

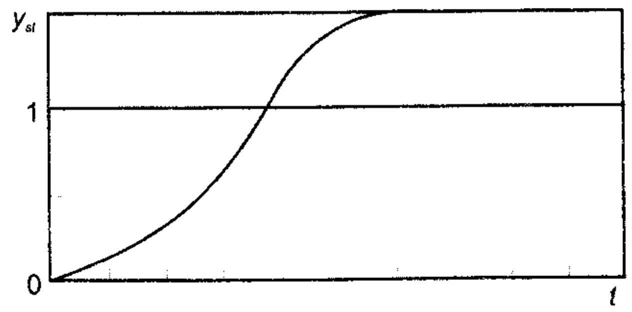


Fig. 2.13

Astfel, un asemenea răspuns poate fi aproximat cu relația:

$$y(t) = c_0 - \sum_{i=1}^{n} c_i e^{-\lambda_i t} \tag{2.130}$$

unde $c_0 = y_{st}$ reprezintă componenta staționară a răspunsului indicial și poate fi calculată direct din grafic, iar componenta tranzitorie a răspunsului conține constantele c_i și polii funcției de transfer λ_i, care în acest caz sunt reali și distincți.

Transformata Laplace a răspunsului (2.130) are forma:

$$Y(s) = \frac{c_0}{s} + \frac{c_1}{s+\lambda_1} + \frac{c_2}{s+\lambda_2} + \dots + \frac{c_n}{s+\lambda_n} \tag{2.131}$$

O procedură pentru determinarea constantelor c_i și a polilor λ_i, precum și a numărului n al acestora, are la bază metoda logaritmării succesive [89]. Procedura este iterativă și se inițiază cu un model de ordinul întâi.

$$\tilde{y}(t) = c_0 - c_1 e^{-\lambda_1 t} \tag{2.132}$$

și se introduce funcția

$$\tilde{y}_1(t) = c_0 - \tilde{y}(t) = c_1 e^{-\lambda_1 t} \tag{2.133}$$

Logaritmând (2.133) se obține

$$\ln \tilde{y}_1(t) = \ln c_1 - \lambda_1 t \tag{2.134}$$

care, în reprezentare logaritmică, definește o dreaptă de pantă $-\lambda_1$, ce intersectează ordonata într-un punct de coordonate $(\ln c_1, 0)$. Această dreaptă se construiește din valorile expresiei $\tilde{y}_1(t) = c_0 - \tilde{y}(t)$ stabilite experimental și apoi reprezentând $\ln y_1(t)$ pentru diverse valori ale timpului.

Dacă diferența

$$\tilde{y}_2(t) = y_1(t) - c_2 e^{-\lambda_2 t} \tag{2.135}$$

nu este suficient de mică, mai ales pentru valori mici ale lui t, procedura continuă luând

$$\tilde{y}_2(t) = c_2 e^{-\lambda_2 t} \tag{2.136}$$

respectiv

$$\ln|\tilde{y}_2(t)| = \ln c_2 - \lambda_2 t \tag{2.137}$$

Se reprezintă această dreaptă cu panta $-\lambda_2$ și intersecția ordonatei la punctul de valoare egală cu $\ln c_2$.

Astfel, răspunsul indicial poate fi aproximat cu

$$\tilde{y}(t) = c_0 - c_1 e^{-\lambda_1 t} - c_2 e^{-\lambda_2 t} \tag{2.138}$$

unde c_1, c_2, λ_1 și λ_2 se determină grafic.

Procedura iterativă poate fi oprită dacă diferența

$$\tilde{y}_3(t) = \tilde{y}_2(t) - c_3 e^{-\lambda_3 t} \tag{2.139}$$

este suficient de mică, altfel procedura continuă până ce răspunsul indicial este suficient de bine aproximat printr-un număr dat de experimental exponențiale.

Calculele continuă până se găsește o diferență $\tilde{y}_k(t)=0$ pentru toți t. Dacă funcția de transfer a procesului admite zerouri, punerea lor în evidență, după determinarea coeficienților c_i și λ_i, $i=1,2,\cdots,n$, se poate face pe baza relațiilor referitoare la condițiile inițiale

$$c_0-\sum_{i=1}^{n} c_i=0;\quad \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^q c_i=0;\quad q=1,2,\ldots,n-1 \tag{2.140}$$

Dacă relațiile (2.140) nu sunt satisfăcute începând cu un anumit rang $q<n$, rezultă că există $(n-q)$ zerouri și deci forma funcției de transfer are forma:

$$H(s)=\frac{c_0\prod\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\sum\limits_{i=1}^{n-q}(s+\beta_i)}{\prod\limits_{i=1}^{n-q}\beta_i\sum\limits_{i=1}^{n}(s+\lambda_i)} \tag{2.141}$$

Zerourile β_i se determină prin identificarea imaginii răspunsului $Y(s)=H(s)\frac{1}{s}$, în care $H(s)$ este dat prin (2.141) cu expresia răspunsului aproximat

$$Y(s)=\frac{c_0}{s}+\frac{c_1}{s+\lambda_1}+\ldots+\frac{c_n}{s+\lambda_n}.$$

O altă metodă pentru construcția modelului matematic are la bază *determinarea suprafețelor delimitate de curba experimentală și curba de răspuns a modelului încercat.* În acest caz, se testează inițial un model de ordinul 1, apoi unul de ordinul al 2-lea etc., până se găsește o apropiere satisfăcătoare. Aceste metode relativ simple, cu grad redus de precizie, pornesc de la modelele de ordin inferior, mărindu-se ordinul, până la găsirea unui model acceptabil. În condițiile în care în structura modelului matematic este cunoscută sau se acceptă o anumită structură, capabilă să descrie cu suficientă precizie dinamica procesului, apare evident cerința determinării parametrilor modelului, pornind de la răspunsul determinat experimental.

O metodă folosită este utilizarea unor modele cu funcții de transfer tipice, de dimensiune redusă, acceptabile pentru un număr destul de mare de procese tehnologice.

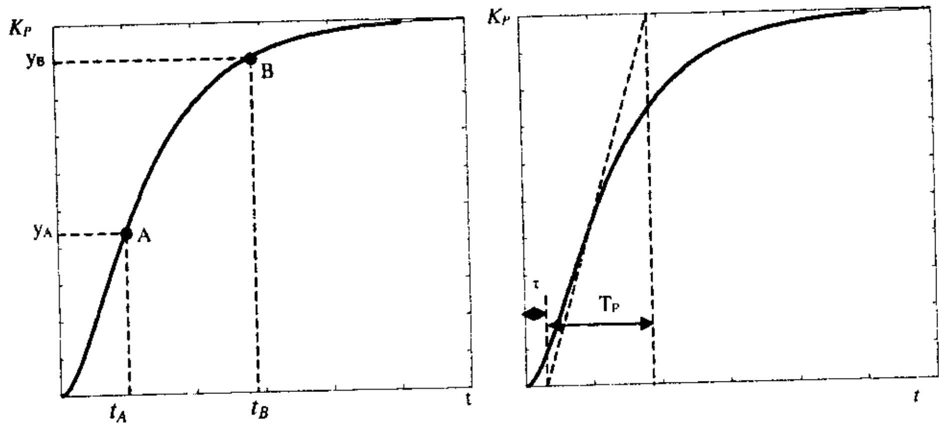
Se utilizează de obicei pentru procese lente și foarte lente, cu răspuns indicial supraamortizat, modele de forma:

$$H_p(s)=\frac{K_p e^{-\tau s}}{T_p s+1}\quad \text{sau}$$

$$H_p(s)=\frac{K_p e^{-\tau s}}{\left(1+T_p s\right)^n} \tag{2.142}$$

$$H_p(s)=\frac{K_p e^{-\tau s}}{\left(T_1 s+1\right)\left(T_2 s+1\right)}$$

Oricare dintre modelele (2.142) poate exprima cu precizie mai bună sau mai redusă răspunsul indicial al unui proces lent. În literatură [89] sunt prezentate metode pentru determinarea parametrilor ce intervin în aceste modele de dimensiune redusă. În figura 2.14*a* se prezintă răspunsul indicial al unui proces lent și răspunsul indicial al modelului cu timp mort și o singură constantă de timp.



(a) (b)

Fig. 2.14.

Dacă $\tilde{y}(t)$ este răspunsul indicial asociat modelului, impunând ca acest răspuns să coincidă cu răspunsul indicial obținut experimental în două puncte, se pot determina parametrii modelului cu ajutorul relațiilor:

$$T_p=\frac{t_B-t_A}{m_A-m_B};\qquad \tau=\frac{t_B\ln m_A-t_A\ln m_B}{m_A-m_B} \tag{2.143}$$

unde

$$m_A=1-\frac{y_A}{K_p},\qquad m_B=1-\frac{y_B}{K_p} \tag{2.144}$$

O altă posibilitate pentru determinarea constantei de timp T_p şi a timpului mort este aceea de a aduce tangenta la răspunsul experimental în punctul de inflexiune şi a determina astfel intersecţia acesteia cu abscisa şi cu dreapta ce defineşte valoarea staţionară a ieşirii (fig. 2.14*b*).

În [5] se prezintă o altă metodă pentru determinarea parametrilor modelului de ordinul întâi cu timp mort.

Astfel, dacă modelul procesului are forma:

$$H_p(s) = \frac{K_p e^{-s\tau}}{1 + sT_p}$$

urmează

$$\begin{aligned} &H_p(0) = K_p \\ &H'_p(0) = -K_p\left(\tau + T_p\right) \\ &H''_p(0) = K_p\left(2T_p^2 + 2T_p\tau + \tau^2\right) \end{aligned} \tag{2.145}$$

respectiv

$$K_p = H_p(0) \tag{2.146}$$

$$\begin{aligned} &\tau + T_p = -\frac{H'_p(0)}{H_p(0)} \\ &T_p = \sqrt{\frac{H''_p(0)}{H_p(0)} - \left(\frac{H'_p(0)}{H_p(0)}\right)^2} \end{aligned} \tag{2.147}$$

Funcţia de transfer şi derivatele acesteia în raport cu ω, pentru $\omega = 0$, se calculează din următoarele integrale:

$$\begin{aligned} &U(0) = \int_0^\infty u(t)dt && Y(0) = \int_0^\infty y(t)dt \\ &U'(0) = -\int_0^\infty tu(t)dt && Y(0) = -\int_0^\infty ty(t)dt \\ &U''(0) = \int_0^\infty t^2u(t)dt && Y''(0) = \int_0^\infty t^2y(t)dt \end{aligned} \tag{2.148}$$

împreună cu ecuaţiile

$$\begin{aligned} &Y(0) = H_p(0)U(0) \\ &Y'(0) = H'_p(0)U(0) + H_p(0)U'(0) \\ &Y''(0) = H''_p(0)U(0) + 2H'_p(0)U'(0) + H_p(0)U''(0) \end{aligned} \tag{2.149}$$

Această metodă poate fi folosită pentru semnale de intrare arbitrare. De remarcat faptul că modelele construite pe baza răspunsului indicial sau pe baza caracteristicilor de frecvenţă sunt modele ale ansamblului format din instalaţia tehnologică, traductor şi elementul de execuţie. Semnalul de intrare sub forma unei comenzi se aplică elementului de execuţie, iar variabila măsurată se obţine la ieşirea traductorului.

Având în vedere că traductorul se alege în funcţie de natura fizică a variabilei din proces, care trebuie măsurată, iar elementul de execuţie se alege în funcţie de particularităţile procesului, de tipul fluxului de energie controlat de elementul de execuţie, putem spune că acest ansamblu alcătuieşte *partea fixată a unui sistem de reglare*, a cărei funcţie de transfer o notăm cu H_p, aşa cum s-a prezentat în capitolul 1:

$$H_p(s) = H_E(s)H_{IT}(s)H_T(s).$$

Principalele probleme ce apar la identificarea proceselor pe baza rezultatelor experimentale sunt:

- alegerea variabilelor şi a structurii modelului;
- proiectarea experimentului în scopul asigurării nivelului optim al variabilelor de excitaţie şi a evidenţierii tuturor regimurilor de funcţionare într-un context exogen dat;
- eliminarea perturbaţiilor nestaţionare şi a reducerii erorilor de măsurare a variabilelor de intrare;
- încadrarea variabilelor de intrare şi ieşire în domenii admisibile de variaţie impuse de particularităţile procesului tehnologic supus identificării;
- alegerea semnalelor optime pentru excitarea procesului;
- asigurarea condiţiilor de identificabilitate a procesului în condiţiile funcţionarii acestuia sub controlul unui regulator;
- alegerea perioadei optime de achiziţie a informaţiilor şi a duratei experimentului;
- alegerea metodei optime de prelucrare a datelor ţinând seama de particularităţile modelului asociat procesului şi semnalelor exogene ce acţionează asupra acestuia;
- validarea modelului urmărindu-se asigurarea unei adecvanţe maxime la realitate.

Aceste probleme, corelate cu multe altele de natură teoretică şi practică evidenţiază complexitatea sarcinii de identificare a proceselor tehnologice. În [89] sunt discutate detaliat asemenea probleme cu care este confruntat specialistul în automatică.

2.9. Erori de modelare. Incertitudini

În paragrafele anterioare sunt prezentate diferite categorii de modele obținute prin modelare analitică și identificare experimentală, modele care aproximează funcționarea reală a obiectelor (proceselor). Cele mai multe modele sunt obținute ca aproximări liniare ale unor relații neliniare, cu valabilitate în vecinătatea unui punct de funcționare. În alte cazuri, structura modelelor a fost simplificată, neglijând constantele de timp cu valori mici (parazite) al căror efect asupra răspunsului este nesemnificativ în raport cu efectul constantelor de valoare mare.

De cele mai multe ori, modelele liniare se consideră modele invariante în timp, deși în realitate parametrii modelului variază în timp, iar modelele cu parametri distribuiți sunt aproximate cu modele cu parametri concentrați.

Desigur, toate aceste aproximații conduc la modele matematice a căror utilizare provoacă rezultate nesatisfăcătoare care, în anumite cazuri, sunt departe de realitate. Este evident că proiectarea unui regulator pe baza unui model simplificat conduce la un rezultat ușor implementabil, dar performantele obținute în realitate pot fi total necorespunzătoare, datorită erorilor de modelare.

Erorile de modelare introduc incertitudini în modelarea proceselor și, în consecință, pot fi viciate rezultatele analizei sau/și sintezei SRA pe baza modelelor simplificate.

Incertitudinile pot fi grupate în două mari categorii: *structurate* și *nestructurate*.

Din categoria incertitudinilor structurate reținem *varianța parametrilor fizici ai procesului* și *reducerea dimensiunii modelului matematic*.

Pentru a exemplifica această clasă de incertitudini, considerăm modelul procesului:

$$H_p(s)=\frac{1}{s^2+\alpha s+1}$$

și presupunem că parametrul α variază în limitele α_{min}, α_{max}: $\alpha\in[\alpha_{min},\alpha_{max}]$.

În aceste condiții, spunem că modelul aparține unei mulțimi structurate:

$$H_p=\left\{\frac{1}{s^2+\alpha s+1}:\alpha_{min}\le\alpha\le\alpha_{max}\right\}$$

iar modelul matematic este parametrizat printr-un număr finit de parametri α_i cu valori cuprinse în domeniul menționat.

Incertitudinile nestructurate pot fi definite sub forma aditivă sau sub forma multiplicativă.

Dacă notăm cu $\hat{H}_p(s)$ funcția de transfer nominală pe baza căreia se proiectează sau se analizează un SRA, atunci definim incertitudinea aditivă sub forma:

$$H_p(s)=\hat{H}_p(s)+L_A(s) \tag{2.150}$$

unde $L_A(s)$ este stabilă și satisface condiția:

$$\left|L_A(j\omega)\right|\le l_a(\omega),\ \forall\omega, \tag{2.151}$$

iar $l_a(\omega)$ reprezintă limita superioară a amplitudinii lui $L_A(j\omega)$.

În acest caz, se poate defini clasa de modele cu incertitudini aditive sub forma:

$$H_p=\left\{H_p:\left|H_p(j\omega)-\hat{H}_p(j\omega)\right|\le l_a(\omega)\right\} \tag{2.152}$$

Incertitudinile multiplicative pot fi reprezentate în funcție de $L_M(s)$, astfel:

$$H_p(s)=\hat{H}_p[1+L_M(s)] \tag{2.153}$$

unde $L_M(s)$ reprezintă incertitudinea multiplicativă, este stabilă și satisface condiția:

$$\left|L_M(j\omega)\right|\le l_m(\omega) \tag{2.154}$$

Clasa modelelor ce conțin incertitudini multiplicative se reprezintă sub forma:

$$H_p=\left\{H_p:\frac{\left|H_p(j\omega)-\hat{H}_p(j\omega)\right|}{\left|\hat{H}_p(j\omega)\right|}\le l_m(\omega)\right\} \tag{2.155}$$

În relațiile de mai sus $\hat{H}_p$ reprezintă modelul nominal utilizat pentru caracterizarea procesului.

În figura 2.15 se prezintă schematic modelul matematic cu incertitudini aditive și multiplicative.

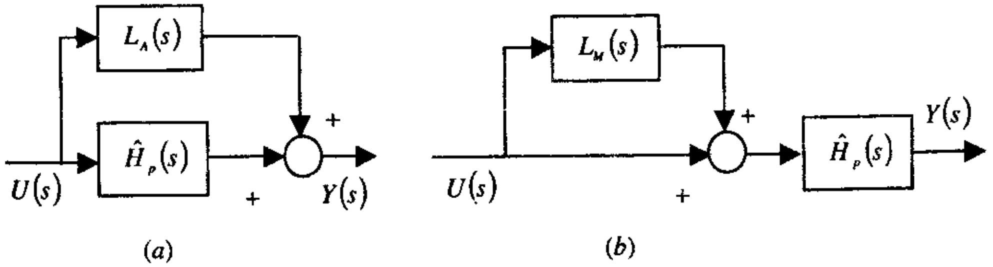


Fig. 2.15

O reprezentare mai explicită a incertitudinii multiplicative presupune descompunerea lui $L_M(s)$ sub forma:

$$L_M(s) = \Delta(s) \cdot W_2(s) \tag{2.156}$$

unde $W_2(s)$ este o funcţie de transfer stabilă, fixată, şi reprezintă o pondere, iar $\Delta(s)$ este o funcţie de transfer stabilă, variabilă care satisface condiţia $\|\Delta\|_\infty \le 1$.

În toate calculele ce iau în consideraţie incertitudinea multiplicativă vom considera că $H_p(s)$ şi $\hat{H}_p(s)$ au acelaşi număr de poli de instabilitate (incertitudinea nu introduce poli suplimentari de instabilitate).

Ideea acestei reprezentări cu incertitudine multiplicativă este că ΔW_2 defineşte perturbaţii ale procesului normalizat în raport cu unitatea:

$$\frac{H_p}{\hat{H}_p} - 1 = \Delta W_2 \tag{2.157}$$

sau dacă $\|\Delta\|_\infty \le 1$, atunci:

$$\left| \frac{H_p(j\omega)}{\hat{H}_p(j\omega)} - 1 \right| \le \left| W_2(j\omega) \right|, \ \forall\omega \tag{2.158}$$

astfel că $\left|W_2(j\omega)\right|$ defineşte profilul incertitudinii.

Inegalitatea (2.158) descrie un disc în planul complex. La fiecare frecvenţă, punctul $H_p / \hat{H}_p$ se situează în cercul de centru 1 şi raza $|W_2|$. În general, $|W_2(j\omega)|$ este o funcţie crescătoare de ω, incertitudinea creşte cu creşterea frecvenţei. Includerea funcţiei de transfer Δ evidenţiază incertitudinea fazei şi acţionează ca un factor de scală asupra amplitudinii perturbaţiei ($|\Delta|$ variază între 0 şi 1) [60].

În cazul în care $\hat{H}_p(s) = \dfrac{\hat{A}_p(s)}{\hat{B}_p(s)}$, unde $\hat{A}_p(s)$ şi $\hat{B}_p(s)$ sunt stabile, coprime, incertitudinea poate fi inclusă în model şi sub forma:

$$H_p(s) = \frac{\hat{A}_p(s) + \Delta_1(s)}{\hat{B}_p(s) + \Delta_2(s)} \tag{2.159}$$

unde $\Delta_1(s)$ şi $\Delta_2(s)$ sunt stabile şi alături de $L_A(s)$ şi $L_M(s)$ reprezintă incertitudini nestructurate.

2.10. Exemple de modele obţinute prin modelare analitică

În cele ce urmează, sunt prezentate exemple de modele matematice obţinute pe cale analitică prin aplicarea legilor ce guvernează funcţionarea obiectelor fizice. Astfel, prin aplicarea legilor conservării masei, a energiei, a impulsului se pot obţine modele matematice sub forma unor ecuaţii diferenţiale sau ecuaţii cu derivate parţiale.

Exemplul 2.2

Se consideră sistemul mecanic din figura 2.16.

Presupunem că asupra masei M acţionează o forţă externă notată F_i. Deplasarea $h(t)$ a masei se raportează la o poziţie de echilibru h_0. Presupunem că resortul R este caracterizat prin constanta de elasticitate k, iar amortizorul A prin coeficientul de frecare vâscoasă f.

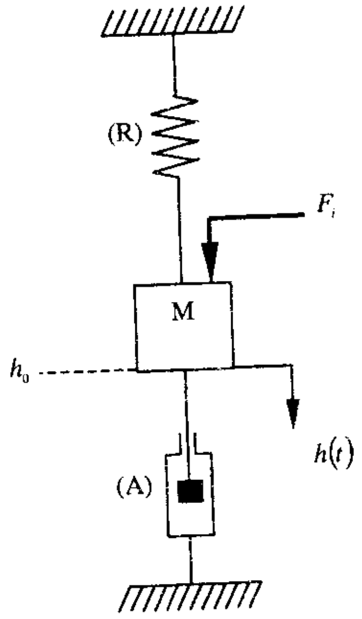


Fig. 2.16

Dacă admitem că amplitudinea forţei $F_i(t)$ este mică, astfel încât deplasarea $h(t)$ faţă de h_0 să fie suficient de mică, astfel încât constanta de elasticitate k şi coeficientul de frecare vâscoasă f să fie independente de deplasarea h şi de viteza de deplasare a masei, se poate obţine un model matematic simplificat, de forma:

$$M\frac{d^2h}{dt^2}+f\frac{dh}{dt}+kh=F_i \qquad (2.160)$$

unde:

- $M\frac{d^2h}{dt^2}$ *reprezintă forţa inerţială;*
- $f\frac{dh}{dt}$ *reprezintă forţa de frecare vâscoasă;*
- kh *reprezintă forţa elastică a resortului.*

Principul echilibrului forţelor, în ipotezele simplificatoare admise, a condus la un model liniar de ordinul doi. Dacă se consideră F_i ca fiind intrarea $u(t)$ în sistem şi $h(t)$ se consideră ieşirea $y(t)$ din sistem, modelul analitic ataşat structurii mecanice din figura 2.16 are forma:

$$M\frac{d^2y}{dt^2}+f\frac{dy}{dt}+ky(t)=u(t) \qquad (2.161)$$

sau

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\zeta\omega_n\frac{dy}{dt}+\omega_n^2y(t)=k_0\omega_n^2u(t) \qquad (2.162)$$

unde:

- $\zeta=\frac{f}{2\sqrt{kM}}$ *– reprezintă factorul relativ de amortizare;*
- $\omega_n=\sqrt{\frac{k}{M}}$ *– reprezintă pulsaţia naturală;*
- $k_0=\frac{1}{k}$ *– reprezintă coeficientul de transfer.*

Dacă deplasarea $h(t)$ faţă de h_0 este suficient de mare, astfel încât f să fie o funcţie de h şi $\dot{h}$, iar k să fie o funcţie neliniară de h, modelul matematic obţinut prin aplicarea aceluiaşi principiu al echilibrului forţelor capătă forma:

$$M\frac{d^2h}{dt^2}+f(h,\dot{h})\frac{dh}{dt}+k(h)\cdot h=F_i \qquad (2.163)$$

ceea ce ilustrează neliniaritate şi varianţă a parametrilor.

Exemplul 2.3

Considerăm sistemul mecanic prezentat în figura 2.17, unde masa M se deplasează odată cu deplasarea cartului sub acţiunea unei forţe externe.

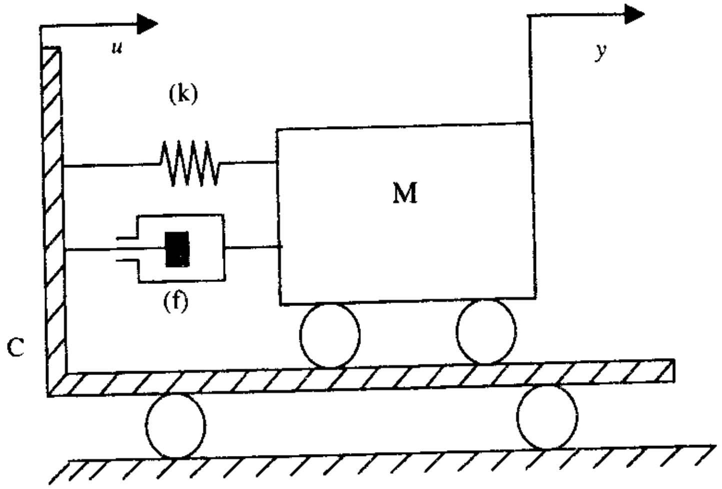


Fig. 2.17

Dacă se notează cu y deplasarea masei M şi cu u deplasarea cartului C, în ipoteza unor amplitudini reduse ale celor două variabile, prin aplicarea legii a doua a lui Newton, se obţine:

$$M\frac{d^2y}{dt^2}=-f\left(\frac{dy}{dt}-\frac{du}{dt}\right)-k(y-u) \qquad (2.164)$$

sau

$$M\frac{d^2y}{dt^2}+f\frac{dy}{dt}+ky=f\frac{du}{dt}+ku \qquad (2.165)$$

Funcţia de transfer ataşată modelului liniar al structurii mecanice considerate este:

$$H(s)=\frac{fs+k}{Ms^2+fs+k} \qquad (2.166)$$

În acest caz, parametrii modelului au semnificaţie fizică.

Exemplul 2.4

Se consideră sistemul de suspensie al unei motociclete, prezentat în figura 2.18.

Deplasarea celor două mase m_1 şi m_2 se obţine aplicând legea a doua a lui Newton în ipoteza acţiunii unei mărimi externe u de amplitudine redusă:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}&=k_2(y-x)+f(\dot{y}-\dot{x})+k_1(u-x)\\ m_2\ddot{y}&=-k_2(y-x)-f(\dot{y}-\dot{u}) \end{aligned} \qquad (2.167)$$

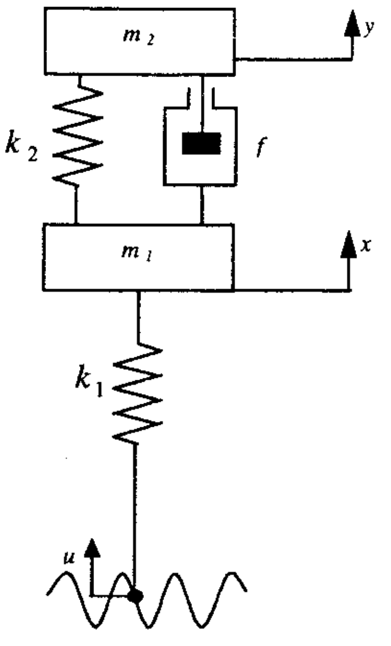


Fig. 2.18

Aplicând transformata Laplace acestor două ecuații liniare în condiții inițiale egale cu zero, obținem, după eliminarea variabilei intermediare $x(t)$, funcția de transfer atașată sistemului:

$$H(s)=\frac{k_1(fs+k_2)}{m_1m_2s^4+(m_1+m_2)fs^3+[k_1m_2+(m_1+m_2)k_2]s^2+k_1fs+k_1k_2} \quad (2.168)$$

Exemplul 2.5

Considerăm sistemul din figura 2.19.

În această schemă, $\overline{Q}_1$ și $\overline{Q}_2$ sunt debitele de fluid de intrare în regim staționar, iar $\overline{H}_1$ și $\overline{H}_2$ reprezintă nivelul în cele două rezervoare în regim staționar. Se consideră că q_{i1}, q_{i2}, h_1, h_2, q_1 și q_0 au valori mici. Admitem că cele două ventile prin care se vehiculează fluidul de debit q_1 și q_0 au o rezistență echivalentă R_1 și R_0, iar curgerea se consideră a fi laminară.

În aceste ipoteze, ecuațiile ce descriu funcționarea acestui sistem în care rezervoarele sunt considerate capacități, au forma:

$$\begin{aligned}
&C_1dh_1=(q_{i1}-q_1)dt\\
&\frac{h_1-h_2}{R_1}=q_1\\
&C_2dh_2=(q_1+q_{i2}-q_0)dt\\
&\frac{h_2}{R_2}=q_0
\end{aligned} \quad (2.169)$$

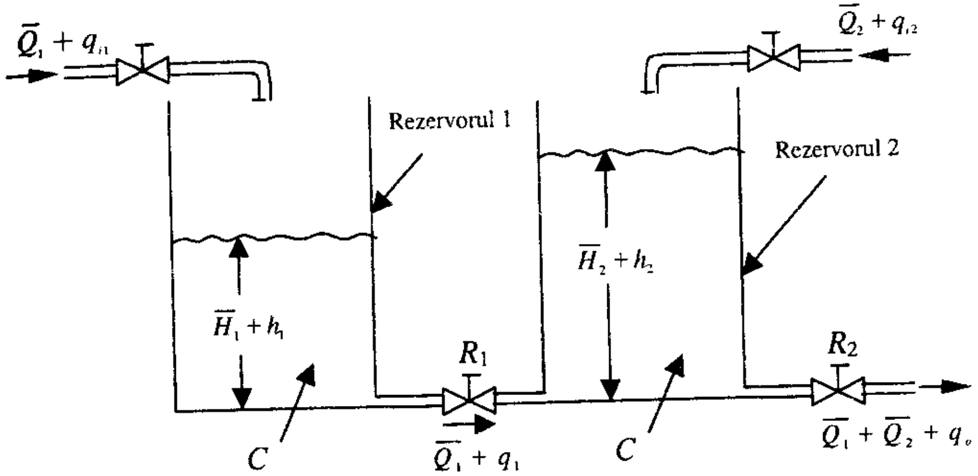


Fig. 2.19

Considerăm ca intrări în sistem debitele q_{i1} și q_{i2}, iar ca ieșiri, nivelurile în cele două rezervoare h_1 și h_2.

Dacă eliminăm variabilele intermediare q_1 și q_0 din ecuațiile (2.169), obținem:

$$\begin{aligned}
&\frac{dh_1}{dt}=\frac{1}{C_1}\left[q_{i1}-\frac{h_1-h_2}{R_1}\right]\\
&\frac{dh_2}{dt}=\frac{1}{C_2}\left[\frac{h_1-h_2}{R_1}+q_{i2}-\frac{h_2}{R_2}\right]
\end{aligned} \quad (2.170)$$

Pentru a obține un model de stare, selectăm:

$x_1=h_1$ *și* $x_2=h_2$; $y_1=h_1$

$u_1=q_{i1}$ *și* $u_2=q_{i2}$; $y_2=h_2$

și obținem:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{1}{R_1C_1}x_1 + \frac{1}{R_1C_1}x_2 + \frac{1}{C_1}u_1 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{R_1C_2}x_1 - \left(\frac{1}{R_1C_2} + \frac{1}{R_2C_2}\right)x_2 + \frac{1}{C_2}u_2\end{aligned} \qquad (2.171)$$

sau

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned} \qquad (2.172)$$

unde

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1C_1} & \frac{1}{R_1C_1} \\ \frac{1}{R_1C_2} & -\left(\frac{1}{R_1C_2} + \frac{1}{R_2C_2}\right) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix} \qquad (2.173)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplul 2.6

Se consideră sistemul prezentat în figura 2.20.

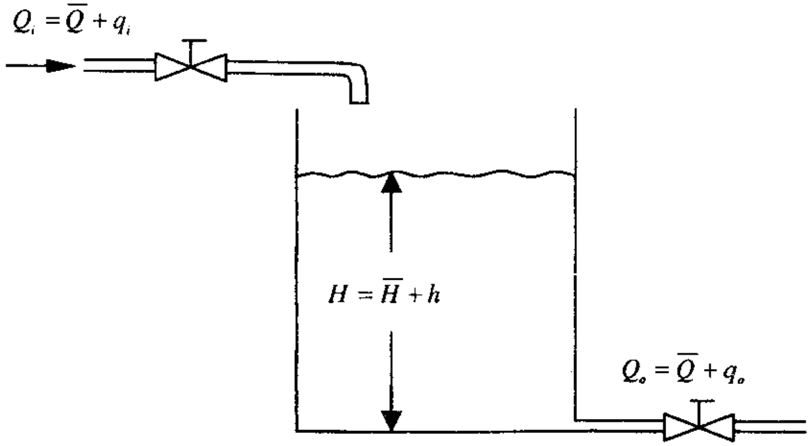


Fig. 2.20.

În regim staționar, debitul de intrare este $Q_i = \overline{Q}$, *debitul de ieşire este* $Q_o = \overline{Q}$, *iar nivelul în rezervor este* $H = \overline{H}$. *Presupunem că regimul de curgere al fluidului este turbulent, caz în care:*

$$\overline{Q} = k\sqrt{H}$$

unde k *este un coeficient de proporționalitate.*

Adăugarea debitului q_i *la intrare determină o modificare a nivelului de la* $H = \overline{H}$ *la* $H = \overline{H} + h$. *Ca urmare a modificării nivelului, se modifică şi debitul la ieşire, de la* $Q_o = \overline{Q}$ *la* $Q_o = \overline{Q} + q_0$.

Ecuația continuității se scrie în acest caz:

$$C\frac{dH}{dt} = Q_i - k\sqrt{H} \qquad (2.174)$$

unde C *reprezintă capacitatea rezervorului.*

Se obține în acest caz un model neliniar de forma:

$$\frac{dH}{dt} = f(H, Q_i) = \frac{1}{C}Q_i - \frac{k\sqrt{H}}{C} \qquad (2.175)$$

O ecuație liniarizată pentru (2.175) se obține sub forma:

$$\frac{dH}{dt} = -f(\overline{H}, \overline{Q}) = \frac{\partial f}{\partial H}(H - \overline{H}) + \frac{\partial f}{\partial Q_i}(Q_i - \overline{Q}) \qquad (2.176)$$

unde $f(\overline{H}, \overline{Q}) = 0$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial H}\right|_{\substack{H=\overline{H} \\ Q_i=\overline{Q}}} = -\frac{k}{2C\sqrt{H}} = -\frac{\overline{Q}}{\sqrt{\overline{H}}}\cdot\frac{1}{2C\sqrt{H}} = -\frac{\overline{Q}}{2C\overline{H}} = -\frac{1}{RC} \qquad (2.177)$$

unde $R = \frac{2\overline{H}}{\overline{Q}}$ *şi* $\left.\frac{\partial f}{\partial Q_i}\right|_{\substack{H=\overline{H} \\ Q_i=\overline{Q}}} = \frac{1}{C}$.

Cu aceste aproximații, se obține:

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{1}{RC}(H - \overline{H}) + \frac{1}{C}(Q_i - \overline{Q}) \qquad (2.178)$$

sau

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{RC}h + \frac{1}{C}q_i$$

respectiv

$$RC\frac{dh}{dt} + h = Rq_i \qquad (2.179)$$

care reprezintă ecuația liniarizată pentru sistemul considerat.

Exemplul 2.7

Se consideră pendulul invers montat pe un cărucior acționat electric (fig. 2.21).

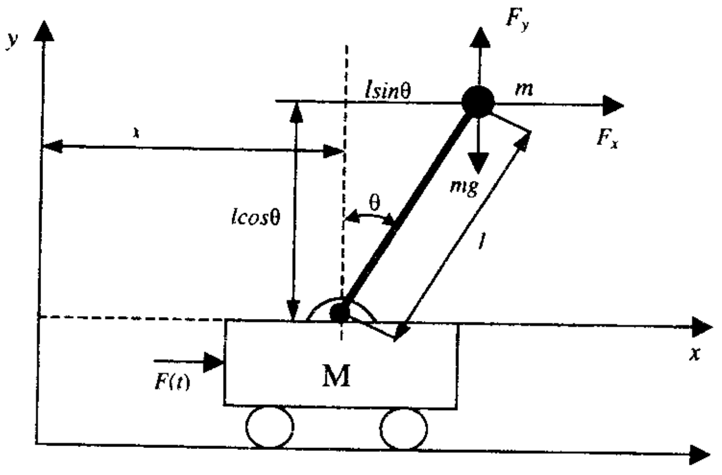


Fig. 2.21

Admițând că masa căruciorului este M și masa concentrată a pendulului este m se cere modelul matematic al ansamblului în prezența unei forțe F(t) ce acționează asupra căruciorului.

Considerăm că masa tijei pendulului este neglijabilă iar coordonatele centrului de greutate al masei pendulului sunt:

$$x_p = x + l\sin\theta$$

$$y_p = l\cos\theta \qquad (2.180)$$

unde l este lungimea tijei pendulului, iar θ este unghiul de deviație al pendulului față de axa verticală.

Ecuația echilibrului forțelor pe direcția x în prezența forței externe F(t) are forma:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + m\frac{d^2x_p}{dt^2} = F(t) \qquad (2.181)$$

dacă se neglijează forțele de frecare.

Dacă în ecuația (2.181) se introduce $\frac{d^2xp}{dt^2}$*, se obține:*

$$(M+m)\ddot{x} - ml\sin\theta * \dot{\theta}^2 + ml\cos\theta * \ddot{\theta} = F(t) \qquad (2.182)$$

Întrucât

$$\frac{d^2}{dt^2}\sin\theta = -\sin\theta * \dot{\theta}^2 + \cos\theta * \ddot{\theta}$$

și

$$\frac{d^2}{dt^2}\cos\theta = -\cos\theta * \dot{\theta}^2 - \sin\theta * \ddot{\theta}$$

cea de a doua ecuație de echilibru a cuplurilor reduse la punctul de pivotare al pendulului se obține pornind de la evidențierea forțelor ce acționează asupra masei m a pendulului.

Dacă notăm cu F_x forța ce acționează de-a lungul axei x și cu F_y forța ce acționează pe axa y prin aplicarea celei de a doua legi a lui Newton mișcării de rotație a pendulului, se obține:

$$(F_x\cos\theta)l - (F_y\sin\theta)l = (mg\sin\theta)*l$$

unde

$$F_x = m\frac{d^2xp}{dt^2} = m\left[\ddot{x} - l\sin\theta * \dot{\theta}^2 + l\cos\theta * \ddot{\theta}\right]$$

$$F_x = m\frac{d^2yp}{dt^2} = m\left[l\cos\theta * \dot{\theta}^2 + l\sin\theta * \sin\theta * \ddot{\theta}\right]$$

sau după înlocuirea forțelor F_x si F_y în ecuația de echilibru a cuplurilor și unele simplificări, se obține:

$$m\ddot{x}\cos\theta + ml\ddot{\theta} = mg\sin\theta . \qquad (2.183)$$

Modelul matematic atașat pendulului invers în ipotezele menționate este un model neliniar și are forma:

$$(M+m)\ddot{x} - ml\sin\theta * \dot{\theta}^2 + ml\cos\theta * \ddot{\theta} = F(t)$$

$$m\ddot{x}\cos\theta + ml\ddot{\theta} - mg\sin\theta = 0$$

Având în vedere că poziția de echilibru a pendulului este obținută pentru θ =0, se poate liniariza modelul în jurul acestei poziții.

Pentru a liniariza modelul matematic pentru $\theta(t) \cong 0$, scriem mai întâi ecuațiile (2.182) și (2.183) sub forma:

$$\left[M + m - m\cos^2\theta\right]\ddot{x} = F(t) + ml\sin\theta * \dot{\theta}^2 - mg\cos\theta\sin\theta$$

și

$$\left[ml\cos^2\theta - (M+m)l\right]\ddot{\theta} = F(t)\cos\theta - (M+m)g\sin\theta + ml\cos\theta\sin\theta$$

sau

$$\ddot{x} = \frac{F(t) + ml\sin\theta * \dot{\theta}^2 - mg\cos\theta\sin\theta}{M + m - m\cos^2\theta}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{F\cos\theta - (M+m)g\sin\theta + ml\cos\theta\sin\theta}{ml\cos^2\theta - (M+m)l}$$

Prin alegerea ca variabile de stare

$$x_1 = \theta,\ x_2 = \dot{\theta},\ x_3 = x \ \ si \quad x_4 = \dot{x}$$

se obţine modelul - intrare – stare - ieşire sub forma:

$$\dot{x} \equiv \begin{bmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\\ \dot x_3\\ \dot x_4\end{bmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\theta\\ \dot\theta\\ x\\ \dot x\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \dfrac{F\cos x_1 - (M+m)g\sin x_1 + ml\cos x_1 \sin x_1 x_2^2}{ml\cos x_4 - (M+m)l} \\ x_4 \\ \dfrac{F + ml\sin x_1 x_2^2 - mg\cos x_1 \sin x_1}{M+m-m\cos^2 x_1}\end{bmatrix}$$

sau

$$\dot x = f(x(t), F(t)) \equiv f(x(t), u(t)),$$

dacă se notează prin u(t) forţa de activare a căruciorului. Ieşirile sistemului θ si x sunt respectiv

$$y(t) = \begin{bmatrix}\theta\\ x_1\end{bmatrix} = C * x = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix} * x$$

Modelul liniarizat în jurul poziţiei de echilibru (x_0,u_0) *se obţine cu uşurinţă dacă se calculează derivatele funcţiei vectoriale f(x,u) în acest punct de echilibru. Astfel, elementele matricei Jacobian* $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0,u_0}$ *si* $\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x_0,u_0}$ *se calculează cu relaţiile:*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{-u\sin x_1 - (M+m)g\cos x_1 + ml(-\sin^2 x_1 + \cos^2 x_1)x_2^2}{\left[ml\cos^2 x_1 - (M+m)l\right]^2} - \frac{u\cos x_1 - (M+m)g\sin x_1 + ml\cos x_1 \sin x_1 . x_2^2}{\left[ml\cos^2 x_1 - (M+m)l\right]^2} * 2ml\cos x_1 \sin x_1$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_1} = \frac{ml\cos x_1 x_2^2 - mg\left(-\sin^2 x_1 + \cos^2 x_1\right)}{\left[M+m-m\cos^2 x_1\right]^2} - \frac{\left[u + ml\sin x_1 x_2^2 - mg\cos sx_1 \sin x_1\right]\left[-2m\cos x_1 \sin x_1\right]}{\left[M+m-m\cos^2 x_1\right]^2}.$$

Prima coloana a matricei A a sistemului liniarizat se obţine pentru (x_0,u_0), *dacă se calculează cele patru componente pentru* $\theta = 0, u = 0$:

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{x_0,u_0} = 0, \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{x_0,u_0} = \frac{(M+m)g}{Ml}, \left.\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right|_{x_0,u_0} = 0 \; si \; \left.\frac{\partial f_4}{\partial x_{xx}}\right|_{x_0u_0} = -\frac{mg}{M}.$$

În mod similar se calculează celelalte componente ale matricei A şi se obţine:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{(M+m)g}{Ml} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{-mg}{M} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pentru calculul matricei B se evaluează:

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial u}\right|_{x_0u_0}, \left.\frac{\partial f_2}{\partial u}\right|_{x_0u_0}, \left.\frac{\partial f_3}{\partial u}\right|_{x_0u_0} \; si \; \left.\frac{\partial f_4}{\partial u}\right|_{x_0u_0}$$

şi se obţine:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{\cos x_1}{ml\cos^2 x_1 - (M+m)l} \\ 0 \\ \dfrac{1}{M+m-m\cos^2 x_1} \end{bmatrix}_{x_0,u_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{Ml} \\ 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix}.$$

Dacă se notează prin δx *deviaţia stării faţă de starea zero si* δx, *variaţia comenzii faţă de comanda iniţială* $u_0 = 0$, *se obţine modelul matematic liniarizat:*

$$\delta\dot x = A\delta x + B\delta u$$

sau

$$\dot x = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

care reprezintă un sistem standard liniar invariant în timp. O formă simplificată, liniarizată se obţine şi dacă în ecuaţiile (2.182) şi (2.183) se consideră $\theta \approx 0$ *si* $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1, \theta.\dot\theta \approx 0$:

$$(M+m)\ddot x + ml\ddot\theta = F(t) \quad şi$$

$$m\ddot x + ml\ddot\theta = mg\theta.$$

Funcţiile de transfer $H_1(s) = \dfrac{X(s)}{F(s)}$ *si* $H_2(s) = \dfrac{\theta(s)}{F(s)}$ *se obţin, pentru condiţii iniţiale egale cu zero, sub forma:*

$$H_1(s) = \frac{mg - mls}{(M+m)(mg - mls^2)s^2 + m^2 l s^4} = \frac{g - ls^2}{(M+m)(g - ls^2)s^2 + mls^4} \quad şi$$

$$H_2(s) = \frac{1}{(M+m)g - Mls^2}.$$

Aceste funcţii de transfer evidenţiază instabilitatea sistemului.

3. PERFORMANȚELE SRA

3.1. Introducere

Aşa cum s-a menționat în capitolul 1, pentru proiectarea unui SRA se impune definirea obiectivelor și a cerințelor de performanță necesare în alegerea celei mai bune soluții de automatizare. Pentru structurile de reglare convenționale, în cadrul cărora se utilizează algoritmi standard PI sau PID, se impune acordarea acestora astfel încât anumite performanțe să fie realizate. În cazul general al sintezei structurii și strategiei de reglare/conducere a unui proces, selectarea modalităților de exprimare a cerințelor de performanță se realizează în funcție de particularitățile obiectului condus și de modelul matematic atașat acestuia.

Referitor la un SRA, obiectivele esențiale calitative ale acestuia sunt:

- rejecția perturbațiilor și
- urmărirea referinței.

Desigur, pentru proiectarea sistemelor de reglare automată și adoptarea soluției de automatizare a unui proces, pe lângă aceste obiective calitative, se vor include și cerințe specifice referitoare la *siguranța în funcționare, calitatea producției, operabilitatea procesului, conformitate cu standardele de mediu* etc.

Astfel, la proiectarea unui SRA trebuie avute în vedere nu numai aspectele specifice alegerii algoritmului de reglare (conducere), ci și întregul ansamblu de măsuri ce conferă soluției de automatizare *fiabilitate și robustețe, operabilitatea sigură în regimuri critice de funcționare* și, nu în ultimul rând, *costuri minime*.

Putem afirma că o soluție de automatizare trebuie să satisfacă, atât cerințe generale impuse de particularitățile instalației tehnologice și de mediul în care evoluează, cât și cerințe de performanță specifice atașate regimului optim de funcționare într-un context de perturbații precizate.

Cerințele de performanță atașate unui SRA vor fi definite în raport cu anumite mărimi exogene (referințe, perturbații) ce acționează asupra SRA.

Pornind de la formularea problemei de proiectare pentru o structură standard de SRA (fig. 3.1*a*), se pot defini cerințele de performanță în raport cu evoluția mărimilor de calitate $\tilde{y}$.

Astfel, cerințele calitative de performanță care sunt:

- stabilitatea asimptotică,
- precizia,
- performanțele tranzitorii,
- robustețea stabilității și a performanțelor tranzitorii,

se pot materializa în criterii locale sau globale de performanță, ce includ variabilele de calitate $\tilde{y}$.

Dându-se modelul $H_p(s)$ atașat procesului condus, se cere regulatorul caracterizat prin $H_R(s)$, astfel încât, pentru exogenul definit prin semnalele w, să se asigure evoluția dorită a mărimilor de calitate (reglate) $\tilde{y}$. Prin prelucrarea mărimilor măsurate y se generează comenzile u care asigură evoluția dorită mărimilor $\tilde{y}$.

O structură detaliată a SRA cu un singur grad de libertate (fig. 3.1 *b*) evidențiază toate mărimile exogene și, evident, reacția negativă inerentă într-un SRA.

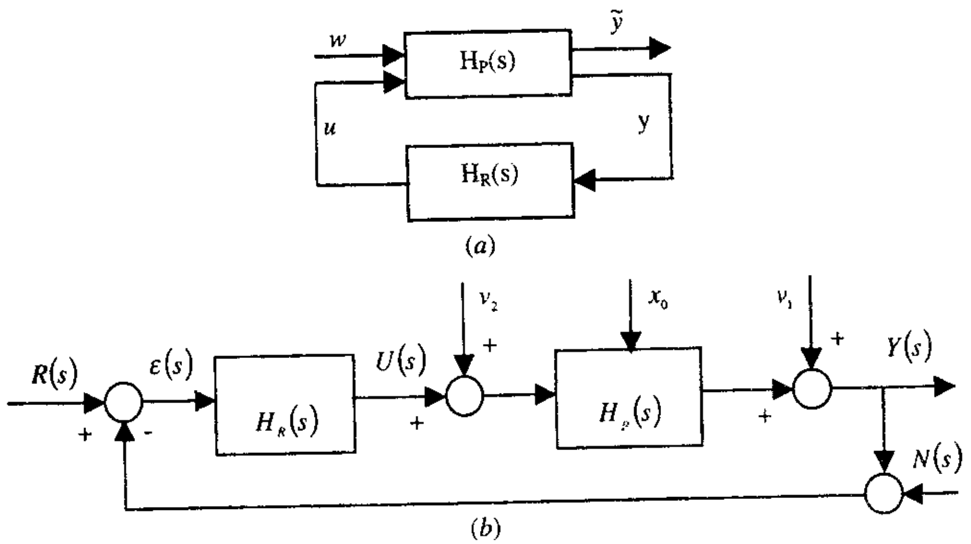


Fig.3.1

Este de menționat că reacția negativă are o serie de proprietăți benefice, printre care capacitatea de a reduce efectul perturbațiilor, de a descrește sensibilitatea la erorile de modelare sau de a stabiliza un sistem instabil.

În figura 3.1*b* sunt prezentate funcţiile de transfer (matricele de transfer pentru cazul sistemelor cu mai multe intrări şi mai multe ieşiri) ale procesului condus $H_p(s)$ şi ale regulatorului $H_R(s)$. Admitem, într-o primă etapă, că modelarea procesului se realizează fără erori, adică $H_p(s) \equiv \hat{H}_p(s)$, iar $H_p(s)$ şi $H_R(s)$ sunt raţionale în formă minimală (ireductibile):

$$H_p(s)=\frac{B_p(s)}{A_p(s)} \tag{3.1}$$

şi

$$H_R(s)=\frac{Q_R(s)}{P_R(s)} \tag{3.2}$$

unde polinoamele $Q_R(s)$ şi $P_R(s)$ au dimensiuni corespunzătoare.

Dacă se consideră x_0 starea iniţială a procesului, pot fi scrise relaţiile între variabilele de interes sub forma:

$$Y(s)=H_p(s)U(s)+H_p(s)V_2(s)+V_1(s)+\frac{F(s,x_0)}{A_p(s)} \tag{3.3}$$

$$U(s)=H_R(s)R(s)-H_R(s)Y(s)-H_R(s)N(s) \tag{3.4}$$

sau

$$U(s)=H_R(s)\left[R(s)-N(s)-H_p(s)U(s)-V_1(s)-H_p(s)V_2(s)-\frac{F(s,x_0)}{A_p(s)}\right], \tag{3.5}$$

unde $F(s,x_0)$ este o funcţie liniară de starea iniţială, $V_1(s)$ şi $V_2(s)$ reprezintă transformatele Laplace ale perturbaţiilor care acţionează la ieşirea şi la intrarea procesului, $N(s)$ reprezintă transformata Laplace a zgomotului de măsură, iar $R(s)$ reprezintă transformata Laplace a referinţei.

Cele două ecuaţii pot fi rezolvate şi aduse la forma:

$$U(s)=\frac{H_R(s)}{1+H_p(s)H_R(s)}\left[R(s)-N(s)-V_1(s)-H_p(s)V_2(s)-\frac{F(s,x_0)}{A_p(s)}\right] \tag{3.6}$$

şi

$$Y(s)=\frac{\left[H_p(s)H_R(s)(R(s)-N(s))+V_1(s)+H_p(s)V_2(s)+\frac{F(s,x_0)}{A_p(s)}\right]}{1+H_p(s)H_R(s)} \tag{3.7}$$

Arhitectura cu un singur grad de libertate prezentată în figura 3.1*b* reflectă faptul că există un singur grad de libertate disponibil pentru a asigura forma dorită a două funcţii de transfer de la $R(s)$ şi $N(s)$ la $Y(s)$ şi de la $V_1(s)$ şi $V_2(s)$ la $Y(s)$. Prin urmare, dacă funcţia de transfer $H_R(s)$ a

regulatorului este proiectată pentru a asigura un răspuns particular în raport cu referinţa

$$Y(s)=H_0(s)\cdot R(s)=\frac{H_R(s)H_P(s)}{1+H_R(s)H_P(s)}\cdot R(s)$$

$$H_0(s)=\frac{H_R(s)H_p(s)}{1+H_R(s)H_p(s)} \tag{3.8}$$

atunci aceasta induce un răspuns necontrolat în raport cu perturbaţia de ieşire:

$$H_{V_1}(s)=\frac{Y(s)}{V_1(s)}=\frac{1}{1+H_R(s)H_p(s)} \tag{3.9}$$

fără nici un grad de libertate.

Pentru a asigura comportarea dorită a SRA, atât în raport cu referinţa, cât şi în raport cu perturbaţia, pentru a satisface cele două obiective majore, *rejecţia perturbaţiilor* şi *urmărirea referinţei*, se adoptă o arhitectură de SRA cu două grade de libertate (fig. 3.2).

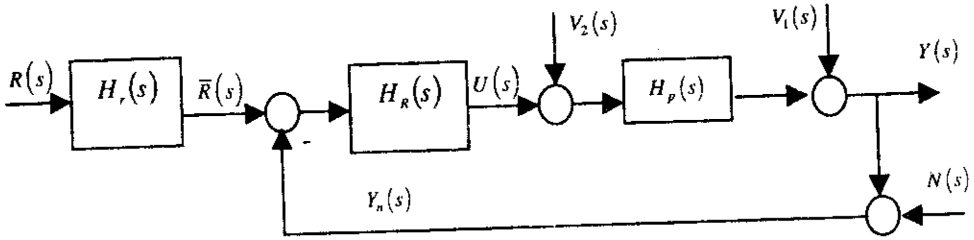


Fig. 3.2

Relaţiile ce definesc evoluţia variabilelor $Y(s)$ şi $U(s)$ în raport cu mărimile exogene şi starea iniţială x_0, în acest caz, au forma:

$$Y(s)=\frac{H_p(s)H_R(s)H_r(s)}{1+H_p(s)H_R(s)}R(s)+\frac{1}{1+H_R(s)H_p(s)}\left(V_1(s)+\frac{F(s,x_0)}{A_p(s)}\right)+ \\ +\frac{H_p(s)}{1+H_p(s)H_R(s)}V_2(s)-\frac{H_p(s)H_R(s)}{1+H_p(s)H_R(s)}N(s) \tag{3.10}$$

respectiv

$$U(s)=\frac{H_R(s)H_r(s)}{1+H_p(s)H_R(s)}R(s)-\frac{H_R(s)}{1+H_R(s)H_p(s)}\left(V_1(s)+\frac{F(s,x_0)}{A_p(s)}\right)- \\ -\frac{H_p(s)H_R(s)}{1+H_R(s)H_p(s)}V_2(s)-\frac{H_R(s)}{1+H_R(s)H_p(s)}N(s) \tag{3.11}$$

Din analiza relațiilor (3.10) și (3.11) rezultă că $H_R(s)$ poate fi selectată pentru a asigura comportarea dorită în raport cu perturbația, iar $H_r(s)$ poate fi selectată pentru a asigura comportarea dorită în raport cu referința.

De remarcat faptul că și în cadrul arhitecturilor cu două grade de libertate rămân funcții de transfer ce nu pot fi modificate independent. Astfel, $H_R(s)$ poate fi folosită pentru a asigura răspunsul dorit în raport cu una din perturbațiile $V_1(s)$, $V_2(s)$ sau $N(s)$, însă odată selectată, restul relațiilor nu pot fi modificate independent.

Din relațiile (3.10) și (3.11) observăm că pot fi definite următoarele funcții de sensibilitate:

$$T(s) := \frac{H_R(s)H_p(s)}{1+H_R(s)H_p(s)} = \frac{B_p(s)Q_R(s)}{B_p(s)Q_R(s)+A_p(s)P_R(s)} \quad (3.12)$$

$$S(s) := \frac{1}{1+H_R(s)H_p(s)} = \frac{A_p(s)P_R(s)}{B_p(s)Q_R(s)+A_p(s)P_R(s)} \quad (3.13)$$

$$S_2(s) := \frac{H_p(s)}{1+H_R(s)H_p(s)} = \frac{B_p(s)P_R(s)}{B_p(s)Q_R(s)+A_p(s)P_R(s)} \quad (3.14)$$

$$S_u(s) := \frac{H_R(s)}{1+H_R(s)H_p(s)} = \frac{Q_R(s)A_p(s)}{B_p(s)Q_R(s)+A_p(s)P_R(s)} \quad (3.15)$$

unde $S_i(s)$ reprezintă funcțiile de sensibilitate, iar $T(s)$ reprezintă funcția de sensibilitate complementară.

În cazul modelării proceselor fără erori, spunem că $S(s)$ și $T(s)$ sunt nominale.

Polinomul $\alpha_0(s) := B_p(s)Q_R(s)+A_p(s)P_R(s)$ reprezintă polinomul caracteristic al sistemului în circuit închis.

Prezintă interes pentru analiza SRA și funcția de transfer a sistemului deschis:

$$H_d(s) := \frac{Y(s)}{\varepsilon(s)} = H_R(s)H_p(s) = \frac{Q_R(s)B_p(s)}{P_R(s)A_p(s)} \quad (3.16)$$

Între funcțiile de sensibilitate definite mai sus există următoarele relații:

$$S(s)+T(s)=1 \quad (3.17)$$

$$S_2(s) = S(s)H_p(s) = \frac{T(s)}{H_R(s)} \quad (3.18)$$

$$S_u(s) = S(s)H_R(s) = \frac{T(s)}{H_p(s)} \quad (3.19)$$

Cu aceste funcții de sensibilitate definite, relațiile (3.10) și (3.11) pot fi rescrise sub forma:

$$Y(s) = T(s)[H_r(s)R(s) - N(s)] + S(s)\left[V_1(s) + \frac{F(s,x_0)}{A_p(s)}\right] + S_2(s)V_2(s) \quad (3.20)$$

și

$$U(s) = S_u(s)\left[H_r(s)R(s) - N(s) - V_1(s) - H_p(s)V_2(s) - \frac{F(s,x_0)}{A_p(s)}\right] \quad (3.21)$$

Se observă că ieșirile $Y(s)$ și $U(s)$ din proces și regulator sunt influențate de condițiile inițiale ale procesului prin relațiile date de:

$$S(s)\cdot\frac{F(s,x_0)}{A_p(s)} = \frac{F(s,x_0)Q_R(s)}{B_p(s)Q_R(s)+A_p(s)P_R(s)} \quad (3.22)$$

$$-S_u\cdot\frac{F(s,x_0)}{A_p(s)} = -\frac{F(s,x_0)}{B_p(s)Q_R(s)+A_p(s)P_R(s)} \quad (3.23)$$

Practic, în toate relațiile deduse anterior intervine polinomul caracteristic $\alpha_0(s)$ al SRA. Acest polinom, împreună cu polinoamele $Q_R(s)$, $P_R(s)$, $B_p(s)$ și $A_p(s)$ determină *caracteristicile tranzitorii*, *stabilitatea* și *precizia SRA* pentru diferite mărimi exogene.

Comportarea SRA poate fi descrisă compact prin modelul matriceal:

$$\begin{bmatrix} Y(s) \\ U(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{1+H_p(s)H_R(s)} \cdot \begin{bmatrix} H_p(s)H_R(s) & H_p(s) & 1 & -H_p(s)H_R(s) \\ H_R(s) & -H_p(s)H_R(s) & -H_R(s) & -H_R(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_r(s)R(s) \\ V_2(s) \\ V_1(s) \\ N(s) \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Analiza SRA presupune a verifica *stabilitatea*, *precizia*, *comportarea tranzitorie* și *robustețea* și a evalua valorile unor indicatori de performanță care să încadreze comportarea sistemului în domeniul admisibil sau inadmisibil. În cazul proiectării se aleg indicatorii (criteriile) de performanță care trebuie realizați prin selectarea arhitecturii SRA și a strategiei de reglare (conducere).

3.2. Stabilitatea SRA

Spunem, prin definiție, că un SRA este intern stabil dacă și numai dacă toate cele opt funcții de transfer din ecuația matriceala (3.24) sunt

stabile. Această definiție este echivalentă cu cerința ca toate semnalele în bucla de reglare să fie limitate pentru orice mulțime de mărimi exogene $r(t)$, $v_1(t)$, $v_2(t)$ și $n(t)$ limitate.

Se poate ușor observa din (3.24) și (3.12) – (3.15) că sistemul închis este intern stabil dacă și numai dacă polinomul caracteristic

$$\alpha_0(s) := B_p(s)Q_R(s) + A_p(s)P_R(s)$$

are factori stabili (zerourile situate în semiplanul stâng al planului complex). Demonstrația acestei leme rezultă imediat din ecuația (3.24) și din definiția stabilității interne.

Astfel, condiția necesară și suficientă ca un SRA să fie intern stabil este ca rădăcinile ecuației:

$$B_p(s)Q_R(s) + A_p(s)P_R(s) = 0 \tag{3.25}$$

să fie situate în semiplanul stâng al planului complex. De notat că ideea de stabilitate internă implică mai mult decât stabilitatea funcției de transfer în raport cu referința ($H_0(s) \equiv T(s)$).

În plus, se cere să nu existe compensări de poli instabili între modelul procesului și modelul regulatorului.

Polinomul caracteristic al sistemului poate fi scris sub forma:

$$\alpha_0(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_0 \tag{3.26}$$

sau dacă λ_i, $i = 1, 2, \cdots, n$ reprezintă zerourile lui $\alpha_0(s)$:

$$\alpha_0(s) = \prod_{i=1}^{n}(s - \lambda_i) \tag{3.27}$$

Rădăcinile λ_i pot fi reale și/sau complex conjugate, iar dacă admitem că toate sunt situate în semiplanul stâng al planului complex, rezultă următoarea forma a lui $\alpha_0(s)$:

$$\alpha_0(s) = \prod_{i=1}^{n_1}\left(s + |\gamma_i|\right)\prod_{i=1}^{n_2}\left(\left(s + |\sigma_i|\right)^2 + \omega_i^2\right) \tag{3.28}$$

unde $\lambda_i = -|\gamma_i|$, $i = 1, 2, \cdots, n_1$ reprezintă rădăcinile reale și $\lambda_{n_1+i} = -|\sigma_i| + j\omega_i$, $i = 1, 2, \cdots, n_2$ reprezintă rădăcinile complexe cu partea reală negativă.

Se poate observa că $\alpha_0(s)$ este alcătuit din produsul factorilor de ordinul întâi și de ordinul doi, iar coeficienții α_i sunt reali și pozitivi. Proprietatea ca toți coeficienții polinomului caracteristic să fie pozitivi reprezintă o condiție necesară ca polinomul $\alpha_0(s)$ să fie un polinom Hurwitz [46].

Ținând seama de relațiile între coeficienți și rădăcinile unui polinom, se poate deduce condiția necesară și suficientă pentru ca un SRA cu polinomul caracteristic $\alpha_0(s)$ să fie intern stabil. În acest sens, criteriul Routh-Hurwitz [20, 46] permite evaluarea stabilității sau instabilității interne a unui SRA.

Pentru analiza stabilității relative (gradul de stabilitate) a unui SRA, se pot utiliza caracteristicile de frecvență.

3.2.1. Stabilitatea relativă a SRA

Este evident faptul că proiectarea unui SRA urmărește în primul rând ca sistemul închis să fie stabil. În particular, este de dorit a obține criterii cantitative care să permită evaluarea gradului de stabilitate, adică a cuantifica *stabilitatea relativă*. Folosind reprezentarea polară a funcției de transfer $H_d(s) = H_R(s)H_p(s)$ în conformitate cu criteriul Nyquist, se poate aprecia stabilitatea sistemului închis caracterizat prin $H_0(s) = \dfrac{H_d(s)}{1 + H_d(s)}$.

Conform criteriului Nyquist [91], spunem că un sistem închis este stabil în cazul în care $H_d(s)$ nu conține poli în semiplanul drept, dacă locul de transfer atașat sistemului deschis nu înconjoară punctul critic $(-1,0)$ atunci când ω variază de la $-\infty$ la $+\infty$.

Dacă $H_d(s)$ conține p poli în semiplanul drept, atunci condiția necesară și suficientă ca sistemul închis să fie intern stabil este ca locul de transfer să înconjoare punctul critic $(-1,0)$ de p ori în sens antiorar (trigonometric), când ω variază de la $-\infty$ la $+\infty$.

În ambele cazuri este necesar ca în sistemul deschis să nu existe compensări de singularități instabile.

Dacă locul Nyquist (locul de transfer) trece prin punctul critic $(-1,0)$ există o frecvență $\omega_0 \in \Re$, astfel ca $\left|1 + H_R(j\omega_0)H_p(j\omega_0)\right| = 0$, adică sistemul închis are poli plasați pe axa imaginară. Această situație este cunoscută ca *„limita de stabilitate"* sau *„condiția de stabilitate critică"*.

În figura 3.3 se prezintă locul de transfer al unui SRA stabil cu $H_d(s)$ stabil. Dacă se notează:

- ω_c – pulsația pentru care $\left|H_d(j\omega_c)\right| = 1$ și
- ω_π – pulsația pentru care $\varphi(\omega_\pi) = \arg\left[H_d(j\omega_\pi)\right] = -180^0$

se pot introduce indicatori cantitativi pentru evaluarea gradului de stabilitate al SRA.

Astfel, în situaţia că sistemul este stabil, se definesc marginea de amplitudine $M_A(\omega)$ şi marginea de fază $M_\varphi(\omega)$:

$$M_A(\omega)=\frac{1}{\left|H_d\left(j\omega_\pi\right)\right|} \tag{3.29}$$

şi

$$M_\varphi(\omega)=180^{\circ}+\arg\left[H_d\left(j\omega_c\right)\right] \tag{3.30}$$

Aceşti indicatori furnizează informaţii privind comportarea SRA în raport cu un sistem la limita de stabilitate. Astfel, marginea de amplitudine indică necesarul de amplificare ce ar putea conduce SRA la limita de stabilitate, iar marginea de fază indică o rezervă de fază până la atingerea limitei de stabilitate ($\varphi(\omega)=-\pi$).

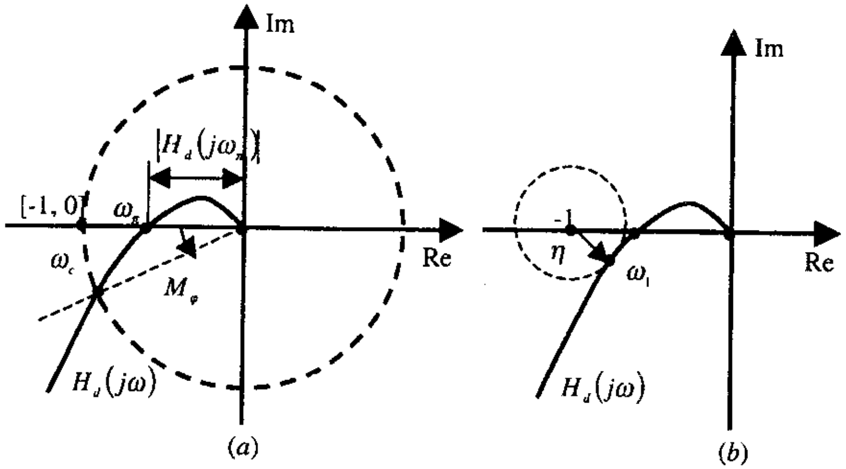


Fig. 3.3

Este evident că ambii indicatori, pentru a asigura stabilitatea, trebuie să fie pozitivi. Întrucât marginea de amplitudine se măsoară în decibeli, rezultă că $\left|H_d\left(j\omega_\pi\right)\right|<1$.

Valorile uzuale ale acestor indicatori de calitate sunt: $M_A=(4\div12)dB$ şi $M_\varphi=\left(30^{\circ}\div60^{\circ}\right)$. Aceste valori arată că atunci când $\left|H_d(j\omega)\right|=1$, faza $\varphi(\omega)=\left(120^{\circ}\div150^{\circ}\right)$, iar când $\arg\left[H_d(j\omega)\right]=-180^{\circ}$, amplitudinea are valori între 0.25 şi 0.63.

Un alt indicator pentru stabilitatea relativă este prezentat în figura 3.3*b*.

De observat că un vector din $(-1,0)$ la $H_d\left(j\omega_1\right)$, pentru $\omega=\omega_1$, corespunde la $1+H_d(j\omega_1)$, adică la $\left|S(j\omega_1)\right|^{-1}$. Astfel, raza η a cercului tangent la locul de transfer reprezintă valoarea maximă a lui $|S|^{-1}$. Cu cât amplitudinea lui S este mai mare, cu atât sistemul este mai aproape de instabilitate.

Marginile de stabilitate M_A şi M_φ pot fi definite şi în planul caracteristicilor logaritmice $A(\omega)$ şi $\varphi(\omega)$ (caracteristici Bode).

În figura 3.4 sunt evidenţiate cele două mărimi ce definesc indicatorii pentru stabilitatea relativă.

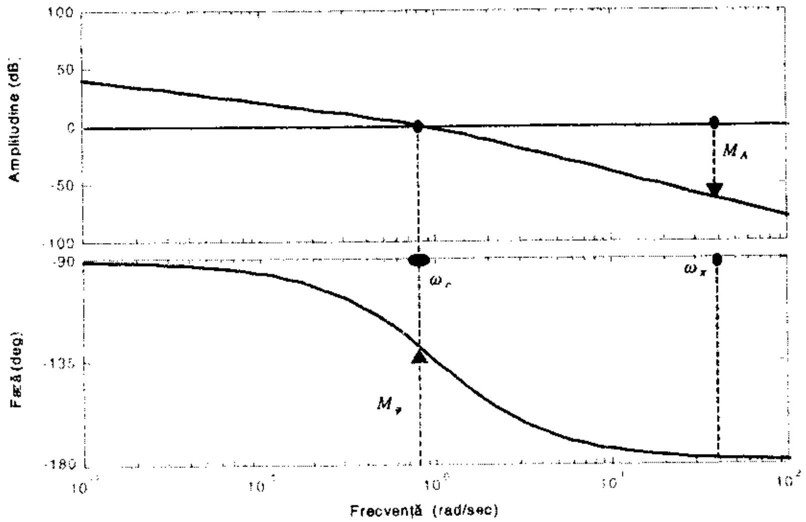


Fig. 3.4

Cei doi indicatori de calitate pot fi utilizaţi pentru proiectarea SRA sub forma:

$$\begin{aligned}M_A&\geq M_{A0}\\ M_\varphi&\geq M_{\varphi0}\end{aligned} \tag{3.31}$$

unde M_{A0} şi $M_{\varphi0}$ reprezintă valori limită acceptabile pentru realizarea unui grad de stabilitate dorit pentru sistemul închis.

În domeniul frecvenţelor pot fi utilizaţi şi alţi indicatori de calitate care să permită evaluarea comportării unui SRA.

Astfel, se pot defini *valoarea de vârf a amplificării SRA* şi *banda de frecvenţe* ω_B (fig. 3.5):

- $M_V = \max\left|T(j\omega_r)\right| \equiv \max\left|H_0(j\omega_r)\right|$, unde (3.32)
- ω_r – pulsațiile de rezonanță
- ω_B – reprezintă valoarea frecvenței pentru care amplitudinea

$M(\omega_B) = \frac{\sqrt{2}}{2} M_0$. De remarcat faptul că, cu cât M_v este mai mare, gradul de stabilitate este mai redus, iar cu cât ω_B este mai mare, cu atât comportarea în raport cu referința este mai bună și mai proastă în raport cu zgomotele (v. § 3.1).

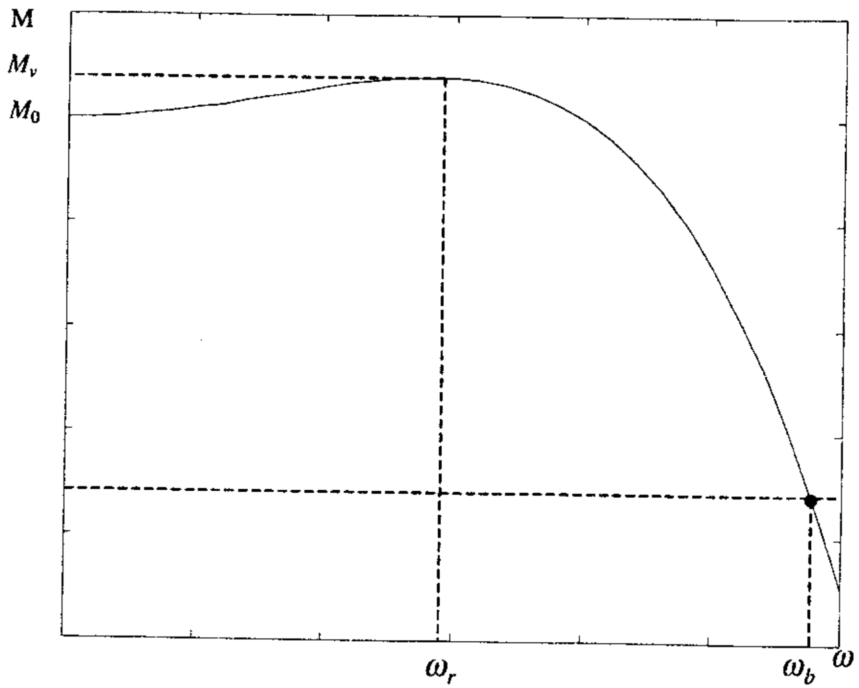


Fig. 3.5

Drept indicatori de calitate pentru proiectarea SRA pot fi folosiți, astfel, și:

$$M_V \le M_{V_0}$$

$$\omega_B \in \left[\omega_{B_1}, \omega_{B_2}\right] \quad (3.33)$$

Cu cât ω_B este mai mare, cu atât durata regimului tranzitoriu este mai mică. Dacă se dorește o comportare optimă a SRA în raport cu referința, neglijând efectul perturbațiilor, inclusiv al zgomotului, se poate cere pentru ω_B îndeplinirea condiției $\omega_B \ge \omega_{B_0}$. În acest caz, ω_{B_0} și M_{v_0} sunt indicatori acceptabili (valori limită) pentru realizarea unor performanțe satisfăcătoare ale SRA.

3.3. Precizia SRA în regim staționar (permanent)

Orice SRA are ca obiective rejecția perturbațiilor și urmărirea referinței. Abaterea față de regimul staționar fixat prin program este un indicator important pentru aprecierea calității SRA în regim staționar. Pentru diferite tipuri de intrări, un SRA răspunde diferit și eroarea în regim staționar pentru intrări de tip treaptă sau în regim permanent pentru intrări de tip rampă și parabolă pot fi egale cu zero sau diferite de zero.

Teoretic, este de dorit ca un SRA să aibă capacitatea de a răspunde la schimbări în poziție, viteză și accelerație cu eroare egală cu zero în regim staționar. În practică este nerealist să impunem asemenea cerințe severe de performanță, având în vedere că întotdeauna un SRA este supus acțiunii unor mărimi de tip *treaptă* (poziție), *rampă* (viteză) și *parabolă* (accelerație), fiind dificilă satisfacerea cerinței de eroare egală cu zero, simultan pentru toate cele trei tipuri de semnale polinomiale.

Pentru a evidenția calitatea comportării unui SRA în regim staționar (permanent) și a selecta indicatori de performanță, presupunem că SRA este stabil și este caracterizat prin funcțiile de transfer $H_d(s)$ și $H_0(s)$.

Pentru cazul în care funcția de transfer a căii directe $H_d(s)$ poate fi pusă sub forma:

$$H_d(s) = \frac{k_d(1+T_1 s)(1+T_2 s)\cdots(1+T_m s)}{s^{\alpha}\left[T_0^2 s^2 + 2\zeta T_0 s + 1\right](1+T_a s)(1+T_b s)\cdots(1+T_q s)} \quad (3.34)$$

sau

$$H_d(s) = \frac{k_d P_1(s)}{s^{\alpha} P_2(s)} = \frac{Q_d(s)}{P_d(s)}, \quad (3.35)$$

unde $P_1(s)$ și $P_2(s)$ sunt polinoame cu proprietatea că $P_1(0) = P_2(0) = 1$ și α reprezintă numărul de poli în originea planului complex, se calculează $S(s)$ cu relația:

$$S(s) = \frac{1}{1 + H_d(s)} = \frac{s^{\alpha} P_2(s)}{s^{\alpha} P_2(s) + k_d P_1(s)} \quad (3.36)$$

De remarcat faptul că valoarea lui α definește tipul sistemului. Pentru $\alpha=0$, sistemul este de tip 'zero' (pe calea directă nu există nici un integrator), pentru $\alpha=1$ sistemul este de tip 'unu' (calea directă conține un integrator), sistemul este de tip 'doi' (calea directă conține două integratoare) ș.a.m.d. În continuare, considerăm structura de SRA cu un grad de libertate (fig. 3.1), unde $H_R(s)$ și $H_p(s)$ au semnificația cunoscută.

Întrucât admitem că SRA este stabil, se poate aplica teorema valorii finale pentru calculul erorii în regim staţionar (permanent):

$$\varepsilon_{st} = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{s\to 0} s\varepsilon(s)$$

sau

$$\varepsilon_{st} = \lim_{s\to 0} sR(s)S(s) = \lim_{s\to 0} \frac{R(s)s^{\alpha+1}P_2(s)}{s^{\alpha}P_2(s)+k_d P_1(s)} \tag{3.37}$$

În practică nu se proiectează sisteme de reglare automata cu $\alpha > 2$, având în vedere dificultăţile de stabilizare a sistemului care conţine mai mult de două integratoare pe calea directă. Se poate realiza un compromis între precizia în regim staţionar şi stabilitatea relativă (gradul de stabilitate).

Pentru intrare treaptă unitară $R(s)=\frac{1}{s}$, din (3.37), obţinem:

$$\varepsilon_{st} = \lim_{s\to 0} s\frac{1/s}{1+H_d(s)} = \frac{1}{1+\lim_{s\to 0} H_d(s)} \tag{3.38}$$

Termenul $\lim_{s\to 0} H_d(s)$ este definit coeficient eroare de poziţie şi se notează cu k_P:

$$k_P = \lim_{s\to 0} H_d(s) \tag{3.39}$$

Astfel, eroarea în regim staţionar pentru intrare treaptă unitară şi un sistem de tip zero este:

$$\varepsilon_{st} = \frac{1}{1+k_P} = S(0) \equiv \varepsilon_P \tag{3.40}$$

Este de remarcat faptul că pentru $\alpha = 1$ şi $\alpha = 2$, coeficientul de eroare la poziţie este infinit.

Pentru intrare rampă unitară $R(s)=\frac{1}{s^2}$, eroarea în regim permanent ε_p se obţine:

$$\varepsilon_P \equiv \varepsilon_v = \lim_{s\to 0} s\frac{1/s^2}{1+H_d(s)} = \frac{1}{\lim_{s\to 0} sH_d(s)} \tag{3.41}$$

Prin definiţie, $\lim_{s\to 0} sH_d(s) = k_v$ reprezintă coeficientul de eroare la viteză.

Astfel, pentru intrarea rampă unitară, eroarea în regim staţionar (permanent) este:

$$\varepsilon_v = \frac{1}{k_v} \tag{3.42}$$

Pentru sisteme de tip 'unu' ($\alpha = 1$), eroarea în regim permanent (eroarea la viteză) este finită şi egală cu inversul coeficientului de eroare la viteză. Pentru $\alpha > 1$, coeficientul de eroare la viteză devine ∞ şi, în consecinţă, eroarea este egală cu zero.

Pentru intrare parabolă unitară $R(s)=\frac{1}{s^3}$, eroarea în regim permanent (eroarea la acceleraţie) se calculează cu relaţia:

$$\varepsilon_P \equiv \varepsilon_a = \lim_{s\to 0} s\frac{1/s^3}{1+H_d(s)} = \frac{1}{\lim_{s\to 0} s^2 H_d(s)} \tag{3.43}$$

Dacă notăm prin $k_a = \lim_{s\to 0} s^2 H_d(s)$ coeficientul de eroare la acceleraţie, eroarea se va calcula cu relaţia:

$$\varepsilon_a = \frac{1}{k_a} \tag{3.44}$$

Ca şi în cazurile anterioare, pentru $\alpha > 2$ se obţine eroare egală cu zero, întrucât coeficientul de eroare la acceleraţie devine infinit.

O sinteză a analizei valorii erorii pentru diferite tipuri de intrări şi tipuri de sisteme este prezentată în tabelul 3.1.

Tabelul 3.1

Intrări / Tip SRA (α)	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{s^3}$
0	$\frac{1}{1+k_P}$	∞	∞
1	0	$\frac{1}{k_v}$	∞
2	0	0	$\frac{1}{k_a}$

Din tabel rezultă cu uşurinţă că, în raport cu referinţa pentru intrări de tip treaptă, se obţine eroare staţionară egală cu zero numai dacă pe calea directă este inclus cel puţin un integrator. Pentru intrare rampă, se obţine eroare la viteză egală cu zero numai dacă pe calea directă se includ cel puţin două integratoare. De observat că pentru intrare parabolă, sistemele de tip 'doi' prezintă eroare la acceleraţie finită.

Se poate remarca din tabelul 3.1 că eroarea într-un SRA poate fi egală cu zero, poate fi finită sau infinită. Este important de observat că, dacă

intrările nu sunt unitare, erorile în regim staționar sunt proporționale cu amplitudinea acestora, întrucât analizăm sisteme liniare.

Pentru o intrare compusă, având toate componentele (poziție, viteză, accelerație) sub forma:

$$r(t)=Au(t)+Btu(t)+\frac{1}{2}Ct^2u(t) \tag{3.45}$$

unde $u(t)$ este semnalul unitar și coeficienții A, B și C definesc amplificările acestor componente, se obține răspunsul staționar prin considerarea fiecărei componente separat și aplicând principiul superpoziției.

Astfel:

$$\varepsilon_{st}=A\frac{1}{1+\lim\limits_{s\to 0}H_d(s)}+B\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}sH_d(s)}+C\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}s^2H_d(s)} \tag{3.46}$$

sau

$$\varepsilon_{st}=\frac{A}{1+k_P}+\infty+\infty \quad \text{pentru } (\alpha=0)$$

$$\varepsilon_{st}=0+\frac{B}{k_v}+\infty \quad \text{pentru } (\alpha=1)$$

$$\varepsilon_{st}=0+0+\frac{C}{k_a} \quad \text{pentru } (\alpha=2)\,.$$

Se poate observa că pentru diferite tipuri de sisteme pot fi urmărite anumite intrări cu eroare zero sau eroare finită.

Coeficienții de eroare pot fi calculați , așa cum s-a arătat, în funcție de $H_d(s)$, dar pot fi calculați și în funcție de configurația polilor și zerourilor funcției de transfer $H_0(s)$. Considerăm că toate singularitățile SRA sunt situate în semiplanul stâng.

Pentru acest demers vom considera relația:

$$T(s)=1-S(s)$$

sau

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=1-\frac{E(s)}{R(s)}$$

unde

$$T(s)=\frac{k_0(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}=\frac{k_0\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)} \tag{3.47}$$

iar funcția de sensibilitate $S(s)$ se dezvoltă în serie de puteri în s sub forma:

$$S(s)=\frac{1}{1+H_d(s)}=c_0+c_1s+c_2s^2+\cdots=\frac{1}{1+k_P}+\frac{1}{k_v}s+\frac{1}{k_a}s^2+\cdots \tag{3.48}$$

Cu aceste elemente precizate, vom determina relația între coeficienții k_P, k_v, k_a și polii și zerourile SRA.

Coeficientul de eroare la poziție k_P

Să considerăm $S(s)$ pentru $s=0$:

$$\frac{E(0)}{R(0)}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{1+H_d(s)}=S(0) \tag{3.49}$$

sau ținând seama de definiția coeficientului k_P:

$$S(0)=\frac{1}{1+k_P} \tag{3.50}$$

Ținând seama de relația existentă între $T(0)$ și $S(0)$, se obține:

$$T(0)=\frac{Y(0)}{R(0)}=\frac{k_P}{1+k_P} \tag{3.51}$$

sau

$$k_P=\frac{T(0)}{1-T(0)} \tag{3.52}$$

Dacă ținem seama de (3.47), se obține coeficientul de eroare la poziție sub forma:

$$k_P=\frac{k_0\prod_{i=1}^{m}z_i}{\prod_{j=1}^{n}p_j-k_0\prod_{i=1}^{m}z_i} \tag{3.53}$$

unde k_0 este factorul de transfer în regim staționar al sistemului închis.

Coeficientul de eroare la viteză k_v

Pentru a obține coeficientul k_v, introducem (3.48) în relația $T(s)=1-S(s)$:

$$T(s)=1-\frac{1}{1+k_P}-\frac{1}{k_v}s-\frac{1}{k_a}s^2-\ldots$$

și luăm derivata expresiei în raport cu s, pentru $s=0$:

$$\left[\frac{d}{ds}(T(s))\right]_{s=0}=-\frac{1}{k_v} \tag{3.54}$$

În plus, ținem seama de proprietatea SRA care, pentru treaptă unitară, are eroarea egală cu zero, și anume $T(0)=1$ pentru cazul în care $\alpha\geq 1$.

Astfel, se poate calcula eroarea la viteză folosind relația:

$$\frac{1}{k_v}=\frac{-\left[\frac{d}{ds}[T(s)]\right]_{s=0}}{[T(s)]_{s=0}}=-\left[\frac{d}{ds}\ln T(s)\right]_{s=0} \tag{3.55}$$

sau, dacă înlocuim expresia funcţiei de transfer $T(s)$ în relaţia de mai sus, obţinem:

$$\frac{1}{k_v} = -\left\{\frac{d}{ds}\left[\ln k_0 + \ln(s+z_1) + \cdots + \ln(s+z_m) - \ln(s+p_1) - \cdots - \ln(s+p_n)\right]\right\}_{s=0}$$

care poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{1}{k_v} = -\left[\frac{1}{s+z_1} + \cdots + \frac{1}{s+z_m} - \frac{1}{s+p_1} - \cdots - \frac{1}{s+p_n}\right]_{s=0} \quad (3.56)$$

sau

$$\frac{1}{k_v} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{p_j} - \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{z_i} \quad (3.57)$$

Coeficientul de eroare la acceleraţie k_a

Acest coeficient poate fi determinat într-o manieră similară ca în cazul precedent, pornind de la expresia:

$$T(s) = 1 - \frac{1}{1+k_P} - \frac{1}{k_v}s - \frac{1}{k_a}s^2 - \cdots$$

Este evident că $-\frac{2}{k_a}$ egalează derivata de ordinul doi a funcţiei $T(s)$ pentru $s=0$.

Astfel, ţinând seama ca $T(0)=1$ şi luând derivata de ordinul al doilea a logaritmului funcţiei $T(s)$, se obţine:

$$-\frac{2}{k_a} = \left\{\frac{d^2}{ds^2}\left[\ln T(s)\right]\right\}_{s=0} + \frac{1}{k_v^2} \quad (3.58)$$

sau, după efectuarea calculelor, pentru $s=0$:

$$-\frac{2}{k_a} = \frac{1}{k_v^2} + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{p_j^2} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z_i^2} \quad (3.59)$$

unde k_v este definit prin (3.57).

Exemplul 3.1

Să considerăm SRA de ordinul doi (fig. 3.6) unde:

$$H_d(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)} \text{ şi}$$

$$H_0(s) \equiv T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}.$$

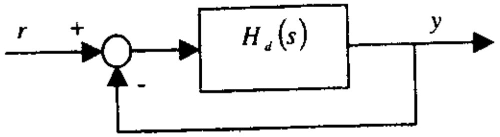


Fig. 3.6

Pentru referinţă treaptă unitară, $\varepsilon_{st} = 0$, pentru că $T(0)=1$:

$$\varepsilon_{st} = \lim_{s\to 0} S(s) = \lim_{s\to 0}[1 - T(s)] = \lim_{s\to 0}\frac{s(s+2\zeta\omega_n)}{s(s+2\zeta\omega_n)+\omega_n^2} = 0.$$

Pentru referinţă rampă se calculează coeficientul de eroare la viteză k_v:

$$k_v = \lim_{s\to 0} sH_d(s) = \frac{\omega_n^2}{2\zeta\omega_n} = \frac{\omega_n}{2\zeta}$$

iar eroarea la viteză este dată de relaţia:

$$\varepsilon_v = \frac{1}{k_v} = \frac{2\zeta}{\omega_n}.$$

Astfel, pentru a obţine un răspuns cât mai precis la intrări de tip rampă, factorul de amortizare ζ trebuie să fie cât mai mic. De reţinut că factorul ζ influenţează sensibil răspunsul tranzitoriu al SRA.

Coeficientul de eroare la viteză se poate calcula şi pornind de la expresiile celor doi poli complecşi conjugaţi ai SRA:

$$p_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$p_2 = -\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}.$$

Astfel, ţinând seama de relaţia (3.57) se obţine:

$$\frac{1}{k_v} = \frac{2\zeta\omega_n}{\omega_n^2}$$

$$\frac{1}{k_v} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{2\zeta}{\omega_n}.$$

Pentru proiectarea SRA pot fi folosite drept criterii de performanţă:

$$k_p \ge k_{p0}$$

$$k_v \ge k_{v0} \quad (3.60)$$

$$k_a \ge k_{a0}$$

care evidenţiază cerinţa ca SRA să aibă o precizie cât mai bună în regim staţionar. În relaţia (3.60) coeficienţii k_{p0}, k_{v0} şi k_{a0} reprezintă valorile limită admise pentru coeficienţii de eroare de poziţie, viteză şi acceleraţie.

Pentru rejecţia perturbaţiilor în regim staţionar (permanent) pot fi folosite relaţiile ce definesc ieşirea în raport cu V_1, V_2 şi N. În cazul în care se consideră perturbaţia ce acţionează la intrarea procesului, pentru calculul erorii se utilizează funcţia $S_2(s)=\dfrac{H_p(s)}{1+H_R(s)H_p(s)}$, întrucât efectul perturbaţiei V_2 asupra ieşirii se poate evalua prin intermediul funcţiei $S_2(s)$. Este evident că pentru un SRA stabil o perturbaţie de tip treaptă poate fi rejectată în regim staţionar dacă $S_2(0)=0$.

O asemenea cerinţă este satisfăcută numai dacă regulatorul conţine cel puţin un integrator în structură.

Astfel, dacă scriem:

$$S_2(s)=\frac{1}{\dfrac{1}{H_p(s)}+H_R(s)} \tag{3.61}$$

rezultă că $S_2(0)=0$ numai dacă $H_R(s)$ conţine un pol în origine. De observat că prezenţa unui pol în origine în $H_p(s)$, deşi asigură $\varepsilon_{st}=0$ în raport cu referinţa de tip treaptă, nu asigură rejecţia în regim staţionar a perturbaţiilor de tip treaptă. Astfel, pentru a asigura rejecţia perturbaţiilor în regim staţionar şi urmărirea referinţelor de tip treaptă, regulatorul trebuie să conţină cel puţin un integrator. Un asemenea rezultat confirmă principiul reglării cu includerea modelului exogenului cu model intern în structura regulatorului.

3.4. Evaluarea performanţelor în regim tranzitoriu

Pe lângă stabilitate şi precizie, se impune analiza răspunsului tranzitoriu şi evaluarea performanţelor. Caracteristicile răspunsului tranzitoriu al SRA sunt definite în raport cu intrări de tip treaptă.

Vom considera un sistem de ordinul doi care reprezintă o bună aproximare, chiar pentru sisteme de ordin mai mare, dacă sistemul are doi poli complex conjugaţi ca rădăcini dominante.

Astfel, dacă funcţia de transfer a sistemului închis este:

$$H_0(s)\equiv T(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \tag{3.62}$$

unde ζ şi ω_n au semnificaţia dată în capitolul 2, răspunsul indicial se calculează cu relaţia:

$$Y(s)=\frac{1}{s}\cdot H_0(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \tag{3.63}$$

Aplicând transformata Laplace inversă, se obţine:

$$y(t)=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2}+\varphi\right);\ t\ge 0 \tag{3.64}$$

unde $\varphi=\sin^{-1}\sqrt{1-\zeta^2}$.

În figura 3.7 este prezentat răspunsul indicial al unui SRA de ordinul al doilea.

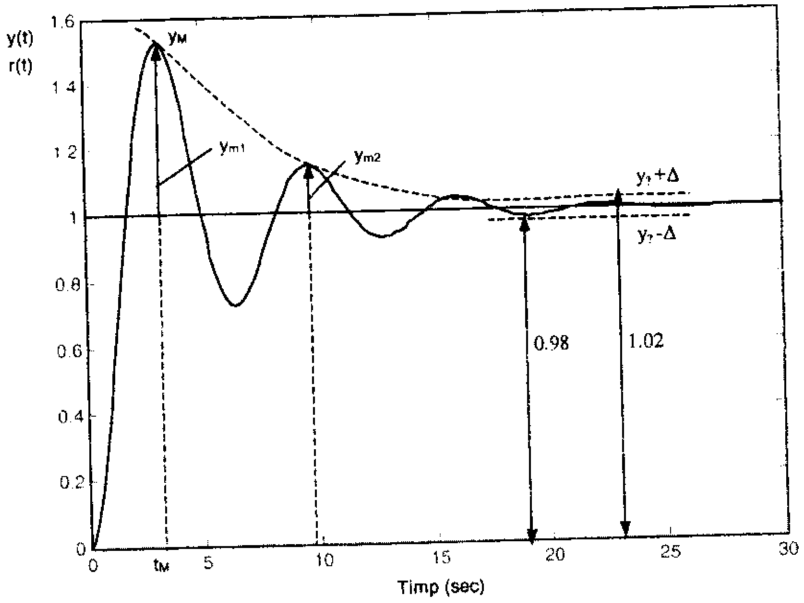


Fig. 3.7

Componenta staţionară a răspunsului forţat al SRA este:

$$y_{st}=\lim_{t\to\infty}y(t)=\lim_{s\to 0}sY(s)=1 \tag{3.65}$$

iar componenta tranzitorie este:

$$y_{tr}=\frac{-e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2}+\varphi\right) \tag{3.66}$$

care tinde la zero pentru $t\to\infty$.

Indicatorii de calitate ai răspunsului indicial al sistemului de ordinul al doilea sunt:

– *Valoarea de regim staționar* $y_{st} = y_\infty$, care reprezintă valoarea finală a ieșirii (aceasta se poate determina în cazul general dacă sistemul are toți polii în semiplanul stâng, adică sistemul este stabil).

– *Suprareglajul* σ, care se calculează în funcție de valoarea maximă a ieșirii Y_M, care depășește valoarea de regim staționar și se exprimă în procente sub forma:

$$\sigma\ \% = \frac{Y_M - y_{st}}{y_{st}} \cdot 100 \tag{3.67}$$

Pentru exemplul considerat, se calculează suprareglajul derivând (3.66) și calculând timpul t_M la care ieșirea atinge valoarea maximă:

$$\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=t_M} = 0 =$$

$$= -\frac{e^{-\zeta\omega_n t_M}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\left[-\zeta\omega_n \sin\left(\omega_n t_M\sqrt{1-\zeta^2}\right) + \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\cos\left(\omega_n t_M\sqrt{1-\zeta^2}+\varphi\right)\right]$$

iar

$$t_M = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{3.68}$$

Astfel, suprareglajul se calculează cu relația:

$$\sigma = Y(t_M) - 1 = \frac{-e^{-\zeta\frac{\pi\omega_n}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\pi+\varphi) = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \tag{3.69}$$

întrucât $\sin(\pi+\varphi) = -\sqrt{1-\zeta^2}$.

Această relație sugerează că un factor relativ de amortizare mic va conduce la un suprareglaj mai mare și invers.

De remarcat faptul că pentru orice SRA se urmărește obținerea unor valori ale suprareglajului cât mai mici, iar pentru multe procese se urmărește obținerea unor răspunsuri amortizate sau supraamortizate [34, 46, 76].

Timpul de stabilizare sau durata regimului tranzitoriu reprezintă timpul necesar ca răspunsul tranzitoriu să intre într-o bandă specificată de deviație $\pm\Delta$ în jurul valorii finale y_{st}. Această deviație, Δ, este uzual definită ca un procentaj față de y_{st}, $\Delta = 2\% \div 5\%$.

Dacă admitem o deviație $\Delta = 0.05$, în cazul particular analizat ($y_{st} = y_\infty = 1$) se poate calcula durata regimului tranzitoriu.

Astfel, dacă se notează cu t_t timpul de stabilizare, din (3.64) se obține cu ușurință:

$$t_t \approx -\frac{\ln 0.05\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta\omega_n} \tag{3.70}$$

considerând valoarea maximă a funcției $\sin\left(\omega_n t_t\sqrt{1-\zeta^2}+\varphi\right)$. Pentru sistemele de reglare automată cu $\zeta \in (0.6 \div 0.8)$, se poate utiliza o relație aproximativă pentru calculul duratei regimului tranzitoriu:

$$t_t \cong \frac{4}{\zeta\omega_n} \tag{3.71}$$

Timpul de creștere t_c se definește ca timpul necesar ca ieșirea să evolueze între $0.1 \cdot y_{st}$ și $0.9 \cdot y_{st}$, sau timpul necesar atingerii valorii $y(t_c) = 0.9 \cdot y_{st}$.

Timpul de întârziere t_i se definește ca timpul necesar ca ieșirea $y(t)$ să atingă 50% din valoarea de regim staționar, $y(t_i) = 0.5 \cdot y_{st}$.

Gradul de amortizare δ evidențiază viteza de descreștere a amplitudinilor pozitive ale răspunsului oscilant amortizat:

$$\delta = \frac{y_{m_1} - y_{m_2}}{y_{m_1}}, \tag{3.72}$$

unde y_{m_1} reprezintă amplitudinea maximă a ieșirii obținută la timpul $t_{M_1} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$, iar y_{m_2} reprezintă a doua amplitudine pozitivă a ieșirii obținută la $t_{M_2} = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$ (v. fig. 3.7).

Indicatorii de calitate ce caracterizează funcționarea unui SRA joacă un rol important în analiza și proiectarea acestora. De remarcat faptul că acești indicatori de calitate sunt determinați de poziția polilor și a zerourilor în planul complex.

Orice pol generează o componentă specială sau un mod natural în răspunsul pondere (răspunsul la impuls unitar). Aceste moduri sunt prezente în răspunsul sistemului la orice intrare dată (excepția apărând în cazuri foarte speciale, când polii coincid cu zerourile).

Este important a diferenţia polii sistemului în funcţie de poziţia lor în planul complex. Polii plasaţi foarte departe de axa imaginară sunt poli cu efect rapid asupra răspunsului tranzitoriu, iar polii apropiaţi de axa imaginară determină componentele lente ale răspunsului tranzitoriu. Spunem că aceşti din urmă poli reprezintă polii dominanţi sau polii lenţi ai SRA.

Spre exemplu, dacă un sistem are polii: $p_1 = -1$, $p_2 = -3$, $p_{3,4} = -4 \pm j6$, $p_{5,6} = -7 \pm j8$, spunem că polul $p_1 = -1$ este polul dominant şi polii $p_{5,6} = -7 \pm j8$ reprezintă polii rapizi.

Zerourile unui SRA joacă un rol esenţial în realizarea unei anumite comportări a acestuia. Este evident că zerourile unui SRA apar din interacţiunile aditive dintre stările asociate cu polii acestuia. Mai mult, zerourile unei funcţii de transfer depind de locul aplicării intrării şi de modul cum ieşirea este obţinută ca o funcţie de stări. Ca şi în cazul polilor, pot fi identificate *zerouri rapide* sau *zerouri lente*, în funcţie de poziţia faţă de limita de stabilitate în comparaţie cu polii dominanţi.

În cazul în care apar zerouri în semiplanul drept al planului complex, spunem că sistemul este de fază neminimă. În aceste situaţii, răspunsul sistemului la intrare treaptă poate evidenţia mai întâi o scădere şi apoi o creştere a ieşirii.

Exemplul 3.2

Pentru a ilustra acest efect, considerăm un sistem a cărui funcţie de transfer este:

$$H_0(s) = \frac{-s+z}{z(s+1)(0.5s+1)}.$$

Pentru diferite valori ale lui z *se obţin răspunsurile pondere prezentate în figura 3.8.*

Se poate constata că zerourile plasate în semiplanul drept determină o scădere a ieşirii, obţinându-se un subreglaj în comparaţie cu suprareglajul.

De observat că un zero rapid $|z| >> 1$ *nu are efect asupra răspunsului tranzitoriu. Când zeroul este lent şi stabil, se obţine un important suprareglaj, iar când este lent şi instabil (plasat în semiplanul drept), se obţine un subreglaj semnificativ.*

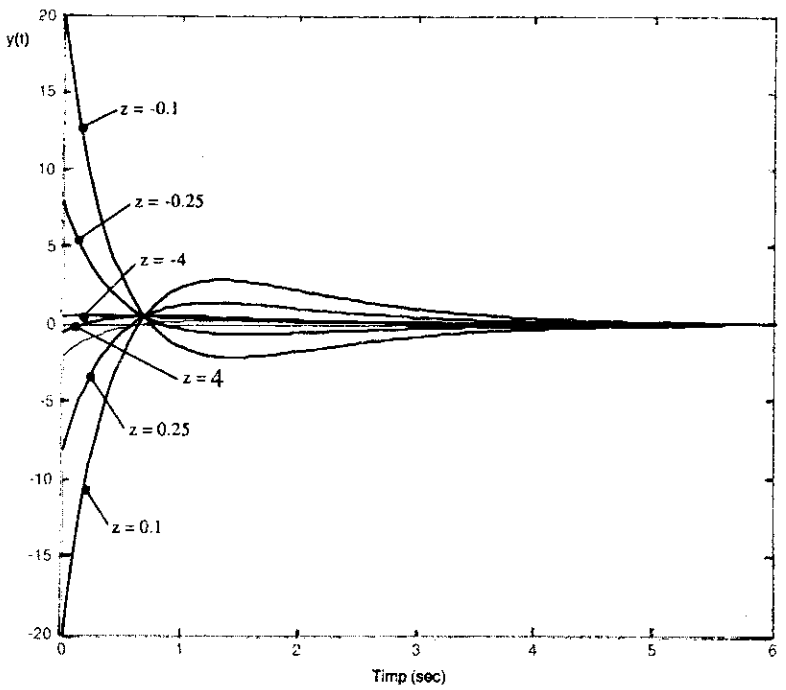


Fig. 3.8

În cazul în care un SRA are doi poli dominanţi, prezenţa unor poli sau/şi zerouri suplimentare în funcţia de transfer nu afectează semnificativ comportarea dată de cei doi poli dominanţi dacă singularităţile suplimentare (poli-zerouri) sunt plasate suficient de departe în semiplanul stâng în raport cu polii dominanţi.

În figura 3.9 se prezintă răspunsul indicial al SRA caracterizat prin funcţiile de transfer:

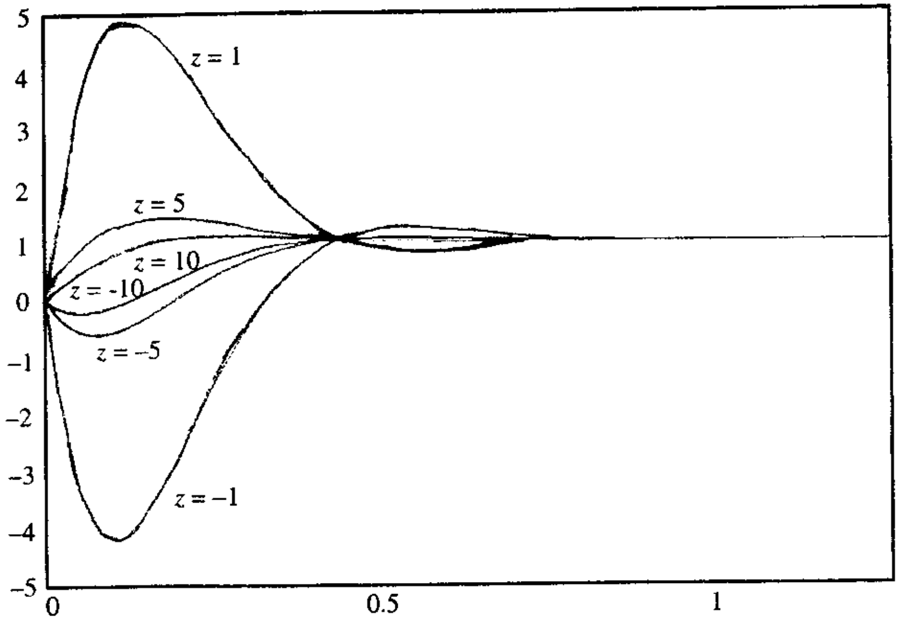
$$H_{01}(s) = \frac{(s+z)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{\omega_n^2}{z} \quad (3.73)$$

$$H_{02}(s) = \frac{\omega_n^2 p}{(s+p)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (3.74)$$

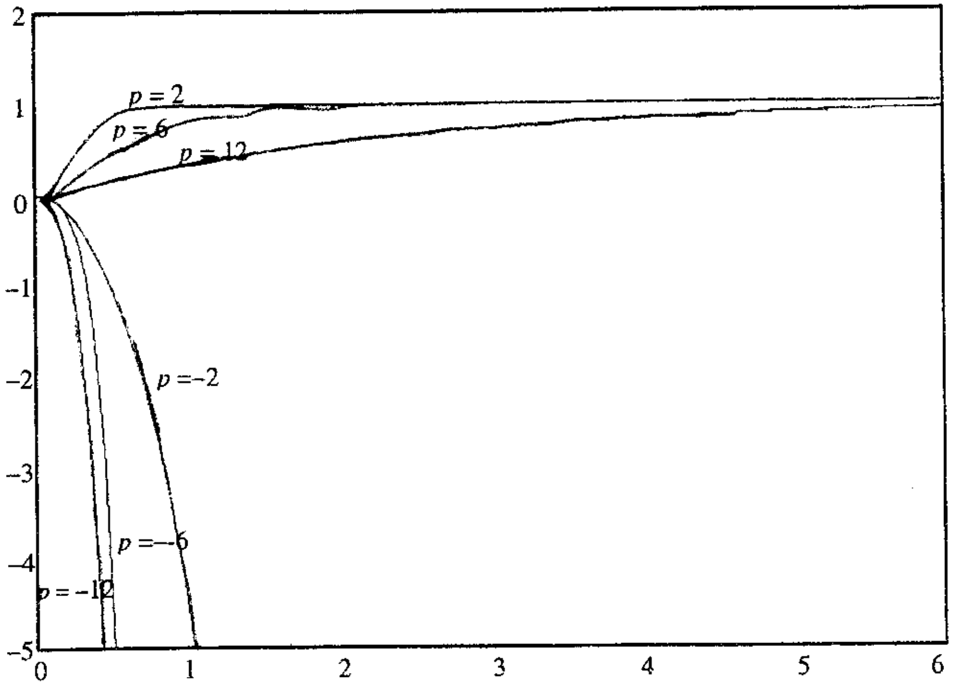
şi

$$H_{03}(s) = \frac{(s+z)}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \cdot \frac{p}{z} \cdot \frac{1}{s+p} \quad (3.75)$$

pentru $\zeta = 0.7$, $\omega_n = 10$, $|z| \in [1, 10]$, $|p| \in [2, 12]$.

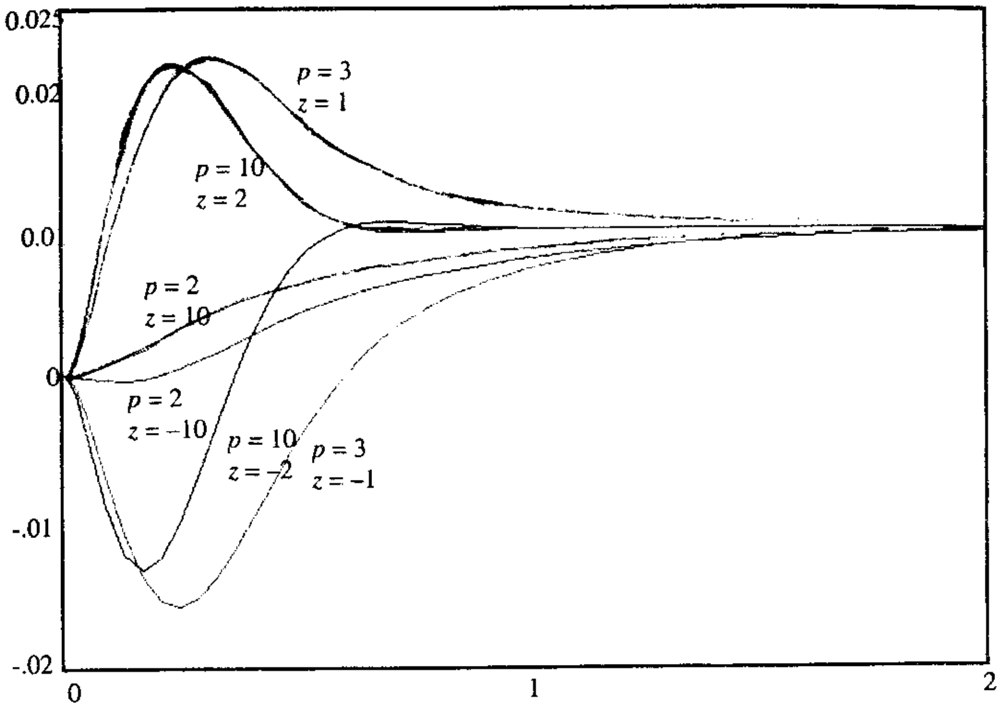


a)



b)

Fig. 3.9, a, b



c)

Fig. 3.9 (continuare).

3.4.1. Criterii locale de performanță

Evaluarea performanțelor unui SRA în domeniul real al timpului presupune determinarea indicatorilor de calitate pentru mărimi exogene precizate. Astfel, aprecierea comportării unui SRA se poate face în funcție de valoarea indicatorilor: σ, t_t, t_i, t_c, δ și, desigur, ținând seama de valorile erorilor ε_{st}, ε_v, ε_a.

Pentru proiectarea unui SRA pot fi folosiți acești indicatori sub forma unor relații de tip inegalitate:

$$
\begin{aligned}
&\sigma \le \sigma_0 \\
&t_t \le t_0 \\
&t_i \le t_{i0} \\
&t_c \le t_{c0} \\
&\delta \le \delta_0
\end{aligned}
\tag{3.76}
$$

unde valorile limită ale indicatorilor (σ_0, t_0, t_{i0}, t_{r0}, δ_0) reprezintă cerinţe impuse pentru obţinerea unei comportări dorite a SRA în raport cu o referinţă treaptă. Principial, în mod similar pot fi definiţi indicatorii de calitate pentru răspunsul SRA în raport cu perturbaţiile ce acţionează asupra procesului.

Relaţiile (3.76) definesc cerinţe locale de performanţă pentru un SRA sau performanţe impuse SRA în raport cu un anumit tip de referinţă. Dacă notăm prin D_a domeniul admisibil al performanţelor unui SRA, iar prin P_i o performanţă atinsă sub forma $I_1 \le I_0$ sau $I_1 \ge I_0$, unde I_1 reprezintă indicatori de calitate şi I_0 o limită admisibilă a acestora, atunci problema proiectării unui SRA se defineşte în raport cu D_a şi cu $P = \{P_1, P_2, \cdots, P_N\}$, mulţimea de performanţe ataşate acestuia.

Spunem că un sistem Σ_R corespunde setului de performanţe P dacă evoluţia sa determină valori pentru indicatorii de calitate în D_a, astfel încât fiecare performanţă P_i, $i = 1, 2 \cdots, N$, să fie îndeplinită.

În aceste condiţii, fiecare performanţă P_i acţionează ca o restricţie care îngustează clasa sistemelor Σ_R cu o comportare satisfăcătoare.

Alegerea cerinţelor de performanţă se face în strânsă corelaţie cu particularităţile procesului şi ale exogenului ce acţionează asupra sistemului închis. În cazul particular al cerinţelor de performanţă (3.76), acestea reprezintă individual o comportare locală şi nu o comportare globală a întregului SRA. În multe cazuri, performanţele locale sunt influenţate diferit de parametrii ajustabili ai SRA.

Pentru cazul particular al SRA de ordinul doi, apar contradicţii între cerinţele de performanţă şi variaţia parametrilor sintetici ζ şi ω_n.

Astfel, valori mici ale lui ζ determină valori mari ale lui σ şi, în mod corespunzător, valori mari ale timpului de stabilizare, fiind dificil a obţine un răspuns cu t_t redus şi σ mic. În mod similar, pot fi evidenţiate diferite relaţii între performanţele SRA în raport cu referinţa şi perturbaţia ce acţionează la intrarea procesului.

De observat că durata regimului tranzitoriu, pentru ζ fixat, este invers proporţională cu pulsaţia naturală ω_n a SRA. Aceasta arată că t_t poate fi modificat fără schimbarea factorului de amortizare ζ, care se determină dintr-o condiţie de forma $\sigma \le \sigma_0$. Rezultă că, pentru a obţine răspunsuri rapide, trebuie alese valori mari pentru ω_n.

Ţinând seama că răspunsul tranzitoriu al SRA de ordinul doi cu $\zeta \in (0,\ 1)$ este caracterizat prin 5 indicatori de calitate, iar numărul de parametri ajustabili este egal cu doi, în mod natural apar relaţii contradictorii între valorile parametrilor ζ şi ω_n şi criteriile locale de performanţă, existând astfel o neconcordanţă între gradul de libertate parametrică şi performanţele impuse.

3.4.2. Indicatori integrali de performanţă

În mod natural, se impune definirea unor criterii globale de performanţă, a căror valoare minimă sau maximă să asigure soluţii optimale sau suboptimale. În cele ce urmează, vor fi introduse diferite forme ale criteriilor de performanţă, în funcţie de eroare şi de timp, dar şi criterii globale de performanţă, care stau la baza sintezei comenzii optimale.

Cel mai simplu şi cel mai utilizat criteriu de performanţă este definit sub forma:

$$I_1 = \int_0^\infty \varepsilon^2(t)dt \tag{3.77}$$

Prin utilizarea integralei erorii pătratice, se penalizează atât valorile pozitive, cât şi valorile negative ale erorii. Acest criteriu este cunoscut în literatura de specialitate sub denumirea „ISE" (Integral Square Error). Pentru un sistem de ordinul doi cu parametrii ζ şi ω_n, acest indicator de performanţă are o valoare minimă, pentru $\zeta \cong 0.5$.

Un alt indicator de performanţă este definit în funcţie de valoarea absolută a erorii:

$$I_2 = \int_0^\infty |\varepsilon(t)|dt \tag{3.78}$$

Prin utilizarea amplitudinii erorii, integrala creşte pentru eroare pozitivă sau negativă şi rezultă un sistem subamortizat. Pentru un sistem de ordinul doi, acest indicator de performanţă are un minim pentru $\zeta \cong 0.7$. Acest indicator este cunoscut ca „IAE" (Integral Absolute Error).

Un criteriu foarte util, ce penalizează răspunsurile de lungă durată, este cunoscut ca „ITAE" (Integral of Time multiplied by the Absolute value of Error) şi este dat prin:

$$I_3 = \int_0^\infty t|\varepsilon(t)|dt \tag{3.79}$$

Acest indicator de performanţă este mult mai selectiv decât IAE şi ISE. Pentru un sistem de ordinul doi, I_3 are un minim pentru $\zeta = 0.7$.

Criteriul ISE nu este foarte sensibil la variaţiile parametrilor, deoarece minimul este uzual suficient de larg şi nu prezintă dificultăţi de

calcul. Criteriul IAE are o mai bună sensibilitate decât ISE. Criteriul ITAE, în general, produce oscilații și suprareglaje mai mici decât criteriile IAE și ISE, însă are sensibilitate ridicată la variațiile parametrilor.

Variante ale acestor criterii sunt prezentate în literatură [17, 31], unele dintre acestea având o valoare practică importantă. Un criteriu de performanță utilizat în proiectarea SRA cu răspuns aperiodic are forma:

$$I_4=\int_0^{\infty}\left(\varepsilon^2(t)+T^2\dot{\varepsilon}^2(t)\right)dt \tag{3.80}$$

unde T reprezintă constanta de timp atașată răspunsului aperiodic optimal.

O altă variantă a criteriilor pătratice include și un termen definit în funcție de efortul de comandă, sub forma:

$$I_5=\int_0^{\infty}\left(\varepsilon^2(t)+\rho u^2(t)\right)dt \tag{3.81}$$

unde $\rho>0$ reprezintă factorul de penalizare al comenzii. Prin minimizarea acestui criteriu de performanță se asigură, pe lângă evoluția dorită a erorii, răspuns tranzitoriu dorit și o minimizare a efortului de comandă cu limitarea comenzii, în concordanță cu particularitățile elementului de execuție.

În cazul în care modelul matematic atașat obiectului condus este de tipul intrare – stare – ieșire, se poate utiliza un criteriu de forma:

$$I_6=\int_0^{\infty}\left(x^TQx+\rho u^2(t)\right)dt \tag{3.82}$$

pentru un sistem cu o intrare și o ieșire sau

$$I_7=\int_0^{\infty}\left(x^TQx+u^TRu\right)dt\,, \tag{3.83}$$

unde Q este o matrice de ponderare pătratică simetrică, semipozitiv definită, iar R este o matrice de ponderare pătratică simetrică, pozitiv definită.

Forma generală a unui criteriu de performanță atașat unei probleme de conducere optimală este:

$$I_8=F\left(x(t_f)\right)+\int_0^{tf}L(x,u,t)dt \tag{3.84}$$

unde $F\left(x(t_f)\right)$ reprezintă funcția cost final, iar $L(x,u,t)$ reprezintă funcția cost pe parcurs. F și L sunt funcții diferențiabile.

Minimizarea unui criteriu de forma (3.84), unde funcțiile F și L pot avea diverse forme, asigură evoluția optimală a sistemului după o traiectorie optimală în prezența unor restricții de forma:

$$\begin{aligned}&\dot{x}=f(x,u,t)\\&y=g(x,u,t);\ x_0\in R^n\end{aligned} \tag{3.85}$$

și

$$u(t)\in U_a \tag{3.86}$$

unde U_a reprezintă mulțimea comenzilor admisibile.

Este de remarcat faptul că, pentru un SRA performanțele pot fi specificate în funcție de forma și dimensiunea unor semnale de interes. În cazul sistemelor de urmărire, măsura performanței este dată de dimensiunea semnalului de eroare. În acest caz, utilizarea unui criteriu de forma ISE se reduce la calculul normei 2 a semnalului de eroare.

Astfel, norma 2 a erorii ε se calculează cu relația:

$$\|\varepsilon\|_2^2:=\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon^2(t)dt \tag{3.87}$$

sau în cazul general al SRA având ca ieșire vectorul mărimilor de calitate $\tilde{y}$, cerințele de performanță pot fi exprimate prin intermediul normei:

$$\|\tilde{y}\|_2^2:=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{y}^2(t)dt\ \le m_0 \tag{3.88}$$

Performanțele se exprimă astfel prin valoarea "mică" a lui $|\varepsilon(j\omega)|$ sau $|\tilde{y}(j\omega)|$, ceea ce presupune ca $|S^{-1}(j\omega)|=|1+H_d(j\omega)|$ să fie cât mai mare, întrucât $\varepsilon(j\omega)=S(j\omega)\cdot R(j\omega)$. Această cerință poate fi explicitată riguros prin inegalitatea:

$$|1+H_d(j\omega)|\ge m_p,\ \omega\in[0,\omega_0] \tag{3.89}$$

unde $[0,\omega_o]$ este intervalul activ de frecvență al SRA, adică acel interval care include zonele de frecvență în care referințele și perturbațiile au valori "semnificative". De regulă, $m_p(\omega)$ crește când $\omega\to 0$, pentru ca eroarea staționară să fie cât mai mică.

Este ușor de evidențiat faptul că o amplificare mare a căii directe $|H_d(j\omega)|$ duce la o bună asigurare a performanțelor. Această remarcă rezidă în faptul că $|H_d(j\omega)|$ aproximează bine $|1+H_d(j\omega)|$ pentru acele frecvențe ω pentru care $|H_d(j\omega)|>>1$.

Observația 1: Cerința de amplificare mare în circuit deschis (așa cum se dorește în fond) conduce la creșterea efectului zgomotului asupra erorii. Această observație este evidentă dacă se exprimă eroarea în funcție de zgomot (fig. 3.10).

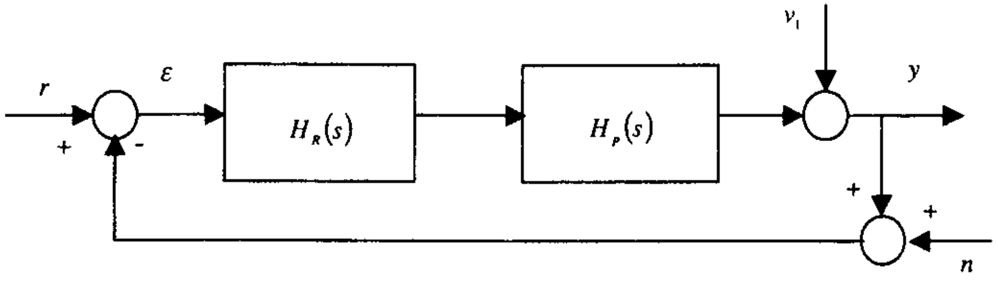


Fig. 3.10

Astfel:

$$\varepsilon(j\omega)=\frac{1}{1+H_d(j\omega)}\left(r(j\omega)-v_1(j\omega)\right)+\frac{H_d(j\omega)}{1+H_d(j\omega)}n(j\omega)$$

ceea ce arată ca pentru $|H_d(j\omega)|$ mare se obține:

$$\varepsilon(j\omega)\cong n(j\omega) \tag{3.90}$$

Această relație arată că dacă n este mare, adică dacă intervalul activ de frecvență al SRA include amplitudini mari ale zgomotului, acesta va avea realmente un efect nociv asupra performanțelor SRA.

Observația 2: O amplificare mare în circuit deschis pentru intervale mari de frecvență determină o „intensificare" a efectului comenzii. Din figura 3.10 rezultă cu ușurință:

$$u(j\omega)=\frac{1}{H_p(j\omega)}\cdot T(j\omega)\cdot\left(r(j\omega)-n(j\omega)-v_1(j\omega)\right) \tag{3.91}$$

Pentru procesele uzuale, $|H_p(j\omega)|$ este de regulă mic pentru ω mare (procesele comportându-se ca filtru „trece jos") și, în consecință, amplitudinea lui u va fi puternic intensificată de toate mărimile exogene ale sistemului, cu reale consecințe asupra uzurii instalației tehnologice.

Ținând seama de cele două observații, se impune limitarea valorilor amplificării în circuit deschis, pentru anumite intervale de variație ale frecvenței.

3.5. Robustețea stabilității și a performanțelor

Admițând că sistemul condus este supus perturbațiilor parametrice sub forma multiplicativă, apare în mod firesc cerința proiectării regulatorului care să asigure robustețea stabilității și a performanțelor.

Dacă se consideră incertitudinile sub forma multiplicativă, atunci,

$$H_p(j\omega)=\hat{H}_p(j\omega)\ \left(1+L_M(j\omega)\right) \tag{3.92}$$

unde

$$|L_M(j\omega)|\le l_m(\omega)$$

iar H_p și $\hat{H}_p$ au același număr de poli situați în semiplanul drept. Funcția de transfer $\hat{H}_p$ reprezintă modelul nominal atașat procesului condus.

3.5.1. Condiția de stabilitate robustă

Conform criteriului Nyquist, bucla nominală va fi stabilă dacă, și numai dacă, hodograful $\hat{\Gamma}(j\omega)=1+\hat{H}_d(j\omega)$, înconjoară originea în sens trigonometric, de un număr de ori egal cu numărul de poli instabili ai lui $\hat{H}_d(s)$, atunci când ω parcurge intervalul $[-\infty,+\infty]$ (se acceptă pentru simplitate ca $\hat{H}_d(s)$ nu are poli pe axa imaginară), $\hat{H}_d(s)=H_R(s)\cdot\hat{H}_p(s)$.

În prezența incertitudinilor, bucla perturbată cu $H_d(s)=H_pH_R(s)$ va fi stabilă dacă și numai dacă hodograful $\Gamma(j\omega)=1+H_d(j\omega)$ va înconjura originea în sens trigonometric, exact de același număr de ori ca și hodograful nominal, oricare ar fi H_p definit prin (3.92)

Această ultimă condiție este adevărată dacă și numai dacă $\hat{\Gamma}(j\omega)$ posedă proprietatea enunțată (sistemul nominal) și

$$\left|1+\left(1+L_M(\omega)\right)\hat{H}_d(j\omega)\right|>\ 0,\ \forall\omega\ge 0\ \text{și}\ \forall\ L_M \tag{3.93}$$

ce verifică (3.92).

Această a doua condiție este echivalentă și cu condiția :

$$\left|1+\left(1+L_M(j\omega)\right)\hat{H}_d(j\omega)\right|>\ 0,\ \forall\omega\ge 0 \tag{3.94}$$

și $\forall L_M$ care verifică condiția $|L_M(j\omega)|\le l_m(\omega)$.

Cu referire la această condiţie avem următoarele duble implicaţii:

$$
\begin{aligned}
&\left|1+\left(1+L_M(j\omega)\right)\hat{H}_d(j\omega)\right| > 0,\ \forall L_M \ \text{cu}\ \left|L_M(j\omega)\right| < l_m(\omega)\\
&\Leftrightarrow \left\|1+\hat{H}_d(j\omega)+L_M(j\omega)\hat{H}_d(j\omega)\right\| > 0\\
&\forall\omega\geq 0,\ \forall L_M \ \text{cu}\ \left|L_M(j\omega)\right| < l_m(\omega) \qquad (3.95)\\
&\Leftrightarrow \left|1+\hat{H}_d(j\omega)\right| \left|1+\frac{L_M(j\omega)\ \hat{H}_d(j\omega)}{1+\hat{H}_d(j\omega)}\right| > 0\\
&\forall\omega\geq 0,\ \forall L_M \ \text{cu}\ \left|L_M(j\omega) < l_m(\omega)\right.
\end{aligned}
$$

şi cum, datorită stabilităţii buclei nominale avem sigur:

$$\left|1+\hat{H}_d(j\omega)\right| > 0,\ \forall\omega\geq 0$$

rezultă în continuare

$$
\begin{aligned}
&\left|1+\frac{L_M(j\omega)\hat{H}_d(j\omega)}{1+\hat{H}_d(j\omega)}\right| > 0,\ \forall\omega\geq 0,\ \forall L_M\\
&\Leftrightarrow \left|\frac{L_M(j\omega)\hat{H}_d(j\omega)}{1+\hat{H}_d(j\omega)}\right| < 1,\ \forall\omega\geq 0 \ \text{şi}\ \forall L_M
\end{aligned} \qquad (3.96)
$$

Deci, în continuare:

$$
\begin{aligned}
&\left|L_M(j\omega)\hat{H}_0(j\omega)\right| < 1,\ \forall\omega\geq 0,\ \forall L_M(j\omega)\ \text{cu}\ \left|L_M(j\omega)\right| < l_m(\omega)\\
&\Leftrightarrow \left|\hat{H}_0(j\omega)\right| \leq \frac{1}{l_m(\omega)},\ \forall\omega\geq 0
\end{aligned} \qquad (3.97)
$$

sau

$$\left\|L_M\hat{H}_0\right\|_\infty < 1. \qquad (3.98)$$

În cazul în care se foloseşte reprezentarea $L_M(s)=\Delta(s)W_2(s)$, unde $\Delta(s)$ şi $W_2(s)$ au semnificaţiile prezentate în § 2.9, condiţia (3.98) poate fi pusă sub forma:

$$\left\|W_2\hat{H}_0\right\|_\infty < 1$$

întrucât $\|\Delta\|_\infty < 1$ sau, dacă ţinem seama că $H_0(s)\equiv T(s)$

$$\left\|W_2\hat{T}\right\|_\infty < 1 \qquad (3.99)$$

şi reprezintă cerinţa de robusteţe a stabilităţii în prezenţa incertitudinilor multiplicative $L_M(j\omega)$ cu proprietatea $L_M(j\omega)\leq l_m(\omega)$, $\forall\omega\geq 0$.

TEOREMA 3.1. Se consideră un proces cu funcţia de transfer nominală $\hat{H}_p(s)$ şi funcţia de transfer reală dată prin $H_p(s)$. Presupunem că $H_R(s)$ este funcţia de transfer a regulatorului care asigură stabilitatea internă a sistemului nominal. De asemenea, admitem că $H_d(s)=H_p(s)H_R(s)$ şi $\hat{H}_d(s)=\hat{H}_p(s)H_R(s)$ au acelaşi număr de poli instabili. Atunci, condiţia suficientă pentru stabilitatea sistemului închis prin utilizarea regulatorului pentru procesul real este ca:

$$\left|\hat{H}_0(j\omega)\right|\left|L_M(j\omega)\right| = \left|\frac{\hat{H}_pH_R}{1+\hat{H}_pH_R}\right|\cdot\left|L_M(j\omega)\right| < 1,\ \forall\omega \qquad (3.100)$$

unde $\left|L_M(j\omega)\right|\leq l_m(\omega)$, $\forall\omega$.

Demonstraţia este imediată dacă se observă că

$$H_p(s)H_R(s)=\hat{H}_p(s)H_R(s)+L_A(s)H_R(s)\equiv\hat{H}_d(s)[1+L_M(s)] \qquad (3.101)$$

iar din figura 3.11 vedem că acelaşi număr de încercuiri ale punctului critic apar dacă:

$$\left|L_A(j\omega)H_R(j\omega)\right| < \left|1+\hat{H}_p(j\omega)H_R(j\omega)\right|,\ \forall\omega \qquad (3.102)$$

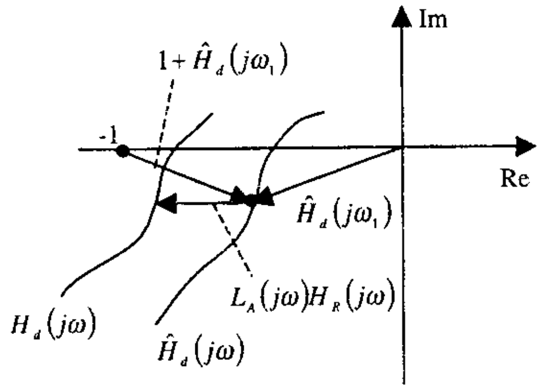


Fig. 3.11

Dacă ţinem seama că $L_A(s)=\hat{H}_p(s)L_M(s)$, observăm că (3.102) este echivalentă cu:

$$\frac{\left|L_M(j\omega)\hat{H}_p(j\omega)H_R(j\omega)\right|}{\left|1+\hat{H}_p(j\omega)H_R(j\omega)\right|} < 1,\ \forall\omega\ \text{sau} \qquad (3.103)$$

$$\left|\hat{H}_0(j\omega)L_M(j\omega)\right| < 1,\ \forall\omega$$

ceea ce aveam de demonstrat.

Observaţia 1: Teorema 3.1 oferă numai condiţia suficientă pentru robusteţea stabilităţii.

Exemplul 3.3

Se consideră un SRA cu [46]:

$\hat{H}_d(s)=\frac{0.5}{s(s+1)^2}$, *iar*

$H_p(s)=e^{-s\tau}\hat{H}_p(s)$.

Se cere:

a) valoarea lui τ care conduce sistemul la instabilitate;

b) valoarea critică a lui τ pentru care se conservă stabilitatea SRA, conform teoremei 3.1.

Soluție:

a) Timpul mort introduce o modificare a fazei egală cu $\varphi_\tau=-\omega\tau$, însă nu afectează amplitudinea $A(\omega)$. Astfel, condiția de stabilitate critică (limita de stabilitate) apare când defazajul φ_τ egalează marginea de fază M_φ, adică

$\tau_c=\frac{M_\varphi}{\omega_0}$, *iar* $\left|\hat{H}_p(j\omega_0)\right|=1$.

Cu aceste elemente, se obține $\omega_0=0.424\left[rad\ s^{-1}\right]$ și $M_\varphi=0.77\,rad$, iar valoarea critică $\tau_c=1.816[s]$.

b) Funcția de transfer a sistemului închis este dată de:

$$\hat{H}_0(s)=\frac{\hat{H}_pH_R}{1+\hat{H}_pH_R}=\frac{0.5}{s^3+2s^2+s+0.5}$$

iar $L_M(s)=e^{-s\tau}-1\Rightarrow\left|L_M(j\omega)\right|=2\left|\sin\frac{\omega\tau}{2}\right|$.

Conform teoremei 3.1, condiția pentru stabilitate robustă este ca $\left|\hat{H}_0(j\omega)L_M(j\omega)\right|<1,\ \forall\omega$.

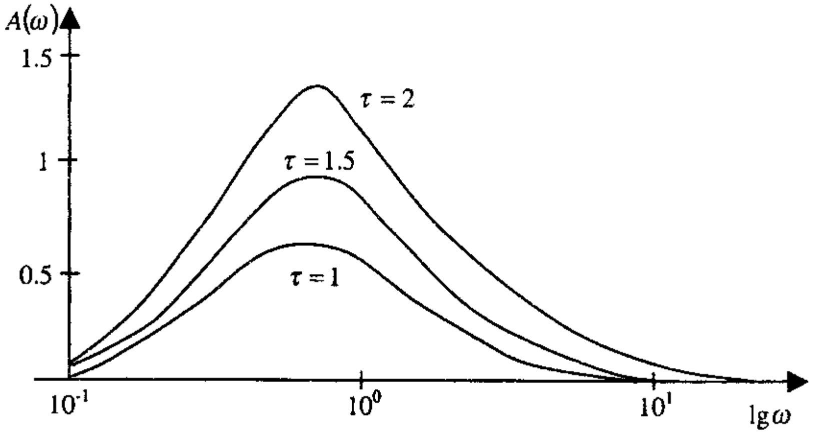


Fig. 3.12

Reprezentarea acestei amplitudini în funcție de ω pentru diferite valori ale lui τ este dată în figura 3.12.

Se poate observa că cerința de stabilitate robustă este satisfăcuta dacă $\tau\le 1.5$.

3.5.2. Condiția de performanță robustă

Robustețea performanțelor se obține dacă și numai dacă:

$m_p(\omega)\le\left|1+H_d(j\omega)\right|,\ \forall\omega\in\left[0,\omega_0\right]$ și $H_d=H_pH_R$

cu H_p verificând (3.92). Această cerință rezultă din faptul că $\varepsilon(s)=S(s)\cdot R(s)$, iar minimizarea amplitudinii erorii presupune maximizarea inversei sensibilității ($\left|S^{-1}(j\omega)\right|=\left|1+H_d(j\omega)\right|$).

Avem atunci explicit, pentru $H_p(s)=\hat{H}_p(s)\left[1+L_M(j\omega)\right]$:

$$m_p(\omega)\le\left|1+\left(1+L_M(j\omega)\right)\hat{H}_d(j\omega)\right|=$$
$$=\left|1+\hat{H}_d(j\omega)\right|\left|1+\frac{L_M(j\omega)\hat{H}_d(j\omega)}{1+\hat{H}_d(j\omega)}\right|\approx\left|\hat{H}_d(j\omega)\right|\cdot\left|1+L_M(j\omega)\right| \qquad (3.104)$$

pentru ω, astfel încât $\left|\hat{H}_d(j\omega)>>1\right|$, de unde rezultă că avem:

$$\left|\hat{H}_d(j\omega)\right|>\frac{m_p(\omega)}{\left|1+L_M(j\omega)\right|} \qquad (3.105)$$

pentru ω astfel încât $\left|\hat{H}_d(j\omega)\right|>>1$.

Dar

$$\frac{m_p(\omega)}{1-l_m(\omega)}\ge\frac{m_p(\omega)}{1-\left|L_M(j\omega)\right|}\ge\frac{m_p(\omega)}{\left|1+L_M(j\omega)\right|} \qquad (3.106)$$

pentru ω, astfel încât $l_m(\omega)<1$, de unde se vede că din compararea lui (3.105) cu (3.106) rezultă implicațiile:

$$\left|\hat{H}_d(j\omega)\right|\ge\frac{m_p(\omega)}{1-l_m(\omega)}\Rightarrow\left|\hat{H}_d(j\omega)\right|>\frac{m_p(\omega)}{\left|1+L_M(j\omega)\right|} \qquad (3.107)$$

pentru ω, astfel încât $\left|\hat{H}_d(j\omega)\right|>>1$ și $l_m(\omega)<1$.

Aşadar, condiţia (3.107) cu amendamentul menţionat imediat mai jos, asigură cerinţele de robusteţe a performanţelor. În capitolul al patrulea se vor determina cerinţele de robusteţe a performanţelor pentru clase date de intrări.

Pentru proiectarea SRA, vor fi selectate criterii de performanţă în concordanţă cu particularităţile procesului condus, cu natura semnalelor exogene ce acţionează asupra sistemului şi cu particularităţile modelului matematic utilizat pentru caracterizarea sistemului. Incertitudinile modelului matematic ataşat obiectului condus se iau în consideraţie la proiectarea regulatorului robust care să asigure robusteţea stabilităţii şi a performanţelor.

De remarcat faptul că includerea incertitudinilor în modelul procesului conduce la următoarele relaţii care definesc funcţiile de sensibilitate:

$$S(s)=\hat{S}(s)\cdot S_m(s) \tag{3.108}$$

$$T(s)=\hat{T}(s)[1+L_M(s)]S_m(s) \tag{3.109}$$

$$S_2(s)=\hat{S}_2(s)[1+L_M(s)]S_m(s) \tag{3.110}$$

$$S_u(s)=\hat{S}_u(s)S_m(s) \tag{3.111}$$

$$S_m(s)=\frac{1}{1+\hat{T}(s)L_M(s)} \tag{3.112}$$

unde $S_m(s)$ reprezintă sensibilitatea erorii.

Prin utilizarea relaţiilor (3.108)-(3.111) pentru analiza şi/sau sinteza SRA, se poate evidenţia efectul incertitudinii multiplicative asupra performanţelor. De observat că dacă $S_m(j\omega)$ este foarte aproape de $1+j0$ pentru toate frecvenţele, incertitudinile nu influenţează performanţele SRA obţinute pentru modelul nominal. Acest lucru se poate evidenţia din (3.111), în cazul în care $\left|\hat{T}(j\omega)L_M(j\omega)\right|<<1$.

Performanţele unui SRA sunt definite în raport cu anumite mărimi exogene specificate. În general, mărimile exogene ce acţionează asupra unui SRA nu sunt cunoscute apriori, iar pentru proiectare se poate selecta o anumită clasă de mărimi pentru care se impun cerinţele de performanţă.

Dacă ne referim la un SRA cu un grad de libertate, eroarea $\varepsilon(s)$ se poate calcula în raport cu referinţa şi/sau cu perturbaţiile V_1 şi V_2, luând în consideraţie funcţia de sensibilitate $S(s)$.

Pentru intrări sinusoidale de amplitudine subunitară, dacă punem condiţia ca amplitudinea erorii să fie limitată la ε_0, specificaţia de performanţă a SRA poate fi dată sub forma [60]:

$$\|S\|_\infty<\varepsilon_0 \tag{3.113}$$

întrucât

$$\varepsilon(s)=S(s)\cdot R(s) \tag{3.114}$$

iar amplitudinea maximă a erorii $\varepsilon(t)$ egalează norma infinit a lui $S(j\omega)$ pentru referinţa cu amplitudine limitată la unitate.

Dacă admitem că referinţa este generată printr-un filtru cu funcţia de transfer $W_1(s)$, la intrarea căruia se aplică o referinţă de amplitudine limitată, $\|R'\|_2\le 1$, specificaţiile de performanţă pot fi scrise sub forma:

$$\|SW_1\|_\infty<1 \tag{3.115}$$

unde referinţa este dată de relaţia:

$$R(s)=W_1(s)R'(s) \tag{3.116}$$

Condiţia (3.115) se obţine cu uşurinţă dacă scriem:

$$\varepsilon(s)=S(s)\cdot W_1(s)\cdot R'(s) \tag{3.117}$$

şi calculăm:

$$\sup_R\|\varepsilon\|_2=\sup\left\{\|SW_1R'\|_2:\|R'\|_2<1\right\}=\|SW_1\|_\infty \tag{3.118}$$

Dacă se impune că $\|\varepsilon\|_2<1$, atunci performanţele SRA se pot realiza prin satisfacerea condiţiei:

$$\|SW_1\|_\infty<1 \tag{3.119}$$

Semnificaţia funcţiei de ponderare $W_1(s)$ constă în aceea că pentru referinţe cu restricţii energetice, spectrul lor de energie este ponderat prin $1/|W_1(j\omega)|^2$:

$$\left\{R:\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|R(j\omega)/W_1(j\omega)|^2\,d\omega\le 1\right\} \tag{3.120}$$

Dacă se notează $|W_1(j\omega)|\le m_p(\omega)$, atunci condiţia:

$$\|W_1S\|_\infty<1\Leftrightarrow m_p(\omega)\le|1+H_d(j\omega)|,\ \forall\omega\in[0,\omega_c] \tag{3.121}$$

În cazul în care se include perturbaţia multiplicativă în modelul procesului, funcţia de sensibilitate se calculează cu relaţia:

$$S(s)=\frac{1}{1+H_d(s)}=\frac{1}{1+\hat{H}_d(s)[1+L_M(s)]} \tag{3.122}$$

sau

$$S(s)=\frac{\hat{S}(s)}{1+L_M(s)\hat{T}(s)}=\frac{\hat{S}(s)}{1+\Delta(s)W_2(s)\hat{T}(s)} \tag{3.123}$$

Condiţia pentru asigurarea robusteţei performanţelor în acest caz va fi:

$$\|W_1 S\|_\infty = \left\| \frac{W_1 \hat{S}}{1+\Delta W_2 \hat{T}} \right\|_\infty < 1,\ \forall\omega,\ \forall\|\Delta\|_\infty \le 1 \qquad (3.124)$$

Este evident că această condiţie trebuie completată cu cea de stabilitate robustă:

$$\|\hat{T} W_2\|_\infty < 1 \qquad (3.125)$$

TEOREMA 3.2. O condiţie necesară şi suficientă pentru asigurarea robusteţei performanţelor este [60]:

$$\left\| |W_1 \hat{S}| + |W_2 \hat{T}| \right\|_\infty < 1 \qquad (3.126)$$

Demonstraţie:

Presupunem că (3.126) este adevărată şi:

$$\|\hat{T} W_2\|_\infty < 1,\ \left\| \frac{W_1 \hat{S}}{1-|W_2 \hat{T}|} \right\|_\infty < 1 \qquad (3.127)$$

pentru un Δ fixat.

Dacă ţinem seama că:

$$1 = |1+\Delta W_2 \hat{T} - \Delta W_2 \hat{T}| \le |1+\Delta W_2 \hat{T}| + |W_2 \hat{T}|$$

şi

$$1-|W_2 \hat{T}| \le |1+\Delta W_2 \hat{T}|$$

rezultă

$$\left\| \frac{W_1 \hat{S}}{1-|W_2 \hat{T}|} \right\|_\infty \ge \left\| \frac{W_1 \hat{S}}{1+\Delta W_2 \hat{T}} \right\|_\infty \qquad (3.128)$$

şi implicit condiţia:

$$\left\| \frac{W_1 \hat{S}}{1+\Delta W_2 \hat{T}} \right\|_\infty < 1 \qquad (3.129)$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Dacă alegem frecvenţa ω pentru care $\frac{W_1 \hat{S}}{1-|W_2 \hat{T}|}$ este maxim şi ţinem seama că pentru o anumită funcţie $\Delta(j\omega)$ este îndeplinită relaţia:

$$1-|W_2 \hat{T}| = |1+\Delta W_2 \hat{T}|,$$

rezultă

$$\left\| \frac{W_1 \hat{S}}{1-|W_2 \hat{T}|} \right\|_\infty = \frac{W_1 \hat{S}}{1-|W_2 \hat{T}|} = \frac{|W_1 \hat{S}|}{|1+\Delta W_2 \hat{T}|} \le \left\| \frac{W_1 \hat{S}}{1+\Delta W_2 \hat{T}} \right\|_\infty, \qquad (3.130)$$

ceea ce asigură:

$$\|W_2 \hat{T}\|_\infty < 1 \text{ şi } \left\| \frac{W_1 \hat{S}}{1-|W_2 \hat{T}|} \right\|_\infty < 1, \qquad (3.131)$$

respectiv

$$\left\| |W_1 \hat{S}| + |W_2 \hat{T}| \right\|_\infty < 1.$$

Astfel, dacă se cunosc $W_1(s)$ şi $W_2(s)$ pentru $\Delta(s)$ dat, se pot verifica, pentru un sistem proiectat pe baza modelului nominal, robusteţea stabilităţii şi robusteţea performanţelor, folosind relaţiile:

$$\|W_2 \hat{T}\|_\infty < 1 \text{ şi} \qquad (3.132)$$

$$\left\| |W_1 \hat{S}| + |W_2 \hat{T}| \right\|_\infty < 1 \qquad (3.133)$$

sau

$$\left\| \frac{W_1 \hat{S}}{1+\Delta W_2 \hat{T}} \right\|_\infty < 1,\ \forall\Delta \qquad (3.134)$$

Testele pentru verificarea robusteţei unei soluţii de reglare pot fi utilizate pentru proiectarea SRA apelând la tehnici specifice de tip "loop shaping".

PROBLEME

3.1. Presupunem că procesul condus este caracterizat prin modelul:

$$H_p(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)},$$

iar regulatorul este de tip proporţional

$$H_R(s) = K_R;\ K_R = 1, 5, 10.$$

Se cere:

a) marginea de fază pentru diferite valori ale parametrilor K_R, ζ şi ω_n;

b) valoarea limită a lui K_R pentru care marginea de fază depinde numai de ζ;

c) admiţând că $\zeta \in (0,\ 1)$, să se aleagă valoarea lui K_R pentru care $\sigma \le 5\%$ şi $t_t \le 3s$, când $\omega_n = 10[\text{rad/s}]$.

3.2. Se consideră un SRA cu un singur grad de libertate cu modelul procesului:

$$H_p(s)=\frac{1}{(s+1)(s+\alpha)} \text{ şi } H_R(s)=\frac{1}{s}.$$

Se cere:

a) pentru ce valoare a lui α (număr real) sistemul de reglare este intern stabil;

b) domeniul de variaţie admisibil pentru α pentru a menţine stabilitatea;

c) pentru ce valoare a lui α suprareglajul SRA este $\sigma \le 5\%$.

3.3. Se consideră un SRA cu un grad de libertate, unde modelul procesului este de forma:

$$H_p(s)=\frac{10}{(s+\alpha)(s+\beta)}$$

iar regulatorul este de tip PI.

Se cere:

a) valorile optime ale lui K_R şi T_i, pentru ca răspunsul SRA să fie oscilant amortizat;

b) să se analizeze efectul parametrilor α şi β asupra gradului de stabilitate al SRA în cazul în care $K_R=5$ şi $T_i=10\,s$;

c) să se calculeze eroarea la viteză.

3.4. Admitem că modelul nominal al procesului este:

$$\hat{H}_p(s)=\frac{2}{s^2+s+1}$$

iar comportarea reală este dată de:

$$\hat{H}_p(s)=\frac{\alpha}{s^2+\beta s+1}.$$

Admiţând că regulatorul este de tip P, se cere:

a) modelul incertitudinii;

b) domeniile de variaţie pentru α, β şi K_R pentru care sistemul este intern stabil;

c) pentru modelul nominal să se determine K_R astfel încât răspunsul SRA să asigure un răspuns indicial cu $\sigma \le 10\%$.

3.5. Se consideră un SRA cu două grade de libertate, ca în figura 3.13.

Se cere:

a) să se calculeze funcţiile de sensibilitate S, T, S_1 şi S_u pentru cazul nominal şi pentru cazul în care

$$L_A(s)=H_p(s)-\hat{H}_p(s)=\frac{1-s-\alpha}{(s+1)(s+\alpha)};$$

b) să se analizeze efectul parametrului α asupra comportării SRA în raport cu perturbaţiile V_1 şi V_2 care au forma de tip treaptă.

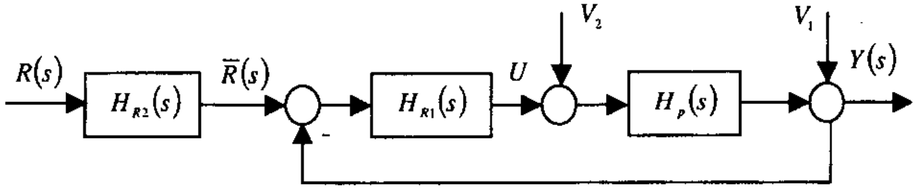


Fig. 3.13

3.6. Se consideră un SRA cu modelul nominal

$$\hat{T}(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}.$$

Admiţând că $W_1(s)=\frac{\beta}{10s+1}$, iar $L_M(s)=\frac{s+\alpha}{s+0.5}$, se cere:

a) domeniul de variaţie al parametrilor α şi β pentru care SRA este intern stabil;

b) influenţa parametrului β asupra performanţelor SRA;

c) structura regulatorului care asigură o valoare minimă a funcţiei de sensibilitate S.

4. ALGORITMI ŞI STRUCTURI CONVENŢIONALE DE REGLARE

4.1. Introducere

În aplicaţiile industriale, în cadrul structurilor cu unul sau mai multe grade de libertate, sunt utilizate legi de reglare convenţionale sau neconvenţionale.

Acest capitol este dedicat prezentării algoritmilor convenţionali de reglare de tipul P, PI, PD şi PID. Vor fi analizate efectele variaţiei parametrilor şi ale structurilor algoritmilor asupra performanţelor SRA.

Legea de reglare de tip P

Cea mai simplă lege de reglare este de tip *proporţional.* Dacă ne referim la structura clasică de SRA cu reacţie unitară şi un singur grad de libertate (figura 4.1), se poate defini legea de reglare de tip *P* sub forma:

$$u(t) = K_R \varepsilon(t) \tag{4.1}$$

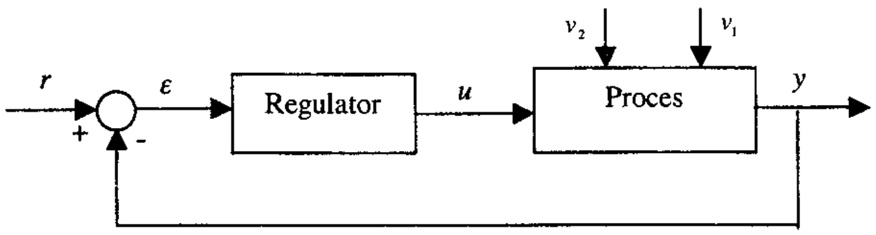


Fig. 4.1

În acest caz putem spune că regulatorul are o comportare de tip P, iar funcţia de transfer ataşată acestuia este:

$$H_R(s) = K_R \tag{4.2}$$

Este evident că un asemenea regulator are o comportare ideală reprezentată prin răspunsul indicial din figura 4.2. Răspunsul reprezentat punctat ar putea defini comportarea reală a unui regulator de tip P. Această comportare este determinată de modul de implementare a legii de reglare de tip P.

Ideal, pentru o treaptă unitară aplicată la intrare ($\varepsilon(t) = 1(t)$), răspunsul este o treaptă de amplitudine egală cu factorul de amplificare.

Un regulator P poate controla orice proces stabil, însă performanţele obţinute sunt limitate, iar eroarea în regim staţionar pentru referinţă treaptă este diferită de zero.

În mod tradiţional se foloseşte *banda de proporţionalitate* (BP) pentru a descrie acţiunea proporţională:

$$BP[\%] = \frac{100[\%]}{K_R}.$$

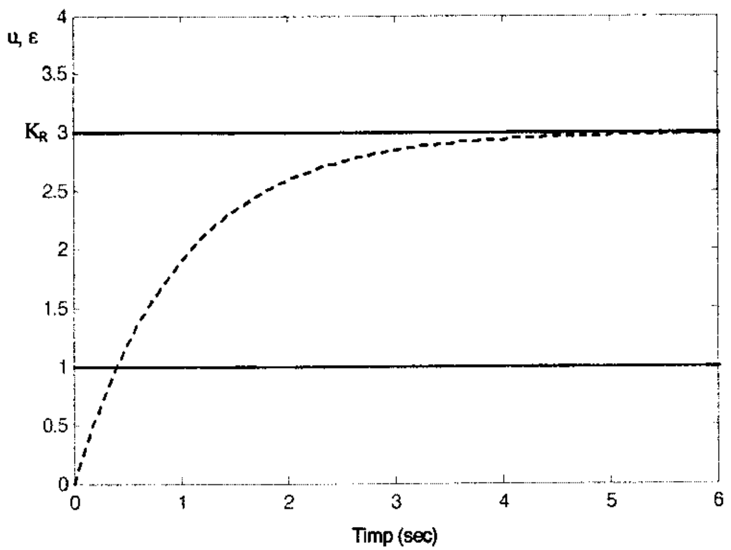


Fig. 4.2

Legea de reglare de tip PI

Dacă la componenta P se adaugă o componentă de tip *integral* (I), se obţine cunoscuta lege de reglare PI dată de relaţia:

$$u(t) = K_R \left[\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int \varepsilon(\tau) d\tau \right] \tag{4.3}$$

Ca şi în cazul legii de reglare de tip P, coeficientul K_R poartă denumirea de factor de amplificare al componentei P, iar raportul $\frac{K_R}{T_i} = K_I$ poartă denumirea de factor de amplificare al componentei integrale. În acest caz putem scrie relaţia (4.3) sub forma:

$$u(t) = K_R \varepsilon(t) + K_I \int \varepsilon(\tau) d\tau \tag{4.4}$$

Se poate observa că factorul de amplificare K_R este chiar coeficientul ce defineşte componenta proporţională K_P, iar coeficientul K_I este determinat atât de K_R cât şi de constanta de timp a acţiunii integrale T_i. Funcţia de transfer ataşată legii de reglare PI este:

$$H_R(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) = \frac{K_R}{T_i s}(T_i s + 1) = K_I \frac{T_i s + 1}{s} \tag{4.5}$$

Răspunsul indicial al regulatorului de tip PI este reprezentat în figura 4.3. Răspunsul real al regulatorului este marcat punctat pe figură, iar răspunsul ideal permite a evalua „timpul de dublare".

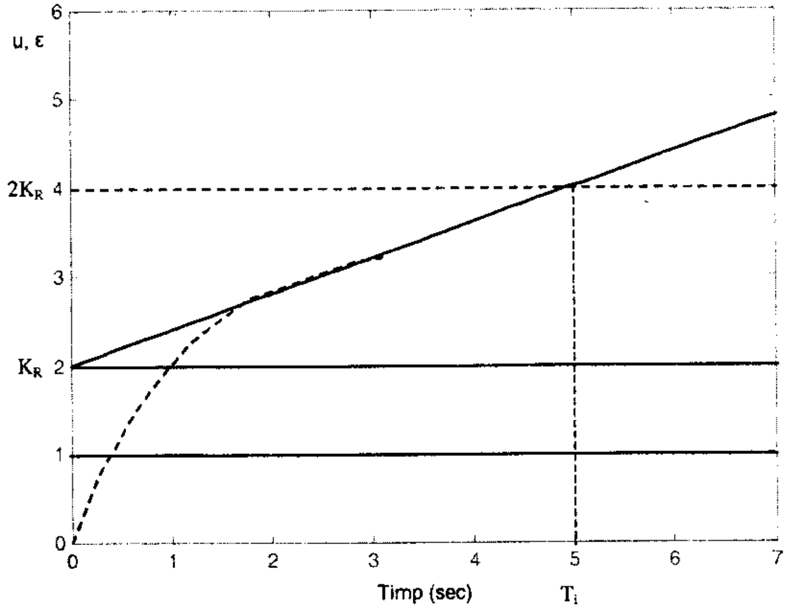


Fig. 4.3

De remarcat faptul că pentru $t = T_i$ şi $\varepsilon(t) = 1(t)$ componenta proporţională se dublează ($u(t) = 2K_R$).

În unele lucrări, constanta de timp T_i este cunoscută şi sub denumirea „timpul de dublare".

Spre deosebire de regulatorul P, unde numai K_R este ajustabil, în cazul regulatorului PI sunt ajustaţi cei doi parametri K_R şi T_i sau K_P şi K_I. De remarcat faptul că, prin ajustarea constantei integrale T_i, se modifică efectul acţiunii de integrare, iar prin modificarea factorului de proporţionalitate K_R se modifică atât componenta integrală, cât şi cea proporţională.

Comportarea reală a regulatorului PI, ţinând seama de modul de implementare a legii de reglare, este diferită de comportarea ideală (forma punctată din fig. 4.3).

Prezenţa componentei integrale în structura unui algoritm de reglare poate genera efecte nedorite ca urmare a saturării, însă se asigură eroare staţionară egală cu zero în cazul în care semnalul de ieşire în regim staţionar are valori sub limita de saturare.

***Legea de reglare de tip proporţional-derivativă* (PD)**

În acest caz, la componenta proporţională se adaugă o componentă derivativă:

$$u(t) = K_R\left[\varepsilon(t) + T_d \frac{d\varepsilon}{dt}\right] \tag{4.6}$$

sau

$$u(t) = K_P \varepsilon(t) + K_D \frac{d\varepsilon}{dt} \tag{4.7}$$

unde $K_D = K_R T_d$.

Funcţia de transfer ce defineşte comportarea unui regulator PD este:

$$H_R(s) = K_R(1 + T_d s) \tag{4.8}$$

unde K_R este amplificarea proporţională, iar T_d este constanta de timp ataşată componentei derivative (timpul derivativ). Ambele componente sunt ajustabile prin modificarea K_P şi K_D.

Componenta derivativă evidenţiază faptul că ieşirea $u(t)$ este proporţională cu viteza de variaţie a erorii.

În figura 4.4 se reprezintă, pentru $t > 0$, răspunsul regulatorului PD la semnal de tip rampă unitară.

Se evidenţiază în figura 4.4 faptul că acţiunea de derivare are un caracter anticipativ. Timpul derivativ T_d reprezintă intervalul de timp prin care componenta derivativă anticipează efectul acţiunii proporţionale.

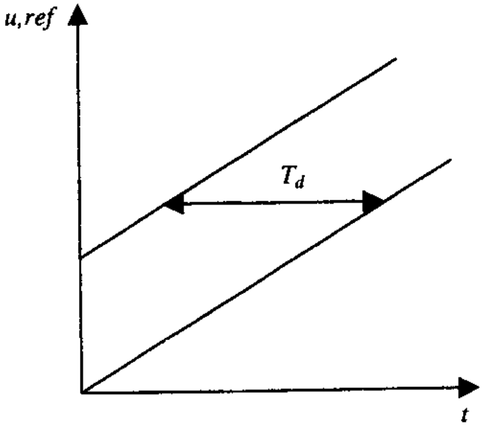


Fig. 4.4

Această componentă, deşi prezintă avantajul comportării anticipative, are însă dezavantajul că amplifică semnalele de tip zgomot şi poate cauza efecte de saturaţie în comportarea elementului de execuţie.

Componenta derivativă nu poate fi utilizată niciodată singură, aceasta fiind efectivă numai în perioada tranzitorie (pentru $\varepsilon(t) = \text{const.}$, comanda derivativă $u_D = 0$).

De remarcat faptul că legea de reglare PD, aşa cum evidenţiază relaţia (4.8), reprezintă un sistem nerealizabil fizic. Cel mai adesea, legea de reglare PD este definită printr-o funcţie de transfer de forma:

$$H_R(s) = K_R \frac{1 + T_d s}{1 + \alpha T_d s} \tag{4.9}$$

unde $\alpha << 1$ reprezintă coeficientul de filtrare al componentei derivative.

Funcţia de transfer (4.9) evidenţiază o comportare de tip „anticipaţie-întârziere“ (lead-lag) cu factor de amplificare (de proporţionalitate) neunitar.

Un model uzual pentru algoritmul PD este:

$$H_R(s) = K_R \left[1 + \frac{T_d s}{\alpha T_d s + 1} \right]$$

unde α se alege în concordanţă cu banda de frecvenţă în care se găseşte zgomotul.

Pentru această lege de reglare se poate reprezenta răspunsul indicial pentru diverse valori ale coeficientului α (fig. 4.5).

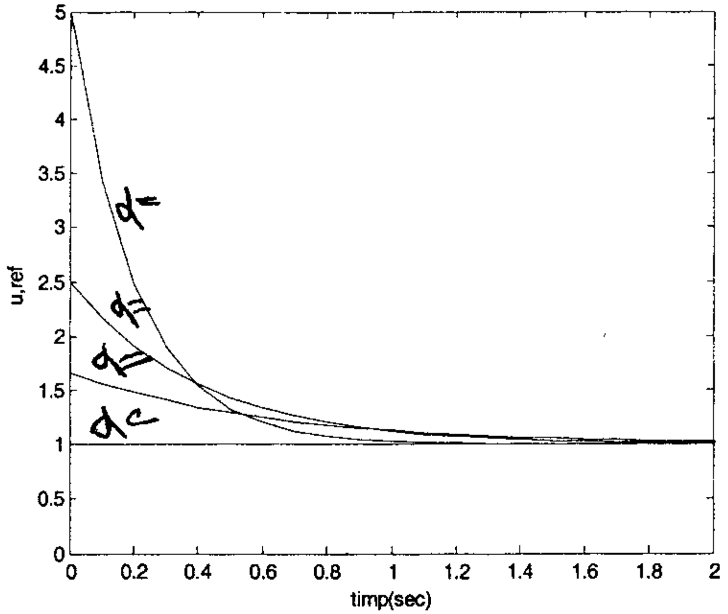


Fig. 4.5

***Legea de reglare proporţional-integral-derivativă* (PID)**

Combinaţia acţiunilor de reglare proporţională, integrală şi derivativă conduce în mod natural la algoritmul cel mai „popular“, cunoscut ca algoritmul sau legea de reglare de tip PID.

Această lege „ideală“ de reglare are forma:

$$u(t) = K_R \left[\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int \varepsilon(\tau) d\tau + T_d \frac{d\varepsilon}{dt} \right] \text{ sau} \tag{4.10}$$

$$u(t) = K_R \varepsilon(t) + K_I \int \varepsilon(\tau) d\tau + K_D \frac{d\varepsilon}{dt} \tag{4.11}$$

unde:

$K_P = K_R$ – factor de proporţionalitate (efectul proporţional);

$K_I = \frac{K_R}{T_i}$ – factorul integral;

$K_D = K_R T_d$ – factorul derivativ.

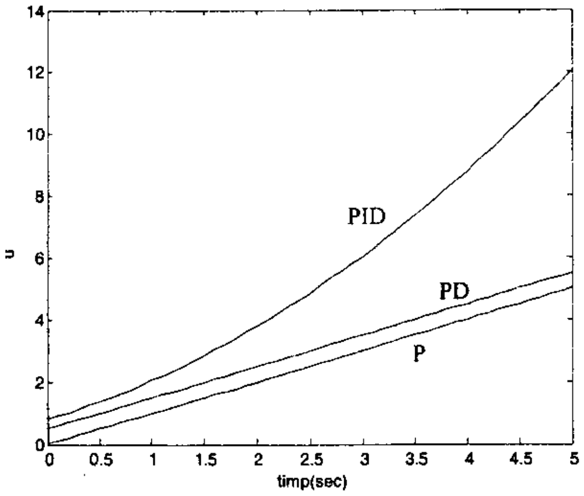
Funcţia de transfer ataşată acestui regulator este:

$$H_R(s) = K_R \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \tag{4.12}$$

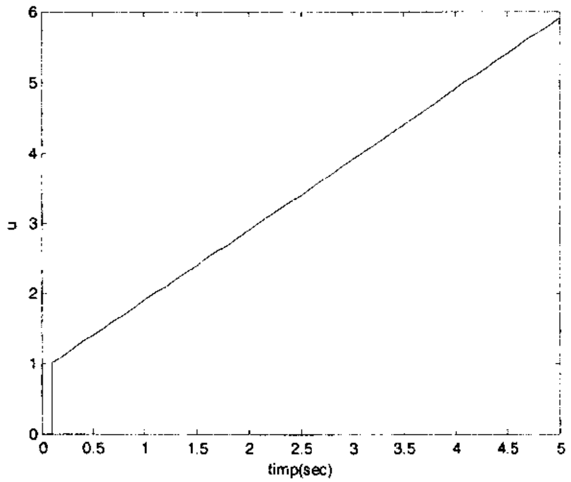
sau

$$H_R(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s \qquad (4.13)$$

Răspunsul la semnal de intrare de tip rampă unitară este prezentat în figura 4.6*a*, iar răspunsul indicial este reprezentat în figura 4.6*b*.



(a)



(b)

Fig. 4.6

Ca şi în cazul legii de reglare de tip PD, funcţia de transfer (4.12) evidenţiază un sistem nerealizabil fizic. Pentru realizabilitatea fizică a legii de reglare PID pot fi utilizate diferite variante ale acesteia.

O primă variantă a legii de reglare PID include constanta de timp αT_d pentru filtrarea componentei derivative:

$$H_R(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{\alpha T_d s + 1}\right) \qquad (4.14)$$

cu $\alpha << 1$.

O a doua variantă presupune utilizarea unui algoritm PID cu filtrare. În acest caz se realizează o combinaţie eficientă a componentelor P, PI şi PD cu filtrare:

$$H_R(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)\left(\frac{T_d s + 1}{\alpha T_d s + 1}\right) \qquad (4.15)$$

Astfel, prin filtrarea componentei derivative se asigură realizabilitatea algoritmilor şi se atenuează efectul componentei derivative asupra semnalelor de tip zgomot.

În afară de legile de reglare PID cu filtrarea componentei derivative, sunt utilizate şi variante de algoritmi „PID-modificaţi", algoritmi care prelucrează diferit eroarea, ieşirea măsurată şi chiar referinţa.

Algoritmi „PID-modificaţi" PI-D, I-PD, PID cu două grade de libertate

În figura 4.7 se prezintă o structură de SRA cu regulator PI-D.

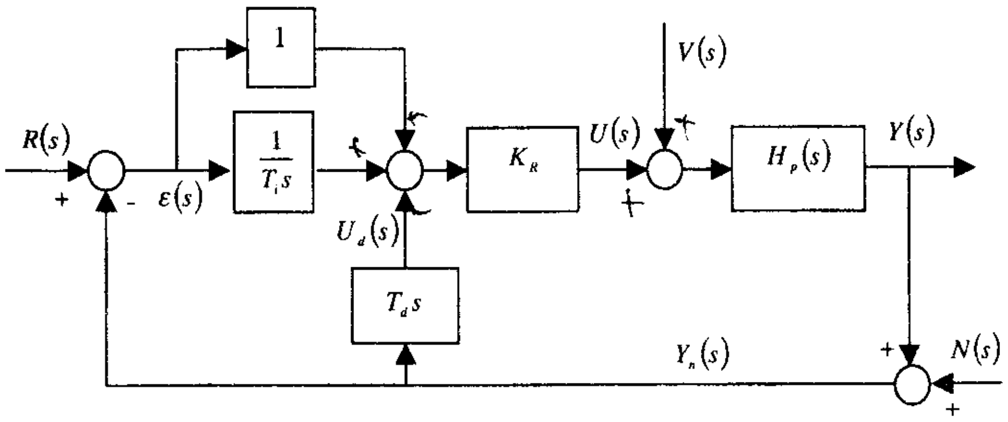


Fig. 4.7

În acest caz, legea de reglare este definită prin relația:

$$U(s)=K_R\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)R(s)-K_R\left(1+\frac{1}{T_i s}+T_d s\right)Y_n(s) \qquad (4.16)$$

O asemenea lege de reglare care nu conține componenta D pe calea directă permite evitarea apariției unor şocuri pentru instalația tehnologică la modificarea dură a referinței.

În această structură, componenta derivativă este plasată numai pe calea de reacție. În funcție de particularitățile zgomotelor ce însoțesc semnalul de măsurat $Y_n(s)$, se pot introduce constante de timp de filtrare, iar componenta derivativă devine:

$$U_d(s)=\frac{T_d s}{\alpha T_d s+1}\cdot Y_n(s).$$

Legea de reglare PI-D capătă forma:

$$U(s)=K_R\left[1+\frac{1}{T_i s}\right]R(s)-K_R\left[1+\frac{1}{T_i s}+\frac{T_d s}{\alpha T_d s+1}\right]Y_n(s) \qquad (4.17)$$

sau dacă se evidențiază şi eroarea:

$$U(s)=K_R\left[1+\frac{1}{T_i}\right]\varepsilon(s)-K_R\left[\frac{T_d s}{\alpha T_d s+1}\right]Y_n(s).$$

Este de remarcat faptul că în absența referinței $R(s)$ şi a zgomotului $N(s)$, funcția de transfer în raport cu perturbația $V(s)$ este:

$$H_{0V}(s)=\frac{H_p(s)}{1+K_R H_p(s)\left(1+\frac{1}{T_i s}+T_d s\right)} \qquad (4.18)$$

Pentru a evita apariția unor salturi ale comenzii la modificarea sub forma de treaptă a referinței şi a conduce în regim de saturație elementul de execuție, se utilizează o altă variantă de algoritm PID-modificat şi anume algoritmul I-PD.

În figura 4.8 se prezintă un SRA cu regulator I-PD.

În acest caz, comanda poate fi calculată cu relația:

$$U(s)=K_R\frac{1}{T_i s}R(s)-K_R\left[1+\frac{1}{T_i s}+T_d s\right]Y_n(s) \qquad (4.19)$$

sau

$$U(s)=K_R\frac{1}{T_i s}R(s)-K_R\left[1+\frac{1}{T_i s}+\frac{T_d s}{\alpha T_d s+1}\right]Y_n(s), \qquad (4.20)$$

în cazul în care se include constanta de timp pentru filtrarea componentei derivative $T_f=\alpha T_d$.

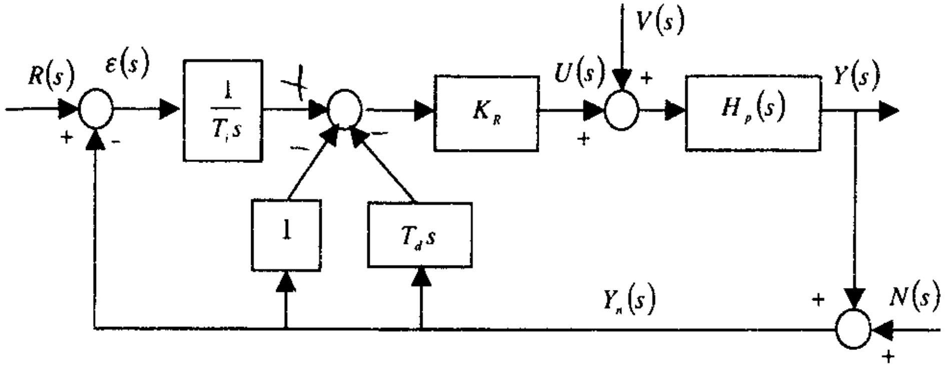


Fig. 4.8

Se remarcă faptul că pe calea directă este menținută componenta integrală care asigură comportarea dorită a SRA în regim staționar:

$$U(s)=K_R\frac{1}{T_i s}\varepsilon(s)-K_R\left[1+\frac{T_d s}{\alpha T_d s+1}\right]Y_n(s).$$

Funcția de transfer a SRA în raport cu referința ($V(s)=0$ şi $N(s)=0$) este:

$$H_0(s)=\frac{1}{T_i s}\frac{K_R H_p(s)}{1+K_R H_p(s)\left(1+\frac{1}{T_i s}+T_d s\right)}, \qquad (4.21)$$

iar funcția de transfer în raport cu perturbația, pentru referință egală cu zero şi în lipsa zgomotelor, este:

$$H_{0V}(s)=\frac{H_p(s)}{1+K_R H_p(s)\left(1+\frac{1}{T_i s}+T_d s\right)} \qquad (4.22)$$

Această expresie este aceeaşi ca pentru structurile de reglare cu regulatoare de tip PID şi PI-D.

Pornind de la structurile de reglare cu algoritmi de reglare PI-D şi I-PD se poate uşor evidenția faptul că în aceste cazuri avem structuri cu două grade de libertate. Cele două obiective majore ale unui SRA: *urmărirea referinței* şi *rejecția perturbațiilor* pot fi realizate.

Pentru structura convențională de reglare din figura 4.9, unde $H_p(s)$ se consideră fixată şi nemodificabilă, iar $H_R(s)$ este funcția de transfer a

4.6.3. Structura de reglare combinată

În cazul în care perturbația $v(t)$ este măsurabilă, se poate adopta o soluție de reglare directă (fig. 4.27).

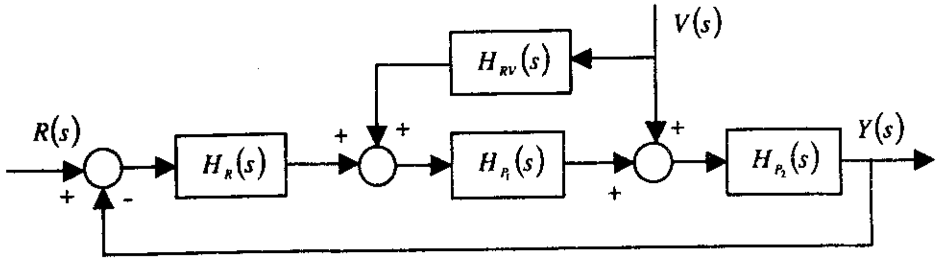


Fig. 4.27

Din figura 4.27, observăm pentru referința nulă că :

$$Y_V(s) = S(s)H_{P_2}(s)\left[1 + H_{P_1}(s)H_{RV}(s)\right]V(s) \quad (4.129)$$

$$U_V(s) = -S_u(s)\left[H_{P_2}(s) + H_{RV}(s)H_{P_1}(s)\right]V(s) \quad (4.130)$$

Arhitecturii propuse i se cere să prezinte următoarele proprietăți:

- funcția de transfer $H_{RV}(s)$ trebuie să fie stabilă și proprie, întrucât acționează în buclă deschisă;
- ecuația (4.129) indică faptul că, ideal, blocul de reglare directă (feedforward) inversează modelul nominal:

$$H_{RV}(s) = -\left[H_{P_1}(s)\right]^{-1} \quad (4.131)$$

- pentru $H_{P_1}(s)$ cu o caracteristică de frecvență trece-jos se obține $H_{RV}(s)$ cu o caracteristică trece-sus.

Utilizarea acestei arhitecturi asigură rejecția directă a perturbației măsurabile, ceea ce asigură o îmbunătățire a performanțelor SRA , în special pentru procese lente și foarte lente.

Exemplul 4.5:

Se consideră procesul descris de modelul nominal:

$$H_P(s) = \frac{e^{-2s}}{3s^2 + 4s + 1},$$

cu $H_{P_1}(s) = \frac{1}{s+1}$ *și* $H_{P_2}(s) = \frac{e^{-2s}}{3s+1}$, *iar perturbația acționează sub forma unei modificări în treaptă.*

Alegem regulatorul cu acțiune directă asupra perturbației (regulator feedforward) sub forma:

$$H_{RV}(s) = -K\frac{s+1}{\alpha s + 1}$$

unde α permite, prin ajustare, a realiza compromisul între eficiența reglării directe și efortul de comandă.

În figura 4.28 se prezintă răspunsul SRA în raport cu referința și perturbația ce acționează la momentele de timp $t_1 = 0s$ și $t_2 = 20s$, pentru $K = 0$ și $K = 1$ și diverse valori ale lui α.

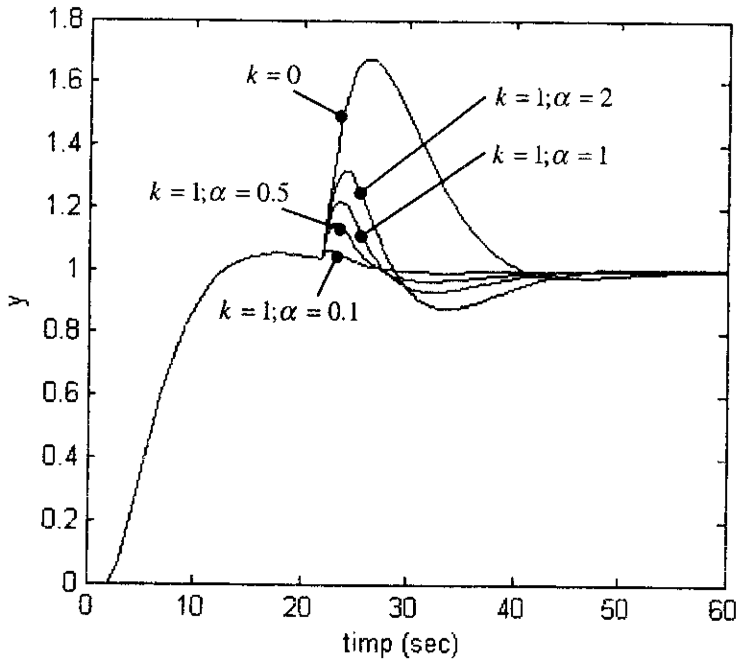


Fig. 4.28

Regulatorul $H_R(s)$ este de tip PID și este acordat astfel încât suprareglajul în raport cu referința treaptă unitară să fie $\sigma \leq 5\%$.

Se poate cu ușurință observa că performanțele tranzitorii sunt îmbunătățite în prezența regulatorului $H_{RV}(s)$.

Utilizarea reglării directe după perturbație este posibilă numai în cazul în care $H_{P_1}(s)$ este inversabilă. Astfel, pentru cazul în care în $H_{P_1}(s)$ apare timp mort sau zerouri de fază neminimă, este foarte dificil a aplica această structură. Se recomandă în special pentru procese ce includ timpi morți semnificativi în $H_{P_2}(s)$.

regulatorului, se pot defini funcțiile de transfer în raport cu cele trei intrări: referința (r), perturbația (v) și zgomotul (n), sub forma:

$$H_{yr}(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{H_R(s)H_p(s)}{1+H_R(s)H_p(s)}=H_0(s) \qquad (4.23)$$

$$H_{yv}(s)=\frac{Y(s)}{V(s)}=\frac{H_p(s)}{1+H_R(s)H_p(s)}=H_{0V}(s) \qquad (4.24)$$

$$H_{yn}(s)=\frac{Y(s)}{N(s)}=-\frac{H_R(s)H_p(s)}{1+H_R(s)H_p(s)}=H_{0n}(s) \qquad (4.25)$$

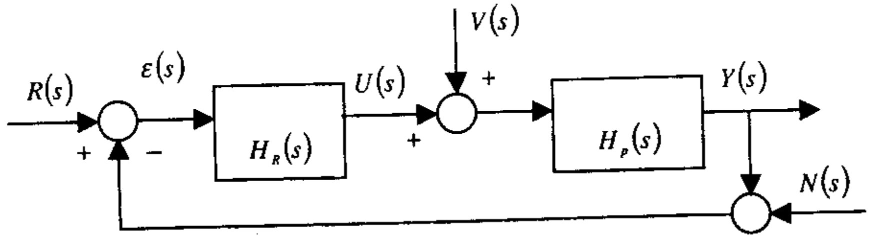


Fig. 4.9

Așa cum s-a menționat în capitolul 1, gradele de libertate ale unui SRA se referă la numărul funcțiilor de transfer independente.

În acest caz, pornind de la relațiile (4.23)-(4.25), observăm:

$$H_{yr}(s)=\frac{H_p(s)-H_{yv}(s)}{H_p(s)} \text{ sau } H_{yr}(s)+\frac{H_{yv}(s)}{H_p(s)}=1 \qquad (4.26)$$

$$H_{yn}(s)=\frac{H_{yr}(s)-H_p(s)}{H_p(s)} \text{ sau } \frac{H_{yr}(s)}{H_p(s)}-H_{yn}(s)=1,$$

ceea ce ilustrează faptul că, dacă una dintre cele trei funcții de transfer este dată, celelalte două sunt fixate. Aceasta conduce ușor la concluzia că acest SRA are un singur grad de libertate.

Pentru SRA prezentat în figura 4.10, în aceleași condiții se calculează cele trei funcții de transfer:

$$H_{yr}(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{H_{R1}(s)H_p(s)}{1+(H_{R1}(s)+H_{R2}(s))H_p(s)}=H_0(s) \qquad (4.27)$$

$$H_{yv}(s)=\frac{Y(s)}{V(s)}=\frac{H_p(s)}{1+(H_{R1}(s)+H_{R2}(s))H_p(s)}=H_{0V}(s) \qquad (4.28)$$

$$H_{yn}(s)=\frac{Y(s)}{N(s)}=-\frac{(H_{R1}(s)+H_{R2}(s))H_p(s)}{1+(H_{R1}(s)+H_{R2}(s))H_p(s)}=H_{0n}(s) \qquad (4.29)$$

Din aceste relații se obțin cu ușurință:

$$H_{yr}(s)=H_{R1}(s)H_{yv}(s)$$

$$H_{yn}(s)=\frac{H_{yv}(s)-H_p(s)}{H_p(s)} \qquad (4.30)$$

Astfel, se remarcă din (4.30) că această structură de reglare are două grade de libertate. Dacă $H_{yv}(s)$ este dată, atunci $H_{yn}(s)$ este dată, dar $H_{yr}(s)$ nu este fixată, deoarece $H_{R1}(s)$ este independenta de $H_{yv}(s)$.

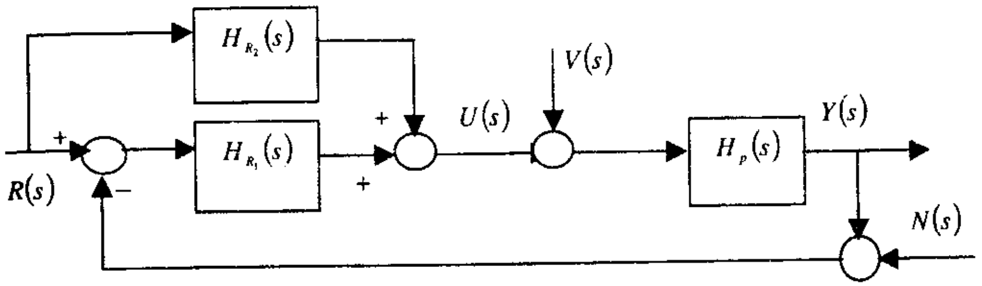


Fig. 4.10

În acest caz, două funcții de transfer dintre cele trei calculate sunt independente, iar SRA are două grade de libertate.

O altă structură de SRA cu două grade de libertate este prezentată în figura 4.11.

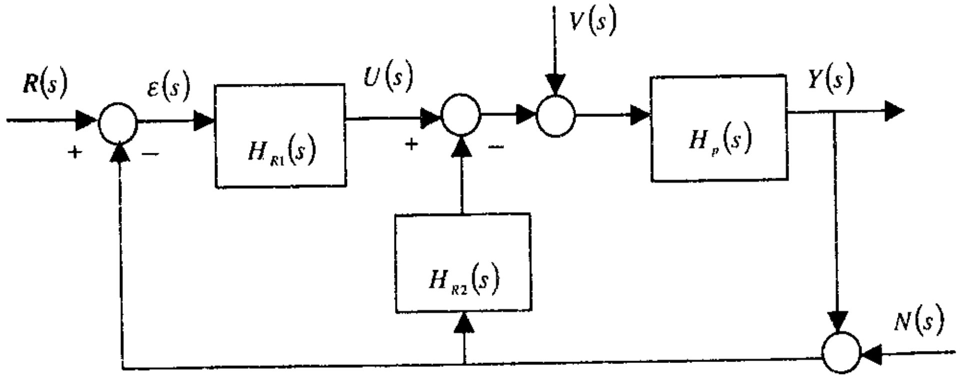


Fig. 4.11

Pentru această structură de SRA se pot calcula funcţiile de transfer:

$$H_{yr}(s)=\frac{H_{R1}(s)H_p(s)}{1+H_{R1}(s)H_p(s)}+\frac{H_{R2}(s)H_p(s)}{1+H_{R1}(s)H_p(s)} \tag{4.31}$$

$$H_{yv}(s)=\frac{H_p(s)}{1+H_{R1}(s)H_p(s)} \tag{4.32}$$

$$H_{yn}(s)=-\frac{H_{R1}(s)H_p(s)}{1+H_{R1}(s)H_p(s)} \tag{4.33}$$

Ţinând seama de aceste expresii, putem scrie următoarele relaţii între aceste funcţii de transfer:

$$H_{yr}(s)=H_{R2}(s)H_{yv}(s)+\frac{H_p(s)-H_{yv}(s)}{H_p(s)}$$
$$H_{yn}(s)=\frac{H_{yv}(s)-H_p(s)}{H_p(s)} \tag{4.34}$$

Este clar că şi în acest caz, dacă $H_{yv}(s)$ este dată, atunci $H_{yn}(s)$ este fixată, însă $H_{yr}(s)$ nu este fixată deoarece $H_{R2}(s)$ este independentă de $H_{yn}(s)$. Aceasta ilustrează că sistemul de reglare automată are două grade de libertate.

Este de remarcat faptul că structurile de reglare cu regulatoare PI-D şi regulatoare I-PD se înscriu în categoria SRA cu două grade de libertate. În aceste cazuri, referinţa şi semnalele perturbatoare sunt prelucrate după legi diferite.

Astfel, cele două legi de reglare reprezintă cazuri particulare ale unor sisteme cu două grade de libertate:

$$H_{R1}(s)=K_R\frac{1}{T_i s} \tag{4.35}$$

$$H_{R2}(s)=K_R(1+T_d s) \tag{4.36}$$

În cazul general, cele două legi de reglare vor fi determinate pornind de la cerinţe de performanţă şi ţinând seama de particularităţile obiectului condus.

De remarcat faptul că pentru structurile de reglare cu două grade de libertate, performanţele SRA pot fi obţinute la valori dorite prin ajustarea parametrilor de acord pentru fiecare lege de reglare din structură.

4.2. Analiza performanţelor SRA cu regulatoare convenţionale

În cele ce urmează, vor fi analizate performanţele SRA cu un singur grad de libertate şi cu două grade de libertate, în cazul în care modelul procesului este

fixat. Vom considera în cadrul acestui paragraf modele simplificate ale procesului conţinând una sau două constante de timp şi/sau timp mort.

4.2.1. Analiza SRA cu regulator P

Vom considera mai întâi procese de ordinul întâi, fără timp mort:

$$H_p(s)=\frac{K_p}{T_p s+1}.$$

În acest caz, funcţiile de transfer ataşate SRA calculate în raport cu referinţa şi perturbaţia, au forma:

$$H_0(s)=\frac{K_R K_p}{T_p s+1+K_R K_p}=\frac{K_0}{T_0 s+1} \tag{4.37}$$

unde

$$K_0=\frac{K_R K_p}{1+K_R K_p}$$

$$T_0=\frac{T_p}{1+K_R K_p}$$

şi

$$H_{0v}(s)=\frac{K_p}{T_p s+1+K_R K_p} \tag{4.38}$$

Pornind de la expresiile celor două funcţii de transfer, se pot determina performanţele în raport cu referinţa şi cu perturbaţiile în cazul variaţiei acestora sub formă de treaptă.

Pentru procese care nu conţin integrator (în funcţia de transfer $H_p(s)$ nu apare un zero în origine), utilizarea unui regulator P conduce la eroare staţionară diferită de zero pentru referinţă treaptă.

Eroarea în regim staţionar pentru referinţă treaptă unitară rezultă cu uşurinţă din relaţia:

$$\varepsilon_{st}=\lim_{s\to 0} s\varepsilon(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+H_d(s)}\frac{1}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{1+H_d(s)}, \tag{4.39}$$

dacă ţinem seama de relaţia de calcul a erorii:

$$\varepsilon(s)=\frac{1}{1+H_d(s)}R(s)=[1-H_0(s)]R(s).$$

Astfel, ţinând seama de (4.37) şi (4.39), rezultă:

$$\varepsilon_{st}=\lim_{s\to 0}\left[1-\frac{K_R K_p}{T_p s+1+K_R K_p}\right]=\frac{1}{1+K_R K_p} \tag{4.40}$$

Este de remarcat faptul că prin creşterea factorului de amplificare se reduce valoarea erorii staţionare.

Pentru acest caz particular de sistem de ordinul întâi, viteza de răspuns a SRA la modificarea referinţei creşte odată cu creşterea factorului de amplificare K_R.

Astfel, constanta de timp a SRA, ţinând seama de (4.37), se calculează cu relaţia:

$$T_0 = \frac{T_p}{1 + K_R K_p}$$

ceea ce evidenţiază faptul că pentru un T_p dat, creşterea factorului de amplificare K_R conduce la reducerea constantei de timp T_0.

4.2.2. Analiza SRA cu regulator PI

Se consideră în continuare un model de ordinul întâi pentru caracterizarea procesului, iar regulatorul este de tip PI.

În cadrul structurii SRA cu un singur grad de libertate (fig. 4.12), se evidenţiază faptul că pe calea directă există un integrator poziţionat înaintea punctului de aplicare a perturbaţiilor.

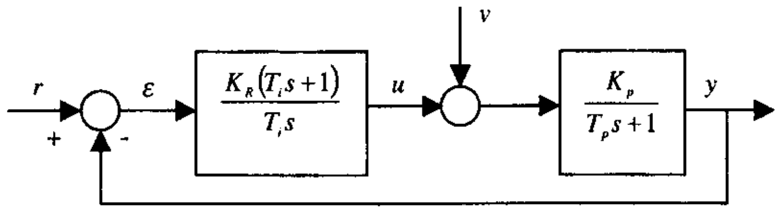


Fig. 4.12

Funcţia de transfer a căii directe este dată de relaţia:

$$H_d(s) = \frac{K_R K_p (T_i s + 1)}{T_i s (T_p s + 1)} \tag{4.41}$$

iar funcţiile de transfer în raport cu referinţa şi perturbaţia au expresiile:

$$H_0(s) = \frac{K_p K_R (T_i s + 1)}{T_i T_p s^2 + T_i (1 + K_p K_R) s + K_p K_R} \tag{4.42}$$

$$H_{0v}(s) = \frac{K_p T_i s}{T_i T_p s^2 + T_i (1 + K_p K_R) s + K_p K_R} \tag{4.43}$$

Pentru acest SRA, eroarea în regim staţionar este egală cu zero, având în vedere prezenţa integratorului pe calea directă:

$$\varepsilon_{st} = \lim_{s \to 0} \left[1 - H_0(s) \right] = \lim_{s \to 0} \left[1 - \frac{K_p K_R (T_i s + 1)}{T_i T_p s^2 + T_i (1 + K_p K_R) + K_p K_R} \right] = 0 .$$

Perturbaţiile de tip treaptă în acest caz sunt rejectate.

Într-adevăr, ieşirea calculată în raport cu perturbaţia este:

$$Y_v(s) = H_{0v}(s) \cdot V(s) = \frac{K_p T_i s}{T_i T_p s^2 + T_i (1 + K_p K_R) s + K_p K_R} \frac{1}{s} ,$$

iar valoarea de regim staţionar a acesteia este:

$$y_{v_{st}} = \lim_{s \to 0} s Y_v(s) = 0 .$$

Pentru analiza performanţelor tranzitorii, vom scrie ieşirea SRA în raport cu referinţa şi perturbaţia sub forma:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2 (T_i s + 1)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} R(s) \tag{4.44}$$

$$Y_v(s) = \frac{K_R}{T_i} \frac{\omega_n^2 s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} V(s) \tag{4.45}$$

unde

$$\omega_n^2 = \frac{K_R K_p}{T_i T_p}$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{1 + K_R K_p}{K_p} \sqrt{\frac{T_i T_p}{K_R K_p}} .$$

Ţinând seama de (4.44), răspunsul indicial al SRA poate fi pus sub forma [15, 34]:

$$y(t) = 1 - \frac{\sqrt{\lambda^2 - 2\zeta\lambda + 1}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin\left(\omega_n t \sqrt{1 - \zeta^2} + \gamma \right) \tag{4.46}$$

unde $\lambda = \omega_n T_i$, $\operatorname{tg}\gamma = \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta - \lambda}$ şi $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}$.

Pentru diferite valori ale parametrilor K_R şi T_i se pot determina performanţele tranzitorii, suprareglajul şi durata regimului tranzitoriu, ţinând seama de relaţiile de calcul:

$$\sigma = \exp\left[-\zeta \frac{\pi - (\gamma - \varphi)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cdot \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\zeta\lambda} \right] \tag{4.47}$$

$$t_t = \ln\frac{0.05\sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta\omega_n} + \frac{1}{\zeta\omega_n}\ln\sqrt{\lambda^2 - 2\zeta\lambda + 1} \qquad (4.48)$$

Din analiza răspunsului unui SRA cu regulator PI pentru un proces de ordinul întâi cu parametrii $K_p = 10$ şi $T_p = 15s$, pentru diferite valori ale parametrilor K_R şi T_i se poate cu uşurinţă constata efectul creşterii factorului de amplificare al căii directe $\frac{K_R K_p}{T_i}$ asupra suprareglajului şi duratei regimului tranzitoriu (fig. 4.13).

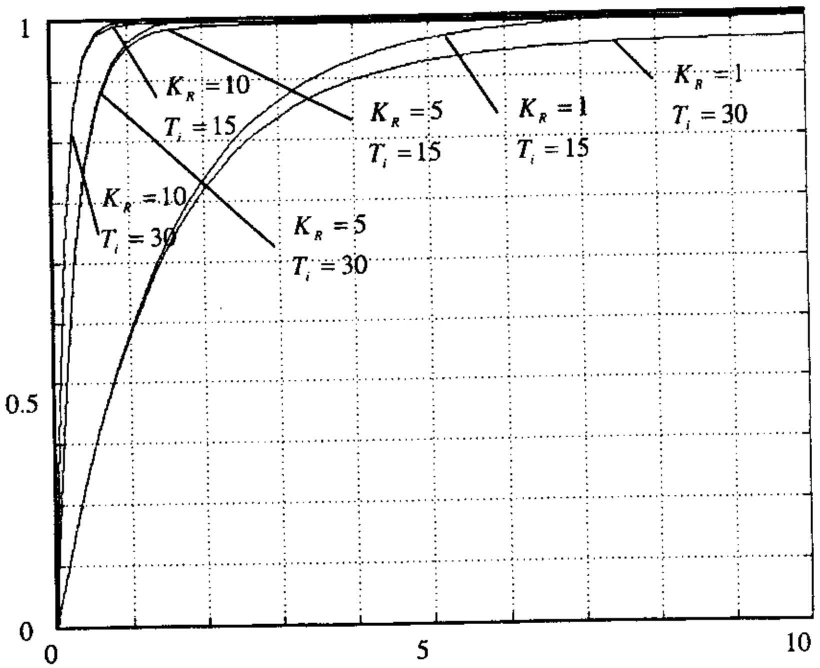


Fig. 4.13

În mod similar se poate analiza efectul modificării raportului K_R / T_i asupra performanţelor tranzitorii în raport cu perturbaţia.

Răspunsul SRA la perturbaţie treaptă unitară se calculează cu relaţia:

$$y_v(t) = \frac{K_R}{T_i}\cdot\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2} \qquad (4.49)$$

În figura 4.14 sunt prezentate răspunsurile SRA în raport cu perturbaţiile de tip treaptă pentru diverse perechi de valori K_R / T_i.

Este de remarcat faptul că, pentru a limita amplitudinea ieşirii în raport cu perturbaţia, se cere ca valoarea factorului K_R / T_i să fie cât mai mică. Pentru a obţine însă viteze de răspuns ridicate în raport cu referinţa, se cere ca raportul K_R / T_i să fie cât mai mare. Rezultă cu uşurinţă că această structură de reglare nu poate asigura o comportare optimă, atât în raport cu modificarea referinţei, cât şi în raport cu modificarea perturbaţiei.

Ajustarea celor doi parametri ai regulatorului K_R şi T_i se va face ţinând seama de particularităţile procesului şi de natura perturbaţiilor.

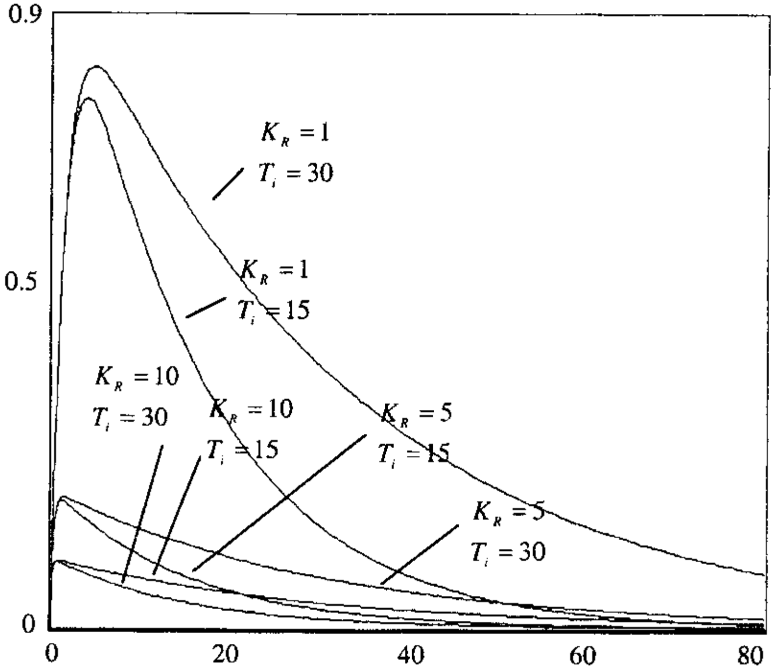


Fig. 4.14

Exemplul 4.1:

Pentru a exemplifica modul de utilizare a regulatoarelor P, PI şi PID şi de abordare a proiectării sistemelor cu astfel de regulatoare, considerăm un SRA a turaţiei unui motor de curent continuu cu excitaţie independentă.

Ecuaţiile care descriu funcţionarea motorului de curent continuu sunt [11]:

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\dot{\theta} = K_m i + C_r$$
$$L\frac{di}{dt} + Ri = u - K_e\dot{\theta} \qquad (4.50)$$

unde:

- J – *momentul de inerție redus la axul motorului;*
- b – *coeficientul de frecare vâscoasă;*
- K_m – *coeficient de proporționalitate;*
- C_r – *cuplul rezistent;*
- L – *inductanța circuitului rotoric;*
- R – *rezistența circuitului rotoric;*
- K_e – *coeficient de proporționalitate;*
- i – *curentul rotoric;*
- u – *tensiunea de alimentare a motorului.*

Dacă introducem notațiile:

$y := \dot{\theta}$ – *viteza unghiulară,*

$v := C_r$ – *perturbația de tip sarcină,*

ecuațiile motorului pot fi scrise sub forma:

$$J\dot{y} + by = K_m i + v$$
$$K_e y + L\frac{di}{dt} + Ri = u \qquad (4.51)$$

Dacă aplicăm transformata Laplace ecuațiilor finale, în condiții inițiale nule și eliminăm variabila intermediară $I(s)$, obținem:

$$\left[\frac{JL}{bR + K_m K_e}s^2 + \frac{JR + bL}{bR + K_m K_e}s + 1\right]Y(s) = \frac{K_m}{bR + K_m K_e}U(s) + \frac{1}{bR + K_m K_e}V(s) \qquad (4.52)$$

sau

$$(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)Y(s) = AU(s) + BV(s) \qquad (4.53)$$

unde constantele de timp τ_1 și τ_2 se calculează cu relațiile:

$$\tau_1^{-1} = \frac{JR + bL + \sqrt{(JR + bL)^2 - 4JL(bR + K_m K_e)}}{2JL}$$

$$\tau_2^{-1} = \frac{JR + bL - \sqrt{(JR + bL)^2 - 4JL(bR + K_m K_e)}}{2JL}$$

iar amplificările A și B sunt:

$$A = \frac{K_m}{bR + K_m K_e}; \quad B = \frac{1}{bR + K_m K_e}.$$

Ecuația (4.53) poate fi scrisă și sub forma funcției de transfer:

$$Y(s) = H_1(s)U(s) + H_2(s)V(s) \qquad (4.54)$$

unde

$$H_1(s) = \frac{A}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

și

$$H_2(s) = \frac{B}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}.$$

În cazul în care $b = 0$ și L are valoare redusă, atunci $\tau_2 = L/R$ și poartă denumirea de constantă de timp electrică, iar $\tau_1 = \frac{RJ}{K_m K_e}$ și reprezintă constanta de timp mecanică a motorului.

Dacă U și V sunt constante, valoarea de regim staționar a ieșirii (turația de regim staționar) este:

$$y_{st} = AU + BV \qquad (4.55)$$

Cea mai simplă structură de SRA a turației unui motor de c.c. este prezentată în figura 4.15.

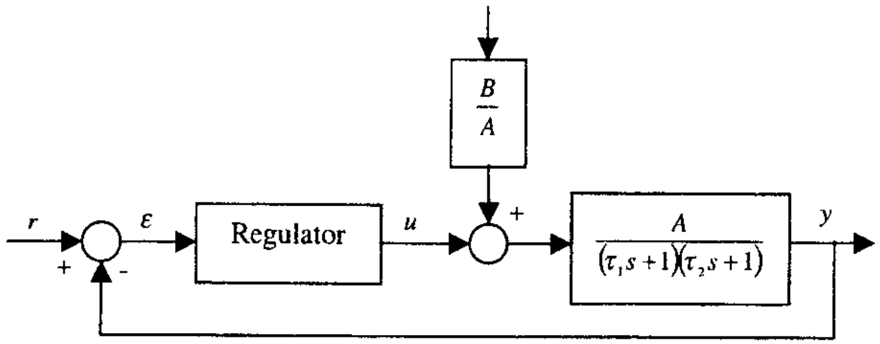


Fig. 4.15

În această structură s-a considerat că traductorul de turație (tahogeneratorul) are funcția de transfer egală cu unitatea.

Admițând că regulatorul utilizat este de tip P:

$$u = K_R(r - y)$$

ieșirea $Y(s)$ se poate calcula cu ajutorul relației:

$$Y(s) = \frac{AK_R}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) + AK_R}R(s) + \frac{B}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) + AK_R}V(s) \qquad (4.56)$$

În regim staționar, pentru cazul în care $v = 0$ (nu există perturbații de tip cuplu), se obține:

$$y_{st} = \frac{AK_R}{1 + AK_R} \qquad (4.57)$$

Dacă amplificarea K_R se alege astfel încât $AK_R >> 1$, rezultă:

$$y_{st} \cong r.$$

În prezența perturbației, valoarea de regim staționar a turației este dată de relația:

$$y_{st} = \frac{AK_R}{1+AK_R} r + \frac{B}{1+AK_R} v \qquad (4.58)$$

Dacă prin proiectare se aleg valori ale factorului de amplificare K_R, astfel încât $AK_R >> 1$ și $AK_R >> B$, vor rezulta abateri nesemnificative ale turației în prezența perturbației.

Pentru un motor de curent continuu cu parametri $\tau_1 = 1/60 s$, $\tau_2 = 1/600 s$, $A = 10$ și $B = 50$, cu referința de $100 rad/s$, la o variație a cuplului rezistent egală cu $v = -0.1 Nm$, se obține:

$$y_{st} = 10u + 50v .$$

Pentru $K_R = 1/10$ și $v = 0$, în circuit deschis se obține:

$$y_{st} = 100 rad/s \qquad (u = 10).$$

Pentru aceleași valori ale lui K_R și r_1, în prezența perturbației ($v = -0.1 Nm$) se obține:

$$y_{st} = 100 + 50(-0.1) = 95 rad/s.$$

În cazul închiderii buclei cu referința egală cu zero:

$$y_{st} = \frac{B}{1+K_R A} = \frac{50}{1+10K_R}.$$

Pentru a îmbunătăți precizia de 100 de ori în comparație cu sistemul deschis, adică $1 + AK_R = 100$, rezultă:

$K_R = 99$, ceea ce poate conduce sistemul în saturație.

În aceste condiții, valoarea staționară a turației în lipsa perturbației este:

$$y_{st} \frac{AK_R}{1+AK_R} r = \frac{99}{100} 100 = 99 rad/s$$

iar în prezența perturbației:

$$y_{st} = 99 - 0.05 = 98.5 rad/s .$$

Este de remarcat faptul că în timp ce sistemul deschis operează cu eroare egală cu 5%, sistemul închis, în prezența perturbației, are o eroare staționară de 0.05%.

Reglarea turației cu regulator PI

Dacă se consideră procesul caracterizat prin funcția de transfer:

$$H_p(s) = \frac{A}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \qquad (4.59)$$

și regulatorul de tip PI, funcția de transfer a căii directe este:

$$H_d(s) = H_R(s) H_p(s) = \frac{K_R A(T_i s + 1)}{T_i s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \qquad (4.60)$$

iar funcția de transfer a SRA în raport cu referința este:

$$H_0(s) = \frac{K_R A(T_i s + 1)}{K_R A(T_i s + 1) + (\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) T_i s}.$$

Eroarea în regim staționar este egală cu zero pentru referință și perturbație treaptă, datorită integratorului prezent în structura regulatorului.

Ecuația caracteristică a SRA este:

$$\tau_1 \tau_2 s^3 + (\tau_1 + \tau_2) s^2 + (1 + AK_R) s + \frac{AK_R}{T_i} = 0 \qquad (4.61)$$

Prin alegerea parametrilor K_R și T_i se pot obține performanțele tranzitorii dorite, cu observația că prezența componentei integrale, printr-o alegere necorespunzătoare a constantei de timp T_i, poate conduce la degradarea performanțelor tranzitorii.

Sistemul de reglare, în acest caz, conține trei poli și un zero.

O soluție avantajoasă se obține în cazul în care constanta dominantă de timp a procesului, determinată precis, poate fi compensată prin alegerea constantei $T_i = \tau_1$.

În acest caz, se obține:

$$H_0(s) = \frac{K_R A}{T_i s(\tau_2 s + 1) + K_R A} \qquad (4.62)$$

ceea ce evidențiază un sistem de ordinul doi ale cărui performanțe tranzitorii sunt determinate numai de valoarea factorului de amplificare K_R, în condițiile ideale ale cunoașterii precise a constantelor de timp τ_1 și τ_2, respectiv amplificarea A.

Reglarea turației cu regulator de tip PID

Componenta derivativă este introdusă pentru îmbunătățirea stabilității și creșterea gradului de amortizare a răspunsului. Așa cum s-a menționat, componenta derivativă poate fi inclusă în SRA, fie pe calea directă, fie pe calea de reacție (algoritmul PID-modificat).

Ieșirea SRA în prezența perturbației și cu regulator PID pe calea directă se calculează cu relația:

$$Y(s) = \frac{AK_R\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) + AK_R\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)} R(s) + \frac{B}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) + AK_R\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)} V(s) \qquad (4.63)$$

Funcția de transfer a SRA în raport cu referința este:

$$H_0(s)=\frac{AK_R\left[1+\frac{1}{T_i s}+T_d s\right]}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)+AK_R\left[1+\frac{1}{T_i s}+T_d s\right]}$$

și evidențiază prezența a trei poli și două zerouri.

Este ușor de remarcat faptul că o alegere necorespunzătoare a parametrilor de acord K_R, T_i și T_d poate conduce sistemul în instabilitate.

Pentru a atenua efectul nedorit al celor două zerouri, se poate selecta un algoritm PID cu filtrare a cărui funcție de transfer de forma:

$$H_R(s)=\frac{K_R(\theta_1 s+1)(\theta_2 s+1)}{\theta s(\tau s+1)}$$

să asigure compensarea constantelor de timp τ_1 și τ_2, prin alegerea corespunzătoare a constantelor θ_1 și θ_2, și anume: $\theta_1=\tau_1$ și $\theta_2=\tau_2$.

În acest caz se obține:

$$H_0(s)=\frac{AK_R}{\theta s(\tau s+1)+AK_R},$$

ceea ce evidențiază un SRA de ordinul doi ale cărui performanțe tranzitorii pot fi controlate prin alegerea corespunzătoare a constantelor τ și respectiv a factorului de amplificare K_R.

Se poate analiza efectul fiecărei componente asupra performanțelor tranzitorii ale SRA.

Ținând seama de limitările structurii de reglare cu un singur grad de libertate, pentru reglarea turației se recomandă variante avansate de structuri cu două grade de libertate [11]. Cea mai utilizată structură de reglare a turației unui motor de curent continuu este structura de reglare în cascadă.

4.3. Analiza SRA cu regulatoare PID pentru procese cu timp mort

Vom considera în cele ce urmează modele matematice de ordinul 1 și de ordinul al 2-lea cu timp mort, modele ce aproximează cu bună precizie o clasă de procese lente și foarte lente.

Astfel, pentru procese caracterizate prin funcții de transfer de forma:

$$H_{1\tau}(s)=\frac{K_p e^{-\tau s}}{T_p s+1};\; H_{1\tau}(s)=\frac{K_v e^{-\tau s}}{s(T_v s+1)}$$

și

$$H_{2\tau}(s)=\frac{K_p e^{-\tau s}}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$$

vom analiza efectul modificării parametrilor K_R, T_i și T_d asupra gradului de stabilitate al SRA și asupra performanțelor tranzitorii. Presupunem că parametrii modelului atașat procesului condus sunt determinați suficient de precis.

Având în vedere particularitățile sistemelor cu timp mort, vom analiza comportarea SRA pornind de la condițiile ce asigură limita de stabilitate a acestora.

Pentru un proces cu o constantă de timp și timp mort, alegerea unui regulator P conduce la o funcție de transfer a căii directe:

$$H_d(s)=\frac{K_R K_p e^{-\tau s}}{T_p s+1} \tag{4.64}$$

Comportarea SRA va fi influențată de factorul de amplificare $K_d=K_R K_p$ și de raportul τ/T_p. Atât creșterea factorului de amplificare K_d, cât și creșterea raportului τ/T_p, determină o reducere a gradului de stabilitate.

Raportul $\tau/T_p=\theta_1$, cunoscut ca și timpul mort normalizat, poate fi utilizat ca un indicator al dificultăților de reglare a proceselor cu timp mort [4]. Cu cât θ_1 este mai mare, dificultățile de reglare a acestor procese sunt mai mari.

În mod similar, se poate introduce un factor de amplificare normalizat:

$$K_1=K_p K_{R0}$$

unde K_{R0} reprezintă factorul de amplificare al regulatorului pentru care locul Nyquist intersectează axa reală negativă ($\varphi(\omega)=-\pi$):

$$K_1=K_p K_{R0}=\frac{H_{1\tau}(0)}{\left|H_{1\tau}(j\omega_\pi)\right|} \tag{4.65}$$

unde ω_π este cea mai mică frecvență astfel încât:

$$\arg H_{1\tau}(j\omega_\pi)=-\pi.$$

Numărul K_1 poate fi interpretat ca amplificarea cea mai mare K_d ce poate fi realizată folosind regulator proporțional, când SRA se găsește la limita de stabilitate.

O valoare mare a acestui număr evidențiază ușurința reglării unor asemenea procese, în schimb o valoare redusă creează reale dificultăți de reglare a proceselor cu timp mort cu regulator P.

În regim staționar, eroarea pentru referință treaptă egală cu r_0 se calculează cu relația:

$$\varepsilon_{st} = \frac{1}{1+K_pK_R}r_0 > \frac{1}{1+K_pK_{R0}}r_0 = \frac{1}{1+K_1}r_0 \tag{4.66}$$

Numărul K_1 poate fi astfel utilizat pentru a estima eroarea staționară minimă în condițiile utilizării regulatorului P și, de asemenea, determină oportunitatea includerii componentei integrale în algoritmul de reglare în vederea satisfacerii cerinței de precizie a SRA.

Într-o manieră similară, se pot introduce coeficienții normalizați θ_2 și K_2, pentru procese modelate prin funcții de transfer de forma: $H_{1\tau}(s) = \dfrac{K_v e^{-\tau s}}{s(T_v s+1)}$,

$$\theta_2 = \frac{\tau}{T_v} \tag{4.67}$$

unde τ și T_v, în acest caz, reprezintă timpul mort aparent și constanta de timp aparentă a procesului.

Pentru aceste procese ce conțin în structură un integrator, produsul $K_{R0}K_v$ are dimensiunea unei frecvențe.

Amplificarea normalizată a procesului cu integrator se definește astfel:

$$K_2 = \frac{\lim\limits_{s\to 0} sH_p(s)}{\omega_\pi \left|H_{1\tau}(j\omega_\pi)\right|} = \frac{K_v K_{R0}}{\omega_\pi} = \frac{K_v K_{R0} T_0}{2\pi}, \tag{4.68}$$

unde ω_π este cea mai mică frecvență pentru care:

$$\arg H_d(j\omega_\pi) = -\pi .$$

Pentru referința de tip treaptă (fără perturbații), eroarea în regim staționar este egală cu zero. Pentru referința rampă, eroarea de viteză este dată de relația:

$$\varepsilon_v = \frac{1}{K_v K_R} r_1 > \frac{1}{K_2 \omega_\pi} r_1 \tag{4.69}$$

unde r_1 reprezintă panta referinței de tip rampă.

În raport cu perturbațiile de tip sarcină sub formă de treaptă, ce acționează la intrarea procesului, se calculează eroarea sub forma:

$$y_{v1} = \frac{K_p v_0}{1+K_pK_R} > \frac{K_p v_0}{1+K_1} \tag{4.70}$$

respectiv,

$$y_{v2} = \frac{v_0}{K_R} = \frac{K_v\omega_\pi v_0}{K_v\omega_\pi K_R} > \frac{K_v v_0}{\omega_\pi K_2} = \frac{K_v T_0 v_0}{2\pi K_2} \tag{4.71}$$

(pentru procese ce conțin un integrator [4, 11]).

Cantitățile $y_{v1}/K_p v_0$ și $y_{v2}\omega_\pi/K_v v_0$ sunt astfel adimensionale.

Luând în considerație valoarea maximă a erorii în raport cu perturbația de tip treaptă $y_{v\max}$, se pot defini următorii indicatori sintetici pentru evaluarea preciziei în raport cu perturbațiile de tip treaptă de amplitudine egală cu v_0.

Astfel, pentru procese cu timp mort și o constantă de timp, se definește factorul:

$$\lambda_1 = \frac{1}{K_p v_0}\cdot y_{v\max} \tag{4.72}$$

iar pentru procese cu un integrator, timp mort și o constantă de timp se definește factorul:

$$\lambda_2 = \frac{\omega_\pi}{K_v v_0}\cdot y_{v\max} = \frac{2\pi}{K_v T_0 v_0}\cdot y_{v\max} \tag{4.73}$$

Folosind acești indicatori sintetici se pot determina valorile optime ale factorului de amplificare care asigură gradul de stabilitate dorit și precizia în raport cu referința și perturbația de tip treaptă.

Pentru procese de ordinul întâi și timp mort, se poate stabili o relație exactă între coeficienții sintetici θ_1 și K_1, în condițiile în care SRA se află la limita de stabilitate:

$$\theta_1 = \frac{\tau}{T_P} = \frac{\pi - a\tan\sqrt{K_1^2-1}}{\sqrt{K_1^2-1}} \tag{4.74}$$

În figura 4.16 se prezintă dependența între θ_1 și K_1, evidențiindu-se efectul pe care timpul mort normalizat θ_1 și factorul de amplificare normalizat K_1 îl au asupra gradului de stabilitate al SRA. Din această dependență se poate determina, pentru o anumită valoare a parametrului θ_1, valoarea factorului de amplificare care asigură gradul de stabilitate dorit.

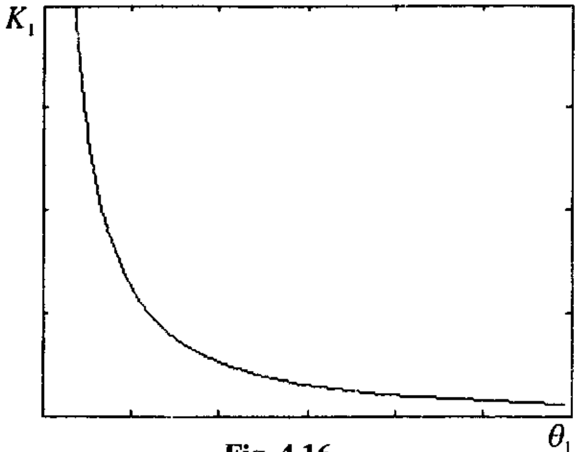


Fig. 4.16

O relație analoagă cu (4.74) se poate obține pentru procese cu integrator și timp mort. Funcția de transfer $sH_P(s)$ poate fi caracterizată prin timpul mort aparent și constanta de timp T_v. În acest caz, ținând seama de condițiile ce definesc limita de stabilitate, se deduce cu ușurință relația:

$$\theta_2 = \frac{\tau}{T_v} = \frac{\frac{\pi}{2} - a\tan\sqrt{K_2^2 - 1}}{\sqrt{K_2^2 - 1}}. \qquad (4.75)$$

Factorul θ_2 poate fi utilizat pentru calculul coeficientului K_2. Dependența $K_2 = f(\theta_2)$ este reprezentată în figura 4.17.

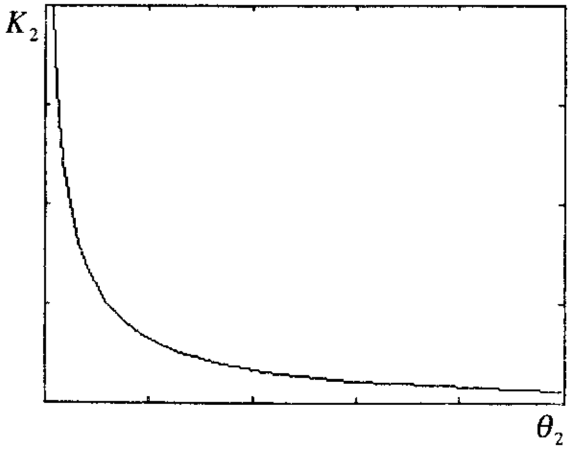


Fig. 4.17

O analiză similară se poate efectua și în cazul utilizării regulatorului PI.

Astfel, pentru procese cu timp mort și o constantă de timp, utilizarea unui regulator PI conduce la următoarea funcție de transfer a căii directe:

$$H_d(s) = \frac{K_R(T_i s + 1)}{T_i s} \cdot \frac{K_p e^{-\tau s}}{T_p s + 1} \qquad (4.76)$$

sau

$$H_d(s) = \frac{K_d e^{-\tau s}(T_i s + 1)}{s(T_p s + 1)}.$$

La limita de stabilitate, sistemul este caracterizat prin coeficientul:

$$K_{d0} = \frac{K_p K_{R0}}{T_{i0}}$$

unde $\frac{K_{R0}}{T_{i0}}$ reprezintă factorul de amplificare al regulatorului PI care asigură $\arg H_d(j\omega_\pi) = -\pi$, pentru un K_p dat (amplificarea pentru care se asigură intersecția locului Nyquist cu axa reală negativă).

Din relația:

$$\arg H_d(j\omega_\pi) = \varphi(\omega_\pi) = -\pi = -\frac{\pi}{2} - \omega_\pi\tau - a\tan T_p\omega_\pi + a\tan T_i\omega_\pi$$

rezultă

$$\tau\omega_\pi = \frac{\pi}{2} + \varphi_P - \varphi_I, \qquad (4.77)$$

unde

$$\varphi_P = a\tan T_p\omega_\pi \text{ și } \varphi_I = a\tan T_i.$$

Dacă definim coeficientul K_2' sub forma:

$$K_2' = \frac{\lim\limits_{s\to 0} sH_d(s)}{|H_d(j\omega_\pi)|}$$

rezultă:

$$K_2' = \frac{\omega_\pi\sqrt{T_p^2\omega_\pi^2 + 1}}{\sqrt{\omega_\pi^2 T_i^2 + 1}}$$

sau

$$\omega_\pi = \frac{1}{T_p}\sqrt{\frac{\sqrt{\left(1 - K_2'^2 T_i^2\right)^2 + 4K_2'^2 T_p^2} - \left(1 - K_2'^2 T_i^2\right)}{2}}. \qquad (4.78)$$

Din (4.77) şi (4.78) rezultă:

$$\frac{\tau}{T_p}\sqrt{\frac{\sqrt{\left(1-K_2^{'2}T_i^2\right)^2+4K_2^{'2}T_p^2}-\left(1-K_2^{'2}T_i^2\right)}{2}}=\frac{\pi}{2}-a\tan\omega_\pi T_p+a\tan\omega_\pi T_i$$

sau

$$\theta_2^{'}=\frac{\tau}{T_p}=$$

$$=\frac{\frac{\pi}{2}-a\tan\sqrt{\sqrt{\left(1-K_2^{'2}T_i^2\right)^2+4K_2^{'2}T_p^2}-\left(1-K_2^{'2}T_i^2\right)}}{\sqrt{\frac{\sqrt{\left(1-K_2^{'2}T_i^2\right)^2+4K_2^{'2}T_p^2}-\left(1-K_2^{'2}T_i^2\right)}{2}}}+ \tag{4.79}$$

$$+\frac{a\tan\sqrt{\sqrt{\left(1-K_2^{'2}T_i^2\right)^2+4K_2^{'2}T_p^2}-\left(1-K_2^{'2}T_i^2\right)}}{\sqrt{\frac{\sqrt{\left(1-K_2^{'2}T_i^2\right)^2+4K_2^{'2}T_p^2}-\left(1-K_2^{'2}T_i^2\right)}{2}}}$$

Se obţine astfel o relaţie $\theta_2^{'}=f\left(K_2^{'},T_i\right)$ care poate fi utilizată pentru acordarea regulatorului PI.

Pentru cazul foarte simplificat, atunci când T_p este calculat cu precizie ridicată şi alegând $T_p\equiv T_i$, relaţia (4.79) devine:

$$\theta_2^{'}=\frac{\pi}{2K_2^{'}T_i} \tag{4.80}$$

Acest caz particular poate fi studiat şi pornind de la expresia funcţiei de transfer $H_d(s)$, pentru $T_p\equiv T_i$:

$$H_d(s)=\frac{K_pK_R}{T_is}e^{-\tau s}.$$

Deducerea acestui rezultat poate reprezenta un exerciţiu pentru cititor.

În mod similar, se poate analiza comportarea SRA cu regulatoare PID pentru procese cu timp mort, cu una şi două constante de timp. De remarcat faptul că introducerea componentei derivative pentru procese cu timp mort se face cu precauţie şi, evident, numai dacă se obţine o îmbunătăţire a performanţelor tranzitorii.

În regim staţionar se asigură comportarea dorită în raport cu referinţa şi perturbaţia de tip treaptă, ca urmare a prezenţei componentei integrale în structura regulatorului.

4.4. Acordarea regulatoarelor PID

A acorda un regulator convenţional PID presupune determinarea valorilor optime ale parametrilor K_R, T_i şi T_d care asigură pentru un proces dat comportarea dorită a SRA în raport cu referinţa şi perturbaţiile ce acţionează asupra procesului. Ţinând seama că modelele simplificate ale proceselor conţin cel mai adesea incertitudini structurale şi parametrice, determinarea analitică a parametrilor de acord este orientativă cel mai adesea, rămânând ca valorile optime ale parametrilor să fie validate experimental. Acesta este motivul pentru care frecvent vorbim de acordarea experimentală pe obiect a regulatoarelor selectate în concordanţă cu particularităţile procesului şi cu cerinţele de performanţă dorite. Experienţa a validat soluţii eficiente pentru diferite clase de procese în ceea ce priveşte tipul de algoritm de reglare şi structura optimă de SRA. În aceste condiţii, rămâne de acordat regulatorul pentru regimuri precizate de funcţionare într-un context perturbator cunoscut cu suficient de bună precizie.

În paragraful anterior au fost analizate efectele diferitelor componente ale algoritmilor PID asupra performanţelor SRA fără a evidenţia ponderea acestora, definită prin parametrii K_R, K_R/T_i şi K_RT_d, asupra comportării generale a unui SRA. În cele ce urmează se prezintă proceduri analitice şi experimentale de determinare a parametrilor de acord K_R, T_i şi T_d pentru procese caracterizate prin modele matematice simplificate.

4.4.1. Acordarea regulatoarelor pentru procese rapide

Separarea obiectelor conduse în funcţie de valoarea constantelor de timp şi de valoarea timpului mort se impune ţinând seama de particularităţile proceselor lente şi foarte lente din punct de vedere al reglării sau conducerii.

Este cunoscut faptul că procesele rapide, caracterizate în general prin valori ale constantelor de timp dominante mai mici de 10 secunde şi constante de timp parazite, în general, cu un ordin de mărime mai reduse decât constantele de timp dominante, sunt descrise prin modele matematice

cu o bună precizie. În aceste condiţii este posibilă, cu bune rezultate, utilizarea unor metode analitice pentru determinarea valorilor optime ale parametrilor de acord.

Astfel, punând condiţia ca durata regimului tranzitoriu să fie minimă (banda de frecvenţă cât mai mare), rezultă relaţii de calcul ale parametrilor de acord în funcţie de parametrii modelului [15, 34].

Dacă vom considera modele matematice de forma:

$$H_p(s)=\frac{K_p}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_\Sigma s+1)} \tag{4.81}$$

unde T_1 şi T_2 sunt constante de timp dominante, iar T_Σ reprezintă suma tuturor constantelor parazite de timp ($T_\Sigma << \min(T_1,T_2)$) şi algoritmul de reglare recomandat de tip PID de forma:

$$H_R(s)=\frac{K_R(\theta_1 s+1)(\theta_2 s+1)}{s(\tau s+1)}, \tag{4.82}$$

atunci funcţia de transfer a căii directe este:

$$H_d(s)=H_R(s)H_p(s)=\frac{K_R K_p(\theta_1 s+1)(\theta_2 s+1)}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_\Sigma' s+1)} \tag{4.83}$$

În această relaţie, θ_1 şi θ_2 au semnificaţia constantelor de timp ataşate unor elemente de anticipaţie incluse în structura algoritmului de reglare de tip PID.

În condiţiile în care T_1, T_2 şi T_Σ' sunt cunoscute cu precizie, se pot alege parametrii regulatorului conform criteriului modulului [5, 39] astfel:

$$\theta_1=T_1;\ \theta_2=T_2;\ K_R=\frac{1}{2K_pT_\Sigma'}$$

unde $T_\Sigma' = T_\Sigma+\tau << \min(T_1,T_2)$.

Cu această alegere a parametrilor de acord se obţine:

$$H_d(s)=\frac{1}{2T_\Sigma' s(T_\Sigma' s+1)}$$
$$H_0(s)=\frac{1}{2T_\Sigma'^2 s^2+2T_\Sigma' s+1} \tag{4.84}$$

Este evident şi faptul că SRA asigură eroare staţionară egală cu zero, iar răspunsul tranzitoriu este influenţat numai de valoarea constantei de timp T_Σ', care are valoare foarte redusă.

În aceste condiţii, performanţele SRA sunt determinate de T_Σ', banda de frecvenţă fiind dată de relaţia:

$$\omega_B=\omega_n=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{T_\Sigma'}.$$

Această relaţie rezultă cu uşurinţă din (4.84), care poate fi pusă sub forma:

$$H_d(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)},$$

unde $\omega_n^2=\frac{1}{2T_\Sigma'}$, $\zeta=\frac{\sqrt{2}}{2}=0.7$.

O asemenea acordare a algoritmului de reglare asigură o valoare constantă a suprareglajului ($\sigma=4.3\%$), iar durata regimului tranzitoriu rezultă în funcţie de T_Σ':

$$t_t\approx\frac{4}{\zeta\omega_n}=8T_\Sigma'.$$

Pentru cazul în care referinţa este rampă unitară, rezultă o eroare permanentă (eroare de viteză):

$$\varepsilon_v=\frac{1}{K_v}=\frac{\omega_n}{2\zeta}=2T_\Sigma'.$$

Se poate uşor evidenţia prin intermediul caracteristicii $M(\omega)=|H_0(\omega)|$ (fig. 4.18) că banda de frecvenţe în acest caz este cu atât mai mare cu cât T_Σ' este mai mic.

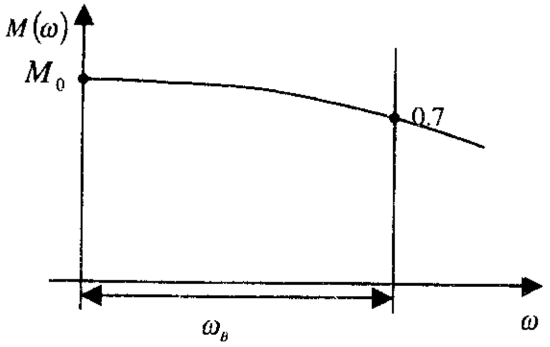


Fig. 4.18

Exemplul 4.2:

Se consideră un proces caracterizat prin:

$$H_p(s)=\frac{5}{(8s+1)(2s+1)(0.1s+1)}.$$

Se cere a alege un regulator astfel încât să fie satisfăcute următoarele cerinţe de performanţă: $\sigma \le 5\%$, $t_t \le 1s$ *şi* $\varepsilon_{st}=0$.

Conform variantei Kessler [39], se recomandă un regulator a cărui funcţie de transfer este:

$$H_R(s)=\frac{(8s+1)(2s+1)}{s}$$

$\theta_1=8s$, $\theta_2=2s$, $\theta=2K_pT_\Sigma=2\cdot5\cdot0.1=1$.

În acest caz:

$$\omega_n=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{T_\Sigma}=7.1s^{-1},\ \zeta=0.707.$$

Cu aceste valori ale parametrilor se obţin performanţele:

$\sigma=4.3\%$, $t_t=8T_\Sigma=0.8s$ *şi* $\varepsilon_{st}=0$.

Pentru intrare rampă:

$$\varepsilon_v=\frac{1}{K_v}=2T_\Sigma=0.2.$$

Pentru urmărirea fără eroare în regim permanent a referinţei rampă, conform criteriului simetriei [34, 39] se recomandă algoritmi de reglare de forma:

$$H_R(s)=\frac{(\theta_c s+1)^n}{\theta s} \tag{4.85}$$

unde n poate lua valoarea 1 sau 2 pentru algoritmi PID, $\theta_c=4nT_\Sigma$, iar $\theta=2K_pT_\Sigma\cdot\frac{\theta_c^n}{\prod_1^n T_k}$, unde T_k reprezintă constantele dominante ale procesului.

Folosind asemenea algoritmi de reglare pentru procese caracterizate prin modele aproximative de forma:

$$H_p(s)=\frac{K_p}{(T_\Sigma s+1)\prod_1^n(T_k s)} \tag{4.86}$$

se obţine funcţia de transfer a căii directe a SRA:

$$H_d(s)=\frac{4T_\Sigma s+1}{8T_\Sigma^2 s^2(T_\Sigma s+1)} \tag{4.87}$$

şi

$$H_0(s)=\frac{4T_\Sigma s+1}{8T_\Sigma^3 s^3+8T_\Sigma^2 s^2+4T_\Sigma s+1} \tag{4.88}$$

Din (4.87) rezultă că eroarea în regim permanent la referinţă rampă este egală cu zero, iar din (4.88) rezultă că performanţele tranzitorii sunt influenţate numai de T_Σ.

Funcţia de transfer $H_0(s)$ conţine trei poli şi un zero, putând fi pusă sub forma:

$$H_0(s)=\frac{\frac{\omega_n p}{z}(s+z)}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)(s+p)} \tag{4.89}$$

unde $z=-\frac{1}{4T_\Sigma}$, $\zeta=0.5$, $\omega_n=\frac{1}{2T_\Sigma}$ şi $p=-\frac{1}{2T_\Sigma}$.

O asemenea distribuţie a celor trei poli şi a zeroului evidenţiază o comportare nesatisfăcătoare a SRA în raport cu referinţa treaptă, însă asigură o bună comportare în raport cu referinţa rampă.

Exemplul 4.3

Considerând procesul caracterizat prin:

$$H_p(s)=\frac{1}{4s(0.1s+1)}$$

se cere alegerea unui regulator astfel încât eroarea în raport cu referinţa de tip rampă să fie egală cu zero.

Conform criteriului simetriei, pentru acest proces se recomandă un regulator PI:

$$H_R(s)=\frac{\theta_c s+1}{\theta s}=\frac{1+4T_\Sigma s}{2K_pT_\Sigma s\cdot\frac{4T_\Sigma}{T_p}}=\frac{1+4T_\Sigma s}{0.02s}.$$

De remarcat faptul că, în ambele cazuri, performanţele sistemului sunt determinate numai în funcţie de constanta de timp parazită, putând fi aplicate numai proceselor rapide.

4.4.2. Alegerea şi acordarea regulatoarelor pentru procese lente

Procesele lente sunt caracterizate prin modele aproximative, având constante de timp mai mari de 10 secunde şi, cel mai adesea, conţin şi timp mort. Pentru alegerea tipului de regulator, proiectantul de SRA are în

sunt incluşi în polinomul de la numitorul lui $H_R(s)$ şi/sau în numitorul lui $H_{\hat{R}}(s)$. Pentru cazul în care $H_{\hat{R}}(s)=1$, se impune ca $P_V(s)$ să fie un factor al numitorului $H_R(s)$. Observăm că dacă $P_V(s)$ este un factor al numitorului lui $H_R(s)$, atunci componentele instabile ale lui $v(t)$ vor fi asimptotic compensate, atât pentru $\hat{H}_p(s)$, cât şi pentru $H_p(s)$, dacă bucla nominală este robustă din punctul de vedere al stabilităţii.

Rejecţia perturbaţiilor în regim staţionar necesită ca $P_V(s)$ să fie inclus ca parte a numitorului regulatorului. Această cerinţă este cunoscută ca *Principul Modelului Intern* (IMP).

Când se foloseşte IMP, $\hat{T}(s)$ şi $T(s)$ au valoarea 1 pentru rădăcinile lui $P_V(s)$.

Astfel, din (4.123), observăm că ieşirea $u(t)$ a regulatorului va conţine în general modurile perturbaţiei.

Pentru un model al procesului $H_p(s)=\dfrac{B_p(s)}{A_p(s)}$ şi cu un regulator cu funcţie de transfer $H_R(s)=\dfrac{Q_R(s)}{P_R(s)}$ rezultă că polinomul caracteristic al sistemului va fi:

$$\alpha(s)=A_p(s)P_V(s)\overline{P}_R(s)+Q_R(s)B_p(s), \qquad (4.125)$$

unde

$$P_R(s)=P_V(s)\overline{P}_R(s).$$

Principiul modelului intern se aplică şi în cazul urmăririi referinţei. Pentru acest caz, considerăm o structură cu două grade de libertate (fig. 4.26). Performanţele de urmărire pot fi cuantificate pe baza următoarelor ecuaţii:

$$Y(s)=H_r(s)T(s)R(s) \qquad (4.126)$$

$$\varepsilon(s)=R(s)-Y(s)=(1-H_r(s)T(s))R(s) \qquad (4.127)$$

$$U(s)=H_r(s)S_u(s)R(s) \qquad (4.128)$$

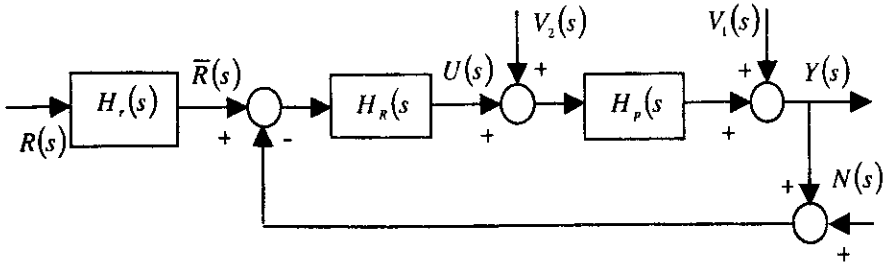


Fig. 4.26

Pentru a realiza urmărirea robustă a referinţei (eroare staţionară egală cu zero), se impune ca polinomul $P_r(s)$ să fie factor al numitorului produsului $H_R(s)H_p(s)$, adică IMP este satisfăcut şi pentru referinţă.

Dacă polinoamele $P_V(s)$ şi $P_r(s)$ au unele rădăcini comune, atunci acestea trebuie incluse în numitorul lui $H_R(s)$ o singură dată pentru a satisface simultan IMP pentru referinţă şi perturbaţie.

Prezenţa componentei integrale în structura regulatoarelor convenţionale asigură comportarea dorită în regim staţionar atât în raport cu referinţa treaptă, cât şi în raport cu perturbaţia treaptă.

4.6.2. Structura de reglare cu două grade de libertate

Utilizarea IMP, aşa cum s-a arătat mai sus, asigură rejecţia completă a perturbaţiei şi urmărirea referinţei în regim staţionar, însă performanţele regimului tranzitoriu nu sunt controlate.

Răspunsul tranzitoriu este influenţat de zerourile funcţiei de transfer între punctul de aplicare al perturbaţiei sau referinţei şi ieşire, de polii funcţiei de transfer între ieşire şi punctul de aplicare al perturbaţiei şi referinţei şi poziţia polilor în buclă închisă.

Performanţele tranzitorii pot fi influenţate în diferite moduri, însă cel mai evident este prin modificarea poziţiei polilor sistemului închis prin schimbarea regulatorului. În unele situaţii, când referinţa sau/şi perturbaţiile sunt măsurabile, se poate adopta *soluţia de reglare cu două grade de libertate* sau *soluţia de reglare combinată*.

Prin urmărirea referinţei se adoptă structura de SRA cu două grade de libertate (fig. 4.26).

Ideea urmăririi directe a referinţei (feedforward) este de a folosi prefiltrul cu funcţia de transfer $H_r(s)$ pentru a inversa $T(s)$ la anumite frecvenţe, astfel că $H_r(s)T(s)=1$ la polii modelului referinţei (adică la a_i, $i=1,\cdots,n_a$). De notat că prin utilizarea acestei strategii se poate evita folosirea unei amplificări mari în bucla de reglare pentru a aduce $T(a_i)$ la valoarea egală cu unitatea. Aceasta ar putea avea efecte benefice asupra stabilităţii robuste. Pe de altă parte, dacă $H_r(s)$ este folosit pentru a realiza $H_r(a_i)T(a_i)=1$, atunci performanţele pentru procesul real vor fi sensibile la erorile de modelare.

Exemplul 4.2:

Se consideră un proces caracterizat prin:

$$H_p(s)=\frac{5}{(8s+1)(2s+1)(0.1s+1)}.$$

Se cere a alege un regulator astfel încât să fie satisfăcute următoarele cerinţe de performanţă: $\sigma \le 5\%$, $t_t \le 1s$ *şi* $\varepsilon_{st}=0$.

Conform variantei Kessler [39], se recomandă un regulator a cărui funcţie de transfer este:

$$H_R(s)=\frac{(8s+1)(2s+1)}{s}$$

$\theta_1=8s$, $\theta_2=2s$, $\theta=2K_pT_\Sigma=2\cdot 5\cdot 0.1=1$.

În acest caz:

$$\omega_n=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{T_\Sigma}=7.1s^{-1},\ \zeta=0.707.$$

Cu aceste valori ale parametrilor se obţin performanţele:

$\sigma=4.3\%$, $t_t=8T_\Sigma=0.8s$ *şi* $\varepsilon_{st}=0$.

Pentru intrare rampă:

$$\varepsilon_v=\frac{1}{K_v}=2T_\Sigma=0.2.$$

Pentru urmărirea fără eroare în regim permanent a referinţei rampă, conform criteriului simetriei [34, 39] se recomandă algoritmi de reglare de forma:

$$H_R(s)=\frac{(\theta_c s+1)^n}{\theta s} \tag{4.85}$$

unde n poate lua valoarea 1 sau 2 pentru algoritmi PID, $\theta_c=4nT_\Sigma$, iar $\theta=2K_pT_\Sigma\cdot\frac{\theta_c^n}{\prod_1^n T_k}$, unde T_k reprezintă constantele dominante ale procesului.

Folosind asemenea algoritmi de reglare pentru procese caracterizate prin modele aproximative de forma:

$$H_p(s)=\frac{K_p}{(T_\Sigma s+1)\prod_1^n (T_k s)} \tag{4.86}$$

se obţine funcţia de transfer a căii directe a SRA:

$$H_d(s)=\frac{4T_\Sigma s+1}{8T_\Sigma^2 s^2(T_\Sigma s+1)} \tag{4.87}$$

şi

$$H_0(s)=\frac{4T_\Sigma s+1}{8T_\Sigma^3 s^3+8T_\Sigma^2 s^2+4T_\Sigma s+1} \tag{4.88}$$

Din (4.87) rezultă că eroarea în regim permanent la referinţă rampă este egală cu zero, iar din (4.88) rezultă că performanţele tranzitorii sunt influenţate numai de T_Σ.

Funcţia de transfer $H_0(s)$ conţine trei poli şi un zero, putând fi pusă sub forma:

$$H_0(s)=\frac{\frac{\omega_n p}{z}(s+z)}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)(s+p)} \tag{4.89}$$

unde $z=-\frac{1}{4T_\Sigma}$, $\zeta=0.5$, $\omega_n=\frac{1}{2T_\Sigma}$ şi $p=-\frac{1}{2T_\Sigma}$.

O asemenea distribuţie a celor trei poli şi a zeroului evidenţiază o comportare nesatisfăcătoare a SRA în raport cu referinţa treaptă, însă asigură o bună comportare în raport cu referinţa rampă.

Exemplul 4.3

Considerând procesul caracterizat prin:

$$H_p(s)=\frac{1}{4s(0.1s+1)}$$

se cere alegerea unui regulator astfel încât eroarea în raport cu referinţa de tip rampă să fie egală cu zero.

Conform criteriului simetriei, pentru acest proces se recomandă un regulator PI:

$$H_R(s)=\frac{\theta_c s+1}{\theta s}=\frac{1+4T_\Sigma s}{2K_pT_\Sigma s\cdot\frac{4T_\Sigma}{T_p}}=\frac{1+4T_\Sigma s}{0.02s}.$$

De remarcat faptul că, în ambele cazuri, performanţele sistemului sunt determinate numai în funcţie de constanta de timp parazită, putând fi aplicate numai proceselor rapide.

4.4.2. Alegerea şi acordarea regulatoarelor pentru procese lente

Procesele lente sunt caracterizate prin modele aproximative, având constante de timp mai mari de 10 secunde şi, cel mai adesea, conţin şi timp mort. Pentru alegerea tipului de regulator, proiectantul de SRA are în

general la bază o serie de criterii verificate în practică, ţinând seama de caracteristicile procesului şi de performanţele impuse. Prezenţa timpului mort în funcţionarea unui proces tehnologic impune o serie de precauţii în alegerea tipului de regulator, putându-se recomanda atât regulatoare liniare PI şi PID, cât şi regulatoare neliniare de tip bipoziţional sau tripoziţional.

Componenta derivativă se include într-un algoritm de reglare pentru proces cu timp mort numai în măsura în care se obţine o îmbunătăţire a performanţelor. Pentru valori ale raportului $\tau/T_p < 0.2$ se pot recomanda algoritmi neliniari, în măsura în care cerinţele de performanţă nu sunt foarte înalte.

Amplitudinea şi frecvenţa perturbaţiilor trebuie luate în consideraţie la alegerea tipului de regulator. Astfel, pentru procese cu constantă de timp medie şi un timp mort redus, la o amplitudine medie a perturbaţiilor şi o frecvenţă redusă a acestora, se recomandă un regulator bipoziţional sau un regulator P. Pentru o frecvenţă mai mare a perturbaţiilor, având diverse amplitudini, se recomandă un algoritm PI, iar pentru un proces cu mai multe constante de timp şi timp mort redus, la o amplitudine mare a perturbaţiilor şi o frecvenţă mare a acestora, se recomandă un algoritm PID.

De asemenea, pentru procese cu două sau mai multe constante de timp dominante, nu se recomandă un regulator P, ci un regulator PI sau PID, care anulează eroarea staţionară şi asigură o viteză de răspuns mai ridicată. În funcţie de tipul mărimii reglate, de perturbaţiile procesului fizic, sunt recomandate diverse tipuri de regulatoare, având în vedere dinamica procesului (τ, T_p) şi caracterul perturbaţiilor.

Astfel, pentru reglări de nivel pot fi utilizate, atât regulatoare P, cât şi regulatoare PI, aceasta în funcţie de precizia urmărită şi de tipul perturbaţiilor. Dacă perturbaţiile în cazul reglării de nivel sunt determinate, atât de variaţia debitului de intrare, cât şi de variaţia debitului de ieşire, iar abaterea staţionară se cere a fi zero, se recomandă un regulator PI, ai cărui parametri de acord sunt diferiţi pentru gaze şi lichide, având în vedere că pentru lichide constanta de timp este mai redusă decât pentru gaze.

În cazul unor reglări de debite şi amestecuri de fluid, dat fiind că asemenea procese sunt caracterizate printr-o constantă de timp mică şi o amplificare mare, sunt recomandate regulatoarele PI. Prezenţa zgomotelor determinate de variaţiile debitului face inoportună utilizarea componentei derivative la reglarea debitelor. La reglări de temperatură, unde raportul τ/T_p este mare, sunt recomandate regulatoarele PI sau PID.

În tabelul 4.1 se prezintă sintetic recomandări pentru alegerea tipului de regulator pentru diverse funcţii de transfer ale procesului şi cu evidenţierea unor restricţii asupra performanţelor ce pot fi atinse în anumite condiţii impuse.

Tabelul 4.1

Tipul procesului / Legea de reglare	P	PI	PD	PID
$\frac{K_p}{T_p s+1}$	DA	DA dacă se impun cerinţe asupra erorii staţionare	DA dacă T_p este precis determinat	NU
$\frac{K_p}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$	DA cu performanţe reduse	DA cu restricţii asupra amplificării	Se utilizează rar	DA cu restricţii asupra amplificării
$\frac{K_p}{\prod_1^n (T_k s+1)}$	Rar utilizat, performanţe scăzute	DA	Se utilizează rar	DA
$\frac{K_p e^{-\tau s}}{T_p s+1}$	DA, când $\tau/T_p < 0.1$ iar ε_{st} este în limitele admisibile	DA	NU	DA
$K_p e^{-\tau s}$	DA	NU	NU	NU
$\frac{K_p e^{-\tau s}}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$	NU	DA	NU	Rar, în funcţie de tipul timpului mort şi de efectul componentei D

În tabelul 4.2 se prezintă unele recomandări privind algoritmul de reglare pentru diverşi parametrii tehnologici, cu evidenţierea unor particularităţi ale modelului procesului.

Tabelul 4.2

Parametrul reglat \ Tipul regulatorului	P	PI	PID	Bipoziţional
Temperatură	DA, dacă $\frac{\tau}{T_p} < 0.1$	DA	DA	DA, în funcţie de raportul τ / T_p
Presiune	DA dacă nu există timpi morţi prea mari	DA	În cazuri speciale	-
Debit	NU	DA	NU	-
Nivel	DA dacă nu exista timpi morţi prea mari	DA	-	DA

Odată stabilită legea de reglare pentru un proces dat, se impune luarea în consideraţie a tipului de regulator din punct de vedere al agentului purtător de semnal. Din punctul de vedere al legilor de reglare P, I sau D, sistemele pneumatice şi electronice sunt echivalente. Alegerea unui regulator pneumatic sau electronic este determinată de tipul procesului, de tipul parametrilor reglaţi, de tipul elementelor de execuţie şi de tipul traductoarelor.

Siguranţa în medii cu pericol de explozie şi incendii poate constitui un argument în favoarea regulatoarelor pneumatice, însă regulatoarele electronice prevăzute cu siguranţă intrinsecă pot fi utilizate în asemenea medii.

Pentru procesele la care sunt utilizate traductoare pneumatice şi elemente de execuţie pneumatice, se recomandă un regulator pneumatic, având în vedere că în acest caz se foloseşte un singur agent purtător de informaţie.

Considerentele economice constituie, de asemenea, un element important în adoptarea soluţiei pneumatice sau electronice. În cazul în care se cere automatizarea complexă a unui proces tehnologic cu ajutorul unui calculator de proces, reglarea convenţională cu regulatoare electronice prezintă avantaje în comparaţie cu reglarea pneumatică, dată fiind complexitatea instalaţiilor de cuplare a aparaturii pneumatice la calculatoare.

Pentru acordarea regulatoarelor destinate proceselor lente, pot fi utilizate mai multe criterii. *Criteriul modulului* poate fi extins la acordarea regulatoarelor pentru procese lente, permiţând delimitarea domeniilor de variaţie a parametrilor care asigură satisfacerea cerinţelor de performanţă în raport cu variaţia referinţei, precum şi selectarea valorilor care asigură comportarea optimă în raport cu acţiunea perturbaţiei aditive care acţionează asupra procesului.

Alegerea şi acordarea regulatoarelor pentru procese cu timp mort reprezintă una dintre problemele cele mai dificile în practica reglării automate, aceasta datorită, atât dificultăţilor de determinare cu precizie a timpului mort ce caracterizează procesul, cât şi influenţei nefavorabile a timpului mort asupra comportării tranzitorii a unui sistem de reglare automată.

Pentru acordarea regulatoarelor pentru procese cu timp mort pot fi utilizate criterii bazate pe metoda limitei de stabilitate, criterii bazate pe rezultate ale identificării experimentale sau criterii experimentale având procesul în funcţiune.

Criterii experimentale de acordare a regulatoarelor

Dificultăţile legate de identificarea cu precizie a proceselor lente, comportarea neliniară a unor asemenea procese, precum şi caracterul aleatoriu al anumitor perturbaţii ce intervin în funcţionarea proceselor fac ca metodele analitice de acordare a regulatoarelor să aibă un caracter limitat. De cele mai multe ori, după o acordare pe baza unui criteriu dat, se impune verificarea performanţelor şi reajustarea parametrilor de acord. De asemenea, în funcţie de frecvenţa şi amplitudinea perturbaţiilor se impune corectarea parametrilor de acord.

Metodele practice de acordare au la bază experienţa acumulată în alegerea şi acordarea regulatoarelor. Astfel, pentru un sistem dat, în funcţiune, cu mărimea de referinţă şi cu mărimile perturbatoare menţinute constante, prin modificarea parametrilor de acord până se ajunge la limita de stabilitate, se determină amplitudinea şi frecvenţa oscilaţiilor întreţinute. Folosind aceste mărimi caracteristice ce caracterizează limita de stabilitate a sistemului, se determină valorile parametrilor de acord ai regulatorului.

Metoda Ziegler-Nichols se aplică la acordarea regulatorului pentru procese lente la care perturbaţiile sunt determinate de sarcină şi au o durată mare.

Pentru un regulator PID, se fixează acordul pentru T_i la valoarea maximă ($T_i \to \infty$) şi pentru T_d la valoarea minimă ($T_d = 0$) şi se modifică K_R până ce mărimea de ieşire a sistemului y intră într-un regim de oscilaţii

neamortizate, deci sistemul ajunge la limita de stabilitate. Valoarea K_{R0} şi perioada oscilaţiilor neamortizate T_0 sunt utilizate pentru determinarea parametrilor de acordare optimă. Pentru a obţine un raport $1/4$ între amplitudinea celei de-a doua oscilaţii pozitive şi amplitudinea primei oscilaţii pozitive („amortizarea în sfert de amplitudine"), criteriul Ziegler-Nichols recomandă următoarele valori de acordare optimă, în funcţie de K_{R0} şi T_0:

Pentru regulatoare P:

$$K_{Ropt} = 0.5K_{R0} \tag{4.90}$$

Pentru regulatoare PI:

$$K_{Ropt} = 0.45K_{R0} \qquad T_{iopt} = 0.8T_0 \tag{4.91}$$

Se remarcă o reducere a factorului de amplificare (4.91) faţă de regulatorul P, justificată ca urmare a necesităţii compensării efectelor nefavorabile ale componentei I asupra procesului tranzitoriu.

Pentru regulatoare PID parametrii optimi se calculează cu relaţiile:

$$K_{Ropt} = 0.75K_{R0} \qquad T_{iopt} = 0.6T_0 \qquad T_{dopt} = 0.1T_0 \tag{4.92}$$

Se remarcă o creştere a lui K_R şi o reducere a lui T_i, care determină creşterea factorului total de amplificare, datorată îmbunătăţirii performanţelor tranzitorii ca urmare a prezenţei componentei D.

Pentru cazul în care există interinfluenţă între parametri (adică modificarea unui parametru influenţează valorile celorlalţi parametrii de acord) [37], relaţiile de calcul sunt:

$$K_{Ropt} = 0.6K_{R0} \qquad T_{iopt} = 0.5T_0 \qquad T_{dopt} = 0.12T_0 \tag{4.93}$$

În acest caz, factorul total de amplificare K_{Ropt}/T_{iopt} se reduce foarte puţin faţă de cazul anterior.

Metoda Offereins permite determinarea parametrilor optimi de acord pornind de la K_{R0} şi T_0 determinate ca în cazul precedent.

În cazul utilizării unui regulator PI, pentru a obţine un răspuns optim la aplicarea unei perturbări se recomandă:

$$K_{Ropt} = 0.5K_{R0} \qquad T_{iopt} = 3T_{i0} \tag{4.94}$$

unde T_{i0} reprezintă valoarea limitată a lui T_i pentru care se depăşeşte limita de stabilitate menţinând K_{Ropt}. Astfel se măreşte factorul K_{Ropt}/T_i până la depăşirea limitei de stabilitate şi se reţine valoarea lui T_{i0}.

În ceea ce priveşte componenta D, metoda prevede verificarea prealabilă a eficienţei acestei componente asupra performanţelor sistemului.

Această verificare se face punând acordul pentru T_i la valoarea maximă şi pentru T_d la valoarea minimă, iar valoarea K_R se modifică până aproape de K_{R0}. Dacă mărirea lui T_d are ca efect o creştere a gradului de stabilitate, îmbunătăţind performanţele tranzitorii şi depărtând sistemul de limita de stabilitate, atunci influenţa componentei D este pozitivă. Pentru determinarea valorii optime a constantei T_d, se menţine K_R în jurul valorii K_{R0} şi se măreşte T_d până când calitatea regimului tranzitoriu şi deci gradul de stabilitate nu se mai îmbunătăţesc. Valoarea lui T_d de la care se atinge acest efect este adoptată ca valoare optimă.

Exemplul 4.4

Se consideră procesul al cărui model este dat prin [46]:

$$H_p(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

iar algoritmul de reglare este de tip PID în cadrul unei structuri de SRA cu un grad de libertate (fig. 4.9).

Se cere:

a) parametrii de acord ai regulatorului PID, apelând la metoda limitei de stabilitate Ziegler-Nichols;

b) răspunsul indicial pentru referinţă şi perturbaţie.

Soluţie:

Determinăm mai întâi K_{R0} şi ω_c

$$K_{R0}H_p(j\omega) = -1 \Leftrightarrow K_{R0} = -(j\omega_c + 1)^3$$

care conduce la

$$K_{R0} = 8 \text{ şi } \omega_c = \sqrt{3}.$$

Prin urmare, perioada critică este:

$$T_0 \cong 3.63.$$

Cu aceste valori, obţinem parametrii de acord conform relaţiilor Ziegler-Nichols:

$$K_{Ropt} = 0.6K_{R0} = 4.8$$

$$T_{iopt} = 0.5T_0 = 1.81 \quad .$$

$$T_{dopt} = 0.125T_0 \cong 0.45$$

Dacă alegem un regulator cu componenta derivativă filtrată cu o constantă de timp $T_f = \alpha T_d \cong 0.1 T_d = 0.045$, se obține funcția de transfer a căii directe sub forma:

$$H_d(s) = H_R(s) H_p(s) = K_R \frac{(T_d + \alpha T_d)s^2 + \left(1 + \frac{\alpha T_d}{T_i}\right)s + \frac{1}{T_i}}{s(\alpha T_d s + 1)(s+1)^3}$$

sau

$$H_d(s) = \frac{52.8s^2 + 109.32s + 58.93}{s(s+22.2)(s+1)^3}.$$

Pentru a determina răspunsul indicial, folosim pentru simulare mediul SIMULINK, aplicând treaptă unitară la momentul $t = 0$ și o perturbație treaptă la $t = 20$. În figura 4.19 se prezintă răspunsul indicial al SRA.

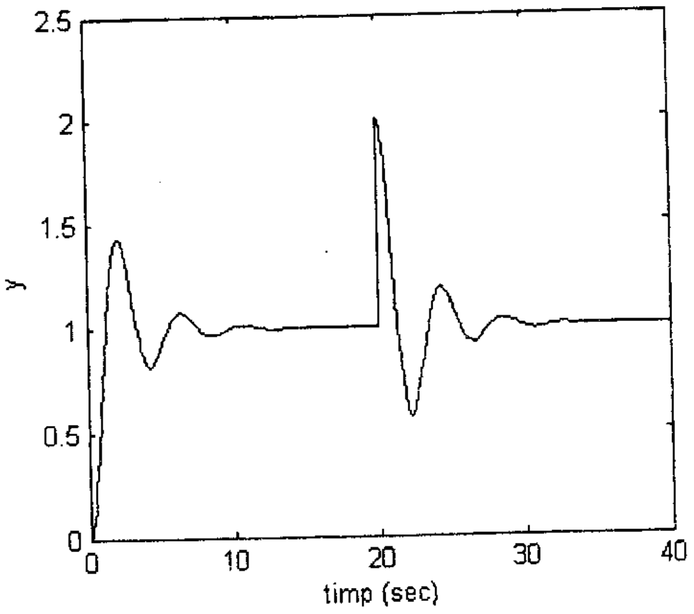


Fig. 4.19

Se poate observa că, prin aplicarea acestei proceduri de acordare, suprareglajul este foarte mare.

Aplicarea acestei metode de acordare necesită precauție, având în vedere că procesul este forțat să oscileze cu o anumită amplitudine a oscilațiilor, care poate deveni periculoasă în anumite condiții de funcționare.

De menționat că atingerea limitei de stabilitate pentru SRA se poate atinge și prin introducerea în bucla de reglare a unui releu ideal [3].

Criterii de acordare bazate pe rezultatele identificării

Alte metode practice de determinare a parametrilor optimi de acord au la bază raportul $\frac{\tau}{T_p}$ caracteristic pentru un proces cu timpul mort τ și o constantă de timp T_p:

$$H_p(s) = \frac{K_p e^{-\tau s}}{T_p s + 1}.$$

Pentru a determina parametrii ce caracterizează comportarea procesului la un semnal de comandă de tip treaptă se parcurg următoarele etape:

- se aplică la intrarea procesului care se află în regim staționar caracterizat prin u_0 și y_0, în buclă deschisă, la un moment de timp t_0, o treaptă de la u_0 la u_{st}, care poate fi cuprinsă între $(10 \div 20\%)$ din întreaga scală;
- se calculează noua valoare de regim staționar a ieșirii y_{st} și se înregistrează răspunsul procesului la o intrare $\Delta u = u_{st} - u_0$;
- se calculează parametrii modelului matematic cu relațiile:

$$K_P = \frac{y_{st} - y_0}{u_{st} - u_0}, \ \tau = t_1 - t_0 \text{ și } T_P = t_2 - t_1 \text{ (v. fig. 4.20).}$$

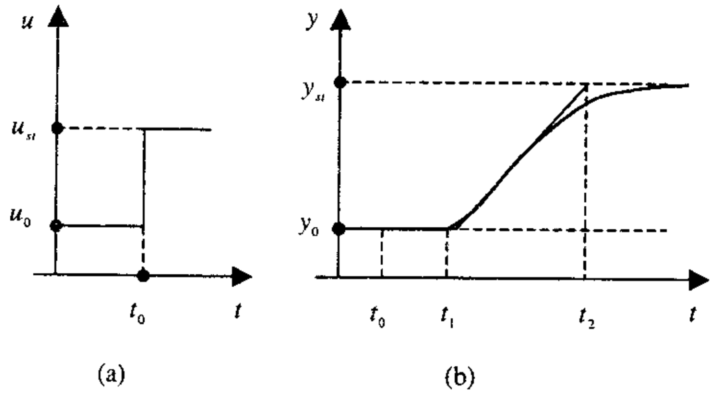


Fig. 4.20

Cu valorile parametrilor K_P, T_P și τ obținute pe cale experimentală se calculează parametrii de acord ai regulatoarelor PID folosind diferite relații.

Relațiile Ziegler-Nichols:

– pentru regulator P:

$$K_{Ropt} = \frac{1}{K_p}\frac{T_p}{\tau} \quad (4.95)$$

– pentru regulator PI:

$$K_{Ropt} = \frac{0.9}{K_p}\frac{T_p}{\tau} \quad (4.96)$$

$$T_{iopt} = 3.3\tau$$

– pentru regulator PID, cu $q = 0$:

$$K_{Ropt} = \frac{1.5}{K_p}\frac{T_p}{\tau}$$

$$T_{iopt} = 2.5\tau \quad (4.97)$$

$$T_{dopt} = 0.5\tau$$

– pentru regulator PID cu $q = 1$:

$$K_{Ropt} = \frac{1.2}{K_p}\frac{T_p}{\tau}$$

$$T_{iopt} = 2\tau \quad (4.98)$$

$$T_{dopt} = 0.5\tau$$

Relațiile W.Oppelt:

– pentru regulator P:

$$K_{Ropt} = \frac{1}{K_p}\frac{T_p}{\tau} \quad (4.99)$$

– pentru regulator PI:

$$K_{Ropt} = \frac{0.8}{K_p}\frac{T_p}{\tau} \quad (4.100)$$

$$T_{iopt} = 3\tau$$

– pentru regulator PID:

$$K_{Ropt} = \frac{1.2}{K_p}\frac{T_p}{\tau}$$

$$T_{iopt} = 2\tau$$

$$T_{dopt} = 0.42\tau \quad (4.101)$$

Relațiile (4.101) sunt apropiate de relațiile (4.97).

Relațiile Kapelovici [37]:

Pe baza unor cercetări experimentale, au fost stabilite relații pentru calculul parametrilor optimi de acord, asigurând un răspuns tranzitoriu aperiodic cu durată minimă și un răspuns cu suprareglaj maxim $\sigma = 20\%$. În tabelul 4.3 sunt prezentate aceste relații de calcul.

Tabelul 4.3

Tipul regulatorului	**Răspuns aperiodic și durată minimă a răspunsului**	**Răspuns oscilant cu $\sigma = 20\%$ și durată minimă a răspunsului**
I	$T_{iopt} = 4.5K_pT_p$	$T_{iopt} = 1.7K_pT_p$
P	$K_{Ropt} = \frac{0.3}{K_p}\cdot\frac{T_p}{\tau}$	$K_{Ropt} = \frac{0.7}{K_p}\cdot\frac{T_p}{\tau}$
PI	$K_{Ropt} = \frac{0.6}{K_p}\cdot\frac{T_p}{\tau}$ $T_{iopt} = 0.8 + 0.5K_p$	$K_{Ropt} = \frac{0.7}{K_p}\cdot\frac{T_p}{\tau}$ $T_{iopt} = \tau + 0.3T_p$
PID	$K_{Ropt} = \frac{0.95}{K_p}\cdot\frac{T_p}{\tau}$ $T_{iopt} = 2.4\tau$ $T_{dopt} = 0.4\tau$	$K_{Ropt} = \frac{1.2}{K_p}\cdot\frac{T_p}{\tau}$ $T_{iopt} = 2\tau$ $T_{dopt} = 0.4\tau$

Relațiile Chien, Hrones, Reswich

Pe baza unor încercări pe modele, sunt prezentate în tabelele 4.4 și 4.5 relațiile de calcul ale parametrilor optimi de acord pentru o comportare optimă la variații treaptă ale intrării și la variația perturbației. S-au luat în discuție răspunsuri tranzitorii aperiodice cu durată minimă și răspuns cu $\sigma = 20\%$ și durată minimă, atât la variații ale mărimii de intrare (tab. 4.4), cât și pentru comportarea optimă la perturbații (tab. 4.5). Reprezentarea grafică în scară logaritmică a relațiilor ce permit determinarea parametrilor de acord ai unui regulator PID, pentru un proces ce conține timp mort și o constantă de timp, ilustrează dependența parametrilor de acord de acest raport τ/T_p.

De remarcat importanța deosebită a acestui raport asupra performanțelor sistemului cu timp mort.

Tabelul 4.4

Tipul regulatorului	Răspuns aperiodic și durată minimă a răspunsului	Răspuns oscilant cu $\sigma = 20\%$ și durată minimă
P	$K_{Ropt} = \frac{0.3}{K_p} \cdot \frac{T_p}{\tau}$	$K_{Ropt} = \frac{0.7}{K_p} \cdot \frac{T_p}{\tau}$
PI	$K_{Ropt} = \frac{0.35}{K_p} \cdot \frac{T_p}{\tau}$ $T_{iopt} = 1.2\tau$	$K_{Ropt} = \frac{0.6}{K_p} \cdot \frac{T_p}{\tau}$ $T_{iopt} = \tau$
PID	$K_{Ropt} = \frac{0.95}{K_p} \cdot \frac{T_p}{\tau}$ $T_{iopt} = \tau$ $T_{dopt} = 0.5\tau$	$K_{Ropt} = \frac{1.2}{K_p} \cdot \frac{T_p}{\tau}$ $T_{iopt} = 1.35\tau$ $T_{dopt} = 0.47\tau$

Tabelul 4.5

Tipul regulatorului	Răspuns aperiodic și durată minimă a răspunsului	Răspuns oscilant amortizat cu $\sigma = 20\%$
P	$K_{Ropt} = \frac{0.3}{K_p} \cdot \frac{T_p}{\tau}$	$K_{Ropt} = \frac{0.7}{K_p} \cdot \frac{T_p}{\tau}$
PI	$K_{Ropt} = \frac{0.6}{K_p} \cdot \frac{T_p}{\tau}$ $T_{iopt} = 4$	$K_{Ropt} = \frac{0.7}{K_p} \cdot \frac{T_p}{\tau}$ $T_{iopt} = \tau$
PID	$K_{Ropt} = \frac{0.95}{K_p} \cdot \frac{T_p}{\tau}$ $T_{iopt} = 2.4\tau$ $T_{dopt} = 0.42\tau$	$K_{Ropt} = \frac{1.2}{K_p} \cdot \frac{T_p}{\tau}$ $T_{iopt} = 2.4\tau$ $T_{dopt} = 0.42\tau$

În figura 4.21*a* se evidențiază, în reprezentare logaritmică, dependența factorului total de amplificare a căii directe a sistemului $K_d = K_p K_R$ funcție de raportul $a = \tau / T_p$, după diverși autori [6, 34].

Dependența timpului de integrare și de derivare de raportul a este reprezentată în figura 4.21*b* și 4.21*c*. Se remarcă o bună concordanță între diversele criterii de acordare a regulatoarelor.

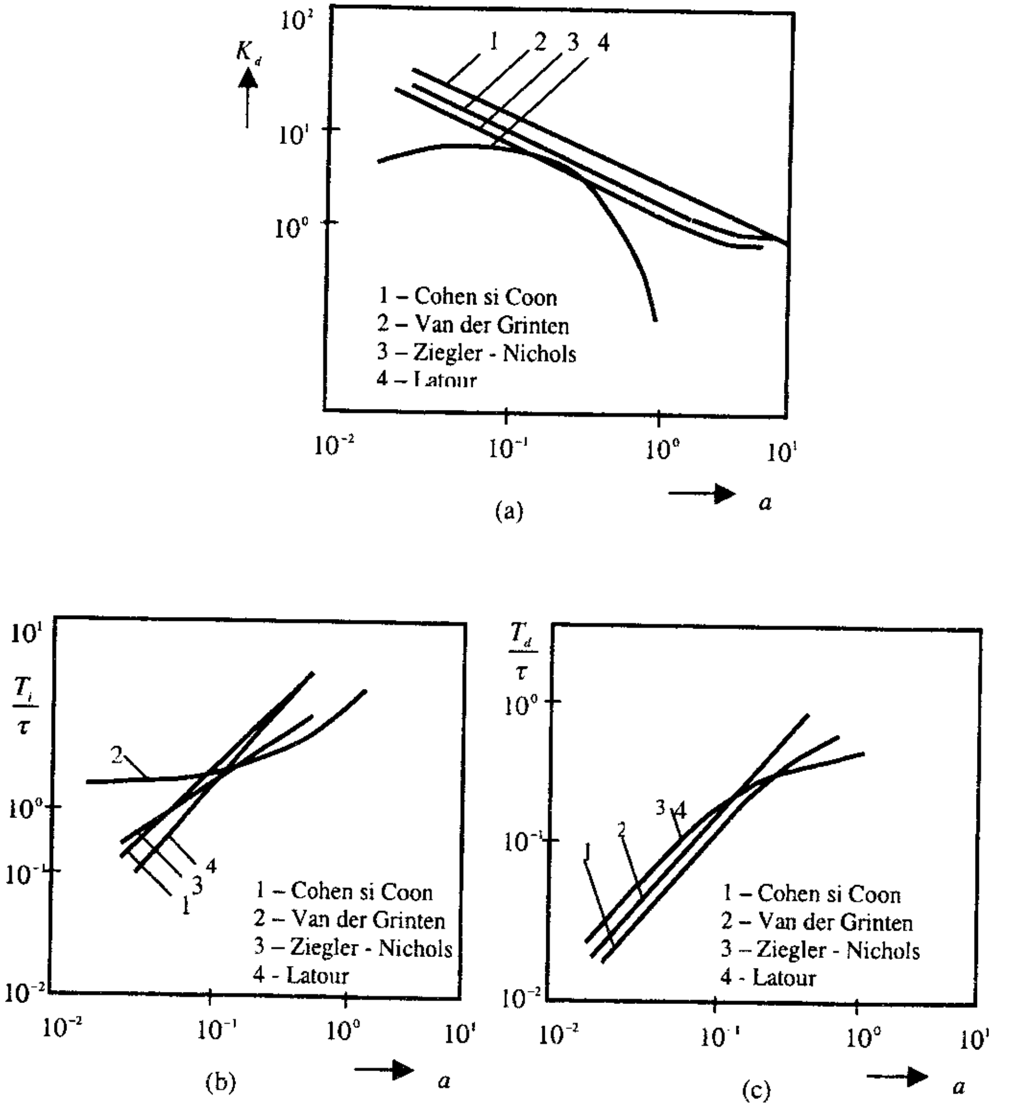


Fig. 4.21

Adoptarea unor relaţii de acordare depinde de condiţiile concrete în care funcţionează sistemul de reglare automată. Astfel, pentru un sistem la care mărimea de intrare suferă variaţii relativ frecvente (procese cu desfăşurare discontinuă, prezenţa unui calculator la nivelul ierarhic superior, încadrarea regulatorului într-o buclă interioară la reglarea în cascadă sau într-o schemă de reglare de raport) se adoptă relaţiile din tabelul 4.3.

Diversitatea criteriilor practice de acordare a regulatoarelor evidenţiază faptul că problema acordării regulatoarelor pentru procese lente este o problemă spinoasă, care depinde de gradul de cunoaştere a procesului şi experienţa acumulată în alegerea şi acordarea regulatoarelor.

Caracterul neliniar al proceselor, identificarea imprecisă a proceselor lente nu permit stabilirea unor relaţii generale pentru calculul parametrilor de acord.

Metodele practice de acordare prin încercări pot fi utilizate cu bune rezultate în alegerea şi acordarea regulatoarelor pentru procese lente

Ţinând seama de analiza făcută în § 4.3, pot fi utilizaţi pentru alegerea algoritmului şi/sau a structurii de reglare a proceselor cu timp mort parametrii sintetici (K_1, θ_1), respectiv (K_2, θ_2). Conform rezultatelor prezentate în [4], pot fi întâlnite următoarele situaţii:

- $\theta_1 > 1$, $K_1 > 1.5$

În acest caz nu se recomandă regulator PID acordat prin metode Ziegler-Nichols. Sunt recomandate regulile propuse de Cohen şi Coon, Heng şi Hegglund [4]. Se recomandă reglarea feedforward pentru procese cu valori mari ale timpului mort.

- $0.6 < \theta_1 < 1$, $1.5 < K_1 < 2.25$

Deşi $\theta_1 < 1$, procedura Ziegler-Nichols de acordare dă rezultate slabe. Se recomandă utilizarea altor metode de acordare şi structuri de reglare directă (feedforward) şi cu predictor Smith.

- $0.15 < \theta_1 < 0.6$, $2.25 < K_1 < 15$

Se obţin rezultate bune apelând la procedura Ziegler-Nichols de acordare a regulatoarelor PID. În acest caz, acţiunea derivativă cel mai adesea contribuie la îmbunătăţirea performanţelor.

- $\theta_1 < 0.15$, $K_1 > 15$ şi $\theta_2 < 0.3$, $K_2 > 2$

Procesele cu integrator pot fi considerate ca procese stabile cu θ_1 tinzând către zero. În cazul în care cerinţele de performanţă nu sunt foarte ridicate, pot fi utilizate legile de reglare P sau PI. În unele cazuri, performanţele pot fi îmbunătăţite semnificativ prin adăugarea componentei derivative.

- $\theta_2 < 0.3$, $K_2 < 2$

În aceste situaţii, se recomandă regulatoare PD. Utilizarea unui regulator PID acordat prin metoda Ziegler-Nichols nu asigură performanţe bune. De remarcat faptul că acţiunea derivativă contribuie esenţial la obţinerea unor performanţe bune.

În condiţiile unor incertitudini importante, ţinând seama de cunoştinţele acumulate în activitatea de conducere a proceselor lente şi foarte lente, se poate cu uşurinţă trece la structuri de conducere ierarhizate. Regulatoarele bazate pe cunoştinţe pot fi utilizate la nivelul ierarhic superior pentru selecţia structurii de reglare (cu un grad de libertate, cu două grade de libertate, reglare în cascadă, reglare combinată sau reglare cu predictor Smith) şi pentru alegerea şi acordarea legii de reglare. Astfel, ţinând seama de particularităţile procesului, de natura perturbaţiilor şi de cerinţele de performanţă impuse, se poate adopta soluţia de reglare cea mai potrivită apelând la tehnici inteligente de conducere [2, 5].

4.5. Robusteţea SRA cu regulatoare PID

În acest subcapitol sunt introduse elementele specifice reglării proceselor apelând la algoritmi de reglare standard, luând în consideraţie modele matematice simplificate. În aceste condiţii, acordarea regulatoarelor convenţionale se face pe proces pornind de la analizele simplificate pe baza unor modele ce conţin incertitudini structurate şi nestructurate. Diferitele variante de legi de reglare PID şi proceduri de acordare ale acestora acoperă clase largi de procese industriale, obţinându-se performanţe satisfăcătoare.

În prezenţa perturbaţiilor şi a zgomotelor de măsură, proiectarea SRA cu ridicate performanţe presupune luarea în consideraţie a următoarelor aspecte:

- performanţele de urmărire (nivel cât mai redus al erorii de urmărire);
- rejecţia perturbaţiilor (amplitudinea ieşirii cât mai redusă în prezenţa perturbaţiilor);
- sensibilitatea la erorile de modelare (efecte cât mai reduse asupra performanţelor);
- marginea de stabilitate (stabilitate robustă);

– sensibilitatea la zgomote de măsură (efect cât mai redus al zgomotului de măsură).

În cele ce urmează vom analiza aceste aspecte în detaliu. Pentru aceasta considerăm sistemul reprezentat în figura 4.22.

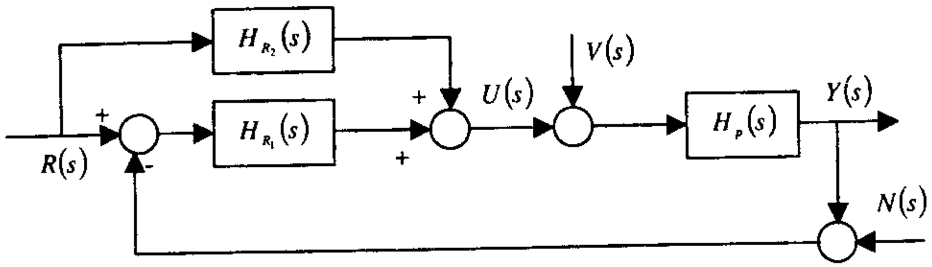


Fig. 4.22

Urmărirea referinței:

Având în vedere reacția unitară, pentru acest SRA cu două grade de libertate, funcția de transfer $H_0(s)$ este:

$$H_0(s) \equiv H_{yr}(s) = \frac{H_p(s)}{1 + H_{R1}(s)H_p(s)}\left(H_{R1}(s) + H_{R2}(s)\right) \tag{4.102}$$

Pentru a obține bune performanțe la urmărirea referinței, funcția de transfer $H_0(s)$ trebuie să se mențină aproape de unitate pentru un domeniu cât mai larg de frecvențe. Astfel, prin ajustarea regulatoarelor $H_{R1}(s)$ și $H_{R2}(s)$ se urmărește atingerea acestui deziderat.

Rejecția perturbației

În cele ce urmează vom considera modul de reducere a efectului perturbațiilor, până la anularea acestora asupra ieșirii din proces.

Gradul de rejecție al perturbației poate fi exprimat prin raportul între $H_{0v}(s)$ și $H_p(s)$:

$$S_v = \frac{H_{ov}(s)}{H_p(s)} = \frac{1}{1 + H_{R1}(s)H_p(s)} \tag{4.103}$$

Pentru îmbunătățirea rejecției perturbației se cere ca S_v să fie cât mai mic pentru un domeniu cât mai mare de frecvențe.

Sensibilitatea la erorile de modelare

Pentru proiectarea unui SRA se apelează la un model al procesului care în general reprezintă o aproximare a comportării reale a procesului. Astfel, modelele matematice cu care operăm conțin incertitudini sau erori de

modelare datorate următorilor factori: neglijarea caracteristicilor neliniare, neglijarea caracteristicilor de înaltă frecvență, precizia redusă în evaluarea parametrilor modelului, varianța în timp a caracteristicilor procesului.

Acești factori determină în esență incertitudinile structurale și parametrice ale modelelor matematice atașate obiectelor conduse.

Dacă vom nota prin $\hat{H}_p(s)$ un model nominal și prin $H_p(s)$ modelul real (v. § 2.9), atunci putem defini incertitudinile aditive și multiplicative sub forma:

$$L_A(s) = H_p(s) - \hat{H}_p(s) = \Delta H_p(s) \tag{4.104}$$

respectiv

$$L_M(s) = \frac{H_p(s)}{\hat{H}_p(s)} - 1 \tag{4.105}$$

În cazul incertitudinilor multiplicative vom considera:

$$L_M(s) = W_2(s)\Delta(s) \tag{4.106}$$

unde $W_2(s)$ este o funcție de transfer de ponderare, fixată și $\Delta(s)$ este o funcție de transfer stabilă variabilă, care satisface condiția $\|\Delta\|_\infty \le 1$ (amplitudinea $|\Delta(\omega)|$ nu depășește unitatea pentru întreg spectrul de frecvențe pentru care se definește). Se consideră că și $H_p(s)$ și $\hat{H}_p(s)$ au aceeași poli instabili. În acest caz, perturbația $\Delta(s)$ este permisibilă.

Ținând seama că $\|\Delta\|_\infty \le 1$, atunci:

$$\left|\frac{H_p(j\omega)}{\hat{H}_p(j\omega)} - 1\right| \le \left|W_2(j\omega)\right|,\ \forall\omega \tag{4.107}$$

ceea ce evidențiază că $|W_2(j\omega)|$ definește profilul incertitudinii. Inegalitatea (4.107) descrie un cerc în planul complex cu centrul în 1 și raza $|W_2|$. Funcția $|W_2(j\omega)|$ este crescătoare cu frecvența ω, incertitudinea crește cu creșterea frecvenței. Scopul principal al introducerii funcției de transfer $\Delta(s)$ este de a lua în considerație incertitudinea de fază și de a acționa ca un factor de scală asupra amplitudinii perturbației ($|\Delta|$ variază între 0 și 1).

Sensibilitatea la erorile de modelare se referă în acest caz la diferența între răspunsul sistemului în prezența incertitudinilor și în lipsa acestora. Luând în considerație incertitudinile aditive, putem scrie:

$$\Delta H_0(s) = H_0(s) - \hat{H}_0(s) =$$

$$= \frac{\left(H_{R1}(s) + H_{R2}(s)\right)\left(\hat{H}_p(s) + L_A(s)\right)}{1 + H_{R1}(s)\left(\hat{H}_p(s) + L_A(s)\right)} - \frac{\left(H_{R1}(s) + H_{R2}(s)\right)\hat{H}_p(s)}{1 + H_{R1}(s)\hat{H}_p(s)},$$

sau

$$\Delta H_0(s)=\frac{[H_{R1}(s)+H_{R2}(s)]L_A(s)}{\left[1+H_{R1}(s)\left(\hat{H}_p(s)+L_A(s)\right)\right]\left[1+H_{R1}(s)\hat{H}_p(s)\right]} \qquad (4.108)$$

Ţinând seama de (4.102) şi (4.108), se obţine:

$$\frac{\Delta H_0(s)}{\hat{H}_0(s)}=\frac{L_A(s)}{\hat{H}_p(s)}\cdot\frac{1}{1+H_{R1}(s)H_p(s)}$$

sau

$$\frac{\dfrac{\Delta H_0(s)}{\hat{H}_0(s)}}{\dfrac{\Delta H_p(s)}{\hat{H}_p(s)}}=\frac{1}{1+H_{R1}(s)H_p(s)}=S \qquad (4.109)$$

Funcţia S poartă denumirea de funcţie de sensibilitate. Această funcţie poate fi interpretată ca o măsură a variaţiei funcţiei $H_0(s)$ ca urmare a variaţiei funcţiei de transfer $H_p(s)$.

De notat că S_v definit în (4.103) este aceeaşi cu S definită prin (4.109). Pentru sistemele de reglare automată cu performanţe ridicate se impune la proiectarea regulatorului şi luarea în consideraţie a comportării procesului la frecvenţe înalte.

Dacă dinamica de înaltă frecvenţă a procesului este necunoscută, este de dorit a ţine amplificarea la înaltă frecvenţă cât mai redusă, pentru a suprima fenomenele generate de comportarea la frecvenţe înalte.

Marginea de stabilitate

Stabilitatea SRA este determinată cel mai adesea pornind de la criteriul Nyquist. Funcţia de transfer a căii directe, în prezenţa incertitudinilor aditive este:

$$H_d(s)=H_{R1}(s)\left[\hat{H}_p(s)+L_A(s)\right]=H_{R1}(s)\hat{H}_p(s)+H_{R1}(s)L_A(s).$$

Proiectarea SRA presupune asigurarea stabilităţii acestuia, $H_{R1}(j\omega)\hat{H}_p(j\omega)$ satisface condiţia de stabilitate Nyquist. Dacă $H_{R1}(j\omega)L_A(j\omega)$ este mai mic în amplitudine decât distanţa între punctul $-1+j0$ şi punctul $H_{R1}(j\omega)\hat{H}_p(j\omega)$ la o frecvenţă dată, atunci $H_{R1}(j\omega)H_p(j\omega)$ satisface, de asemenea, condiţia de stabilitate Nyquist.

Astfel, dacă:

$$\left|H_{R1}L_A\right|<\left|1+H_{R1}\hat{H}_p\right|, \qquad (4.110)$$

Notând prin

$$\hat{T}=\frac{H_{R1}\hat{H}_p}{1+H_{R1}\hat{H}_p}, \qquad (4.111)$$

relaţia (4.110) poate fi scrisă sub forma:

$$\left|\frac{L_A}{\hat{H}_p}\right|<\left|\frac{1}{\hat{T}}\right|. \qquad (4.112)$$

Această inegalitate dă marginea de stabilitate în forma generală.

Dacă notăm prin $l(\omega)$ limita superioară a erorii de modelare:

$$\left|\frac{L_A(j\omega)}{\hat{H}_p(j\omega)}\right|=\left|\frac{H_p(j\omega)-\hat{H}_p(j\omega)}{\hat{H}_p(j\omega)}\right|\le l(\omega),$$

atunci, pentru asigurarea condiţiei de stabilitate, alegem $\hat{T}(j\omega)$ astfel încât:

$$\left|\frac{1}{\hat{T}(j\omega)}\right|\ge l(\omega) \qquad (4.113)$$

Această inegalitate arată că, atât timp cât eroarea de modelare rămâne sub $\dfrac{1}{|\hat{T}|}$ pentru toate frecvenţele, sistemul este stabil.

O ilustrare a cerinţelor de stabilitate a unui sistem cu incertitudini de modelare este dată în figura 4.23.

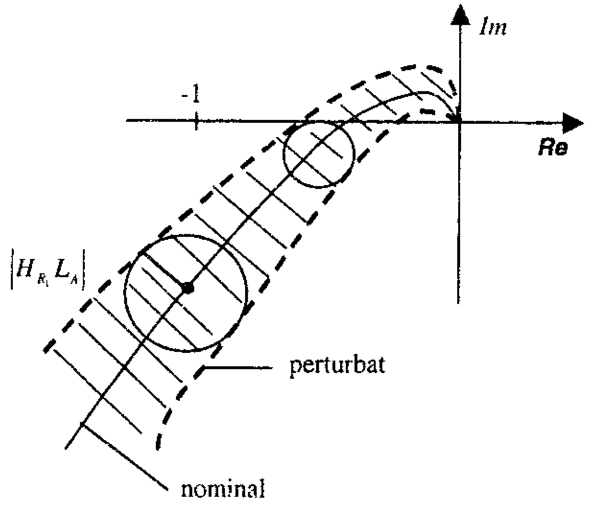


Fig. 4.23

Este de remarcat faptul că pentru acest SRA rezultă cu uşurinţă relaţia între $S(j\omega)$ şi $T(j\omega)$ sub forma:

$$S(j\omega)+T(j\omega)=1 \tag{4.114}$$

Această relaţie evidenţiază faptul că este imposibil a face ca ambele funcţii să fie mai mari sau mai mici la aceeaşi frecvenţă.

Pentru regiunea frecvenţelor înalte, unde $l(\omega)>1$, avem:

$$|T(j\omega)|\le\frac{1}{l(\omega)}$$
$$|S(j\omega)|=1-|T(j\omega)|\ge 1-\frac{1}{l(\omega)};\ [l(\omega)>1] \tag{4.115}$$

Dacă $S(j\omega)$ şi $T(j\omega)$ satisfac aceste condiţii, stabilitatea sistemului este garantată.

De notat că $l(\omega)$ specifică o limită superioară a amplitudinii lui $|T(j\omega)|$.

Deoarece:

$$T(j\omega)=\frac{H_{R1}(j\omega)\hat{H}_p(j\omega)}{1+H_{R1}(j\omega)\hat{H}_p(j\omega)} \tag{4.116}$$

şi $|H_{R1}(j\omega)H_p(j\omega)|<<1$ pentru frecvenţe înalte, atunci

$$\lim_{\omega\to\infty}|T(j\omega)|=|H_{R1}(j\omega)H_p(j\omega)|$$

sau

$$|H_{R1}(j\omega)H_p(j\omega)|<\frac{1}{l(\omega)} \tag{4.117}$$

care arată că eroarea de modelare specifică o limită superioară a factorului de amplificare al căii directe a SRA.

Efectul zgomotului de măsurare este determinat de funcţia de transfer:

$$H_{yn}(s)=-T(s).$$

Astfel, dacă $|T(j\omega)|$ este mai mică, atunci efectul zgomotului este redus.

Din analiza prezentată se desprind următoarele concluzii:

– prin reducerea funcţiei de sensibilitate $|S(j\omega)|$ se îmbunătăţeşte rejecţia perturbaţiei şi se reduce sensibilitatea la erorile de modelare;

– prin reducerea funcţiei $|T(j\omega)|$ se îmbunătăţeşte stabilitatea şi se reduce sensibilitatea la zgomotele de măsură.

Este interesant de observat că deşi performanţele de urmărire depind de $H_{R1}(s)$ şi $H_{R2}(s)$, rejecţia perturbaţiei, sensibilitatea la erorile de modelare, marginea de stabilitate şi sensibilitatea la zgomotele de măsură depind numai de $H_{R1}(s)$.

În proiectarea SRA cu regulator PID cu două grade de libertate (sau acordarea regulatoarelor PID) va trebui mai întâi să se asigure caracteristicile buclei de reglare (performanţele), prin alegerea şi acordarea blocului de reglare $H_{R1}(s)$, şi apoi să se asigure comportarea în raport cu referinţa, prin alegerea blocului de reglare $H_{R2}(s)$.

O analiză similară se poate realiza şi pentru SRA cu un grad de libertate dacă alegem $H_{R2}(s)=0$.

Apelând la caracteristica $A(\omega)$ (diagrama Bode) se pot defini cerinţele pentru asigurarea robusteţei performanţelor SRA. Astfel, cerinţa ca $S(j\omega)$ să fie redus la joasă frecvenţă specifică limita minimă pentru amplificare la joasă frecvenţă, iar cerinţa asupra nivelului redus al sensibilităţii la zgomot specifică limita superioară a amplificării la frecvenţă înaltă.

O diagramă Bode acceptabilă este prezentată în figura 4.24. Frecvenţa de tăiere trebuie să fie apropiată de banda de frecvenţă cerută, iar panta caracteristicii $A(\omega)$ trebuia să fie egală cu $-20dB/dec$.

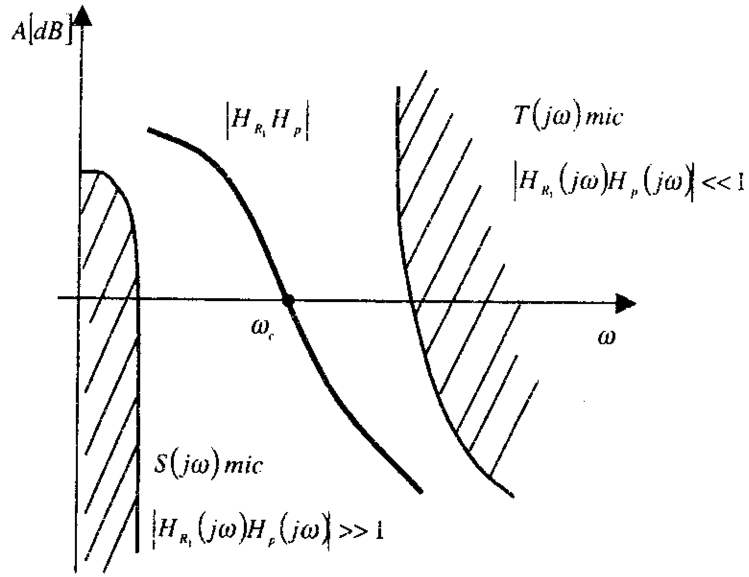


Fig. 4.24

4.6. Structuri de reglare

4.6.1. Principiul modelului intern (IMP)

Analiza SRA folosind diferiţi algoritmi de reglare evidenţiază modul de realizare a unei comportări dorite în cadrul unei structuri date. Utilizarea principiului de reglare cu model intern asigură comportarea dorită în regim staţionar sau în regim permanent în raport cu mărimile exogene (referinţa, perturbaţii aditive).

Dacă definim clasa de mărimi exogene ca ieşiri ale unui sistem dinamic cu intrare zero şi anumite condiţii iniţiale specifice, putem scrie perturbaţia $V(s)$ sub forma [46]:

$$V(s)=\frac{1}{P_V(s)}\cdot Q_V(s)\cdot x_V(0), \quad (4.118)$$

unde $x_V(0)$ reprezintă starea iniţială a sistemului care generează perturbaţia, iar $P_V(s)$ şi $Q_V(s)$ sunt polinoame ce se obţin prin aplicarea transformatei Laplace ecuaţiei:

$$\frac{d^q v(t)}{dt^q}+\sum_{i=0}^{q-1}\gamma_i\frac{d^i v(t)}{dt^i}=0 \quad (4.119)$$

În mod similar, presupunem că referinţa este generată de un sistem dinamic caracterizat prin:

$$\frac{d^q r(t)}{dt^q}+\sum_{i=0}^{q-1}\gamma_i\frac{d^i r(t)}{dt^i}=0 \quad (4.120)$$

sau

$$R(s)=\frac{1}{P_r(s)}\cdot Q_r(s)\cdot x_r(0) \quad (4.121)$$

Polinoamele $P_V(s)$ şi $P_r(s)$ au forma:

$$P_r(s)=s^q+\sum_{i=0}^{q-1}\gamma_i s^i \quad (4.122)$$

De remarcat faptul că polinoamele $P_V(s)$ şi $P_r(s)$ pot conţine rădăcini situate în semiplanul stâng şi în semiplanul drept, ceea ce evidenţiază particularităţile semnalelor exogene. Caracterul persistent al semnalelor exogene este dat de rădăcinile cu partea reală pozitivă.

Dacă ne referim la structura prezentată în figura 4.25, unde perturbaţia acţionează asupra procesului într-un punct intermediar, putem evidenţia cele două categorii de perturbaţii ce acţionează la intrarea şi la ieşirea procesului.

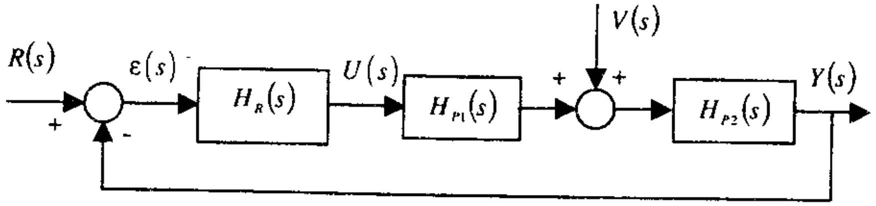


Fig. 4.25

Astfel, pentru cazul în care $H_{P_2}(s)=1$, perturbaţia se consideră că acţionează la ieşirea procesului, iar pentru cazul în care $H_{P_1}(s)=1$, perturbaţia acţionează la intrarea procesului.

Modelul procesului în acest caz este dat de:

$H_p(s)=H_{P_1}(s)H_{P_2}(s)$.

Ieşirea SRA, calculată în raport cu perturbaţia $V(s)$ este:

$$Y(s)=S(s)H_{P_2}(s)V(s) \quad (4.123)$$

iar comanda $U(s)$ este dată de relaţia:

$$U(s)=-S_u(s)H_{P_2}(s)V(s)=\frac{T(s)}{H_{P_1}(s)}V(s), \quad (4.124)$$

unde:

$$S(s)=\frac{1}{1+H_R(s)H_{P_1}(s)H_{P_2}(s)}$$

$$S_u(s)=\frac{H_R(s)}{1+H_R(s)H_{P_1}(s)H_{P_2}(s)}$$

$$T(s)=\frac{H_R(s)H_{P_1}(s)H_{P_2}(s)}{1+H_R(s)H_{P_1}(s)H_{P_2}(s)}.$$

Din (4.123) se observă că efectul perturbaţiei asupra ieşirii este rejectat asimptotic când cel puţin una dintre următoarele condiţii este satisfăcută:

- $v(t)\to 0$ când $t\to\infty$;
- polinomul $P_V(s)$ este un factor în numărătorul $S(s)H_{P_2}(s)$.

Satisfacerea acestor condiţii presupune ca SRA să fie stabil.

Primul caz nu prezintă interes din punct de vedere al comportării în regim staţionar şi va fi considerat în contextul performanţelor tranzitorii.

Când rădăcinile lui $P_V(s)$ sunt în semiplanul drept închis, atunci numai a doua condiţie garantează eroare staţionară egală cu zero datorată perturbaţiei $V(s)$. Această cerinţă poate fi îndeplinită dacă factorii lui $P_V(s)$

sunt incluşi în polinomul de la numitorul lui $H_R(s)$ şi/sau în numitorul lui $H_R(s)$. Pentru cazul în care $H_R(s)=1$, se impune ca $P_V(s)$ să fie un factor al numitorului $H_R(s)$. Observăm că dacă $P_V(s)$ este un factor al numitorului lui $H_R(s)$, atunci componentele instabile ale lui $v(t)$ vor fi asimptotic compensate, atât pentru $\hat{H}_p(s)$, cât şi pentru $H_p(s)$, dacă bucla nominală este robustă din punctul de vedere al stabilităţii.

Rejecţia perturbaţiilor în regim staţionar necesită ca $P_V(s)$ să fie inclus ca parte a numitorului regulatorului. Această cerinţă este cunoscută ca *Principul Modelului Intern* (IMP).

Când se foloseşte IMP, $\hat{T}(s)$ şi $T(s)$ au valoarea 1 pentru rădăcinile lui $P_V(s)$.

Astfel, din (4.123), observăm că ieşirea $u(t)$ a regulatorului va conţine în general modurile perturbaţiei.

Pentru un model al procesului $H_p(s)=\dfrac{B_p(s)}{A_p(s)}$ şi cu un regulator cu funcţie de transfer $H_R(s)=\dfrac{Q_R(s)}{P_R(s)}$ rezultă că polinomul caracteristic al sistemului va fi:

$$\alpha(s)=A_p(s)P_V(s)\overline{P}_R(s)+Q_R(s)B_p(s), \tag{4.125}$$

unde

$$P_R(s)=P_V(s)\overline{P}_R(s).$$

Principiul modelului intern se aplică şi în cazul urmăririi referinţei. Pentru acest caz, considerăm o structură cu două grade de libertate (fig. 4.26). Performanţele de urmărire pot fi cuantificate pe baza următoarelor ecuaţii:

$$Y(s)=H_r(s)T(s)R(s) \tag{4.126}$$

$$\varepsilon(s)=R(s)-Y(s)=(1-H_r(s)T(s))R(s) \tag{4.127}$$

$$U(s)=H_r(s)S_u(s)R(s) \tag{4.128}$$

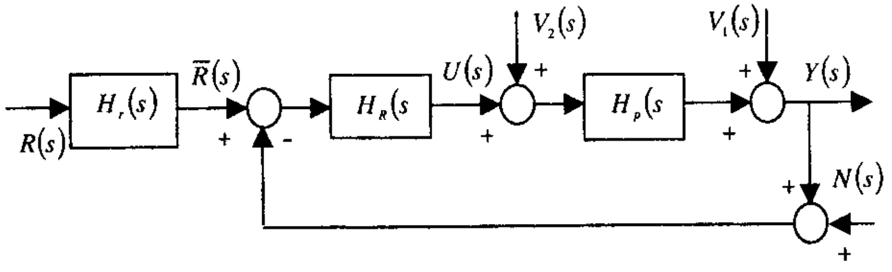


Fig. 4.26

Pentru a realiza urmărirea robustă a referinţei (eroare staţionară egală cu zero), se impune ca polinomul $P_r(s)$ să fie factor al numitorului produsului $H_R(s)H_p(s)$, adică IMP este satisfăcut şi pentru referinţă.

Dacă polinoamele $P_V(s)$ şi $P_r(s)$ au unele rădăcini comune, atunci acestea trebuie incluse în numitorul lui $H_R(s)$ o singură dată pentru a satisface simultan IMP pentru referinţă şi perturbaţie.

Prezenţa componentei integrale în structura regulatoarelor convenţionale asigură comportarea dorită în regim staţionar atât în raport cu referinţa treaptă, cât şi în raport cu perturbaţia treaptă.

4.6.2. Structura de reglare cu două grade de libertate

Utilizarea IMP, aşa cum s-a arătat mai sus, asigură rejecţia completă a perturbaţiei şi urmărirea referinţei în regim staţionar, însă performanţele regimului tranzitoriu nu sunt controlate.

Răspunsul tranzitoriu este influenţat de zerourile funcţiei de transfer între punctul de aplicare al perturbaţiei sau referinţei şi ieşire, de polii funcţiei de transfer între ieşire şi punctul de aplicare al perturbaţiei şi referinţei şi poziţia polilor în buclă închisă.

Performanţele tranzitorii pot fi influenţate în diferite moduri, însă cel mai evident este prin modificarea poziţiei polilor sistemului închis prin schimbarea regulatorului. În unele situaţii, când referinţa sau/şi perturbaţiile sunt măsurabile, se poate adopta *soluţia de reglare cu două grade de libertate* sau *soluţia de reglare combinată*.

Prin urmărirea referinţei se adoptă structura de SRA cu două grade de libertate (fig. 4.26).

Ideea urmăririi directe a referinţei (feedforward) este de a folosi prefiltrul cu funcţia de transfer $H_r(s)$ pentru a inversa $T(s)$ la anumite frecvenţe, astfel că $H_r(s)T(s)=1$ la polii modelului referinţei (adică la a_i, $i=1,\cdots,n_a$). De notat că prin utilizarea acestei strategii se poate evita folosirea unei amplificări mari în bucla de reglare pentru a aduce $T(a_i)$ la valoarea egală cu unitatea. Aceasta ar putea avea efecte benefice asupra stabilităţii robuste. Pe de altă parte, dacă $H_r(s)$ este folosit pentru a realiza $H_r(a_i)T(a_i)=1$, atunci performanţele pentru procesul real vor fi sensibile la erorile de modelare.

4.6.3. Structura de reglare combinată

În cazul în care perturbaţia $v(t)$ este măsurabilă, se poate adopta o soluţie de reglare directă (fig. 4.27).

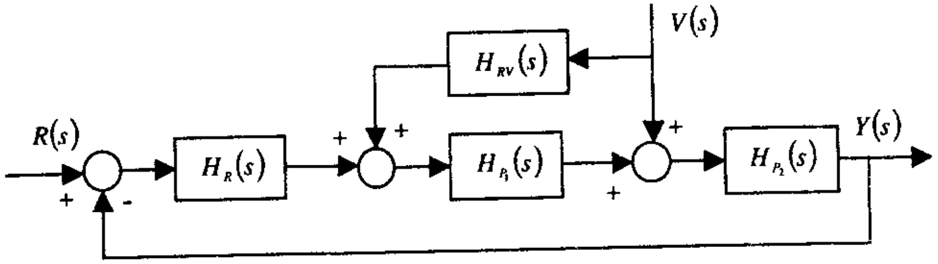


Fig. 4.27

Din figura 4.27, observăm pentru referinţa nulă că :

$$Y_V(s) = S(s)H_{P_2}(s)\left[1 + H_{P_1}(s)H_{RV}(s)\right]V(s) \tag{4.129}$$

$$U_V(s) = -S_u(s)\left[H_{P_2}(s) + H_{RV}(s)H_{P_1}(s)\right]V(s) \tag{4.130}$$

Arhitecturii propuse i se cere să prezinte următoarele proprietăţi:

– funcţia de transfer $H_{RV}(s)$ trebuie să fie stabilă şi proprie, întrucât acţionează în buclă deschisă;

– ecuaţia (4.129) indică faptul că, ideal, blocul de reglare directă (feedforward) inversează modelul nominal:

$$H_{RV}(s) = -\left[H_{P_1}(s)\right]^{-1} \tag{4.131}$$

– pentru $H_{P_1}(s)$ cu o caracteristică de frecvenţă trece-jos se obţine $H_{RV}(s)$ cu o caracteristică trece-sus.

Utilizarea acestei arhitecturi asigură rejecţia directă a perturbaţiei măsurabile, ceea ce asigură o îmbunătăţire a performanţelor SRA , în special pentru procese lente şi foarte lente.

Exemplul 4.5:

Se consideră procesul descris de modelul nominal:

$$H_P(s) = \frac{e^{-2s}}{3s^2 + 4s + 1},$$

cu $H_{P_1}(s) = \dfrac{1}{s+1}$ *şi* $H_{P_2}(s) = \dfrac{e^{-2s}}{3s+1}$, *iar perturbaţia acţionează sub forma unei modificări în treaptă.*

Alegem regulatorul cu acţiune directă asupra perturbaţiei (regulator feedforward) sub forma:

$$H_{RV}(s) = -K\frac{s+1}{\alpha s + 1}$$

unde α *permite, prin ajustare, a realiza compromisul între eficienţa reglării directe şi efortul de comandă.*

În figura 4.28 se prezintă răspunsul SRA în raport cu referinţa şi perturbaţia ce acţionează la momentele de timp $t_1 = 0s$ *şi* $t_2 = 20s$, *pentru* $K = 0$ *şi* $K = 1$ *şi diverse valori ale lui* α.

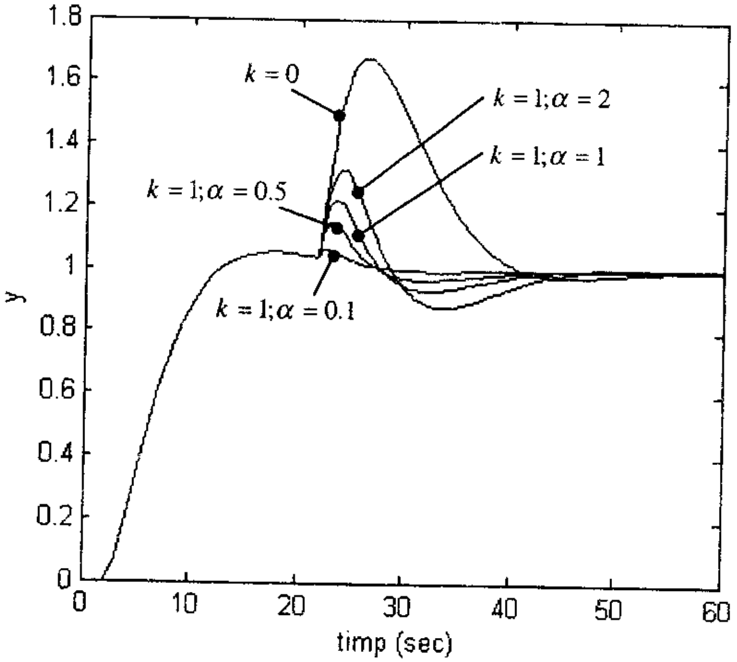


Fig. 4.28

Regulatorul $H_R(s)$ *este de tip PID şi este acordat astfel încât suprareglajul în raport cu referinţa treaptă unitară să fie* $\sigma \le 5\%$.

Se poate cu uşurinţă observa că performanţele tranzitorii sunt îmbunătăţite în prezenţa regulatorului $H_{RV}(s)$.

Utilizarea reglării directe după perturbaţie este posibilă numai în cazul în care $H_{P_1}(s)$ este inversabilă. Astfel, pentru cazul în care în $H_{P_1}(s)$ apare timp mort sau zerouri de fază neminimă, este foarte dificil a aplica această structură. Se recomandă în special pentru procese ce includ timpi morţi semnificativi în $H_{P_2}(s)$.

Reglarea combinată poate fi considerată ca o structură cu trei grade de libertate în cazul în care se include şi prefiltrul pentru referinţă (fig. 4.29)

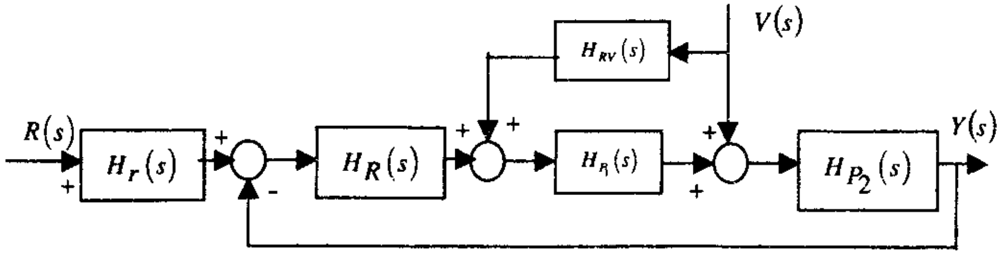


Fig. 4.29

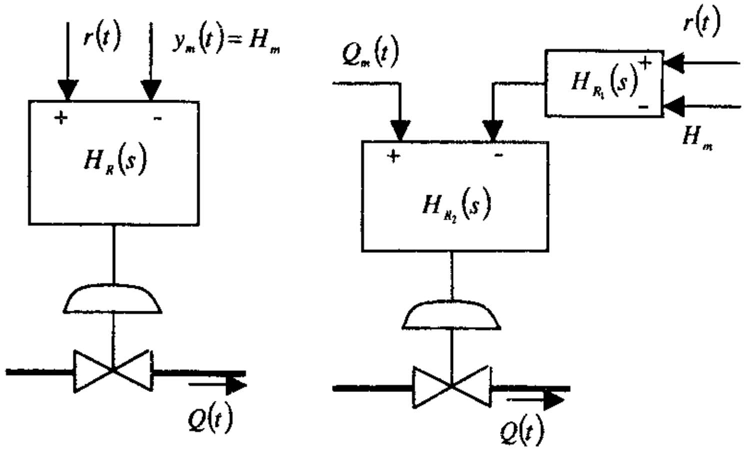
În această structură, cele trei blocuri de reglare pot fi ajustate independent pentru obţinerea comportării dorite în raport cu referinţa şi perturbaţia.

4.6.4. Structura de reglare în cascadă

În cazul în care unele variabile intermediare din proces sunt măsurabile şi pot fi rejectate perturbaţii importante prin intermediul unor bucle de reglare secundare, se poate adopta soluţia de reglare în cascadă.

Ca exemplu, să considerăm reglarea nivelului într-un rezervor, folosind ca variabilă manipulată debitul de fluid. Pentru aceasta se poate adopta o soluţie simplă cu un regulator de nivel sau o soluţie cascadă cu un regulator intermediar pentru controlul debitului pe conducta de alimentare (fig. 4.30*b*).

În cea de-a doua schemă este inclusă o buclă de reglare secundară pentru reglarea debitului, iar referinţa este generată de regulatorul principal de nivel.



(a) (b)

Fig. 4.30

Structura de reglare în cascadă este prezentată în figura 4.31.

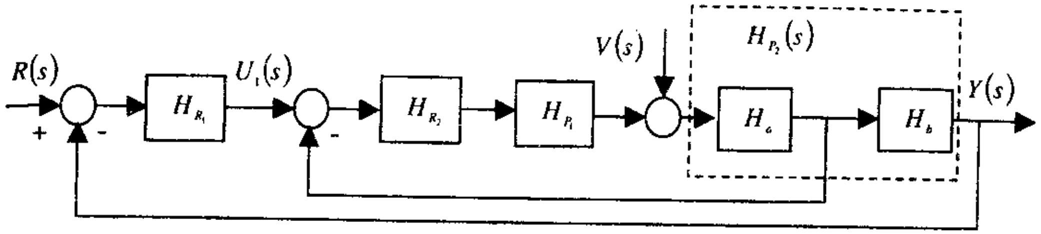


Fig. 4.31

În această structură este inclusă bucla secundară cu regulatorul $H_{R_2}(s)$ şi modelul $H_{P_1}(s)H_a(s)$ şi bucla principală cu regulatorul $H_{R_1}(s)$ care generează referinţa pentru bucla secundară. Regulatorul secundar $H_{R_2}(s)$ este astfel proiectat, încât să atenueze efectul perturbaţiei înainte de a afecta semnificativ ieşirea procesului.

Avantaje importante ale structurii de reglare în cascadă se obţin în următoarele ipoteze:

– când $H_a(s)$ conţine neliniarităţi importante ce limitează performanţele buclei de reglare;

– când $H_b(s)$ limitează banda de frecvenţă în arhitectura clasică cu un singur regulator;

– când perturbaţiile dominante sunt compensate în bucla secundară;

– când $H_b(s)$ conţine timp mort sau zerouri de fază neminimă.

Regulatorul $H_{R_1}(s)$ trebuie proiectat pentru un model echivalent cu intrarea $U_1(s)$ şi ieşirea $Y_1(s)$ şi perturbaţie $V(s)$:

$$Y(s)=H_{P_2}(s)S_2(s)V(s)+H_{R_2}(s)H_P(s)S_2(s)U_1(s), \qquad (4.132)$$

unde

$$H_P(s)=H_{P_1}(s)H_{P_2}(s)$$

$$S_2(s)=\left[1+H_{R_2}(s)H_{P_1}(s)H_a(s)\right]^{-1}$$

sau

$$Y(s)=H_{P_2}(s)S_2(s)V(s)+H_b(s)T_2(s)U_1(s), \qquad (4.133)$$

unde

$$T_2(s)=\frac{H_{R_2}(s)H_{P_1}(s)H_a(s)}{1+H_{R_2}(s)H_{P_1}(s)H_a(s)}.$$

Dacă vom compara această ieşire cu ieşirea SRA cu un singur regulator, putem deduce modelul echivalent al blocului secundar.

Astfel, dacă:

$$Y(s) = H_{P_2}(s)V(s) + H_P(s)U(s) \tag{4.134}$$

rezultă că în cascadă regulatorul $H_{R_1}(s)$ acţionează asupra unui sistem în care perturbaţia este precompensată prin funcţia de sensibilitate a buclei secundare $S_2(s)$. În aceste condiţii se obţin performanţe mai bune la rejectarea perturbaţiei.

Dacă regulatorul $H_{R_2}(s)$ s-a proiectat pentru $H_{P_1}(s)H_a(s)$, atunci $H_{R_1}(s)$ se proiectează pentru modelul echivalent:

$$H_{P_e}(s) \overset{\Delta}{=} H_b(s) \cdot T_2(s) \tag{4.135}$$

Exemplul 4.6:

Se consideră procesul caracterizat prin modelul prezentat în figura 4.32, cu:

$$H_{P_1}(s) = \frac{1}{s+1};\; H_{P_2}(s) = \frac{e^{-2s}}{3s+1};\; H_a(s) = 1;\; H_b(s) = \frac{e^{-2s}}{3s+1}.$$

Admitem că variabila $Y_1(s)$ este măsurabilă.

Se cere a alege blocurile de reglare pentru urmărirea referinţei şi rejecţia perturbaţiei de tip treaptă.

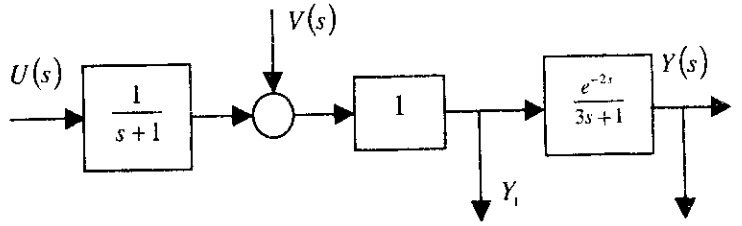


Fig. 4.32

Rezolvare:

Vom alege o structură de reglare în cascadă având în vedere că $y_1(t)$ este măsurabilă, perturbaţia dominantă este inclusă ca efect în valoarea măsurată $Y_1(s)$, iar procesul are timp mort.

Alegem pentru bucla secundară un regulator PI cu $T_i = 1s$ şi $K_R = 10$:

$$H_{R_2}(s) = \frac{10(s+1)}{s}.$$

S-a ales acest regulator pentru a asigura o bună compensare a perturbaţiei în bucla secundară şi pentru a obţine viteză bună de răspuns a buclei secundare.

Funcţia de transfer a buclei secundare este:

$$H_{02}(s) \equiv T_2(s) = \frac{10}{s+10}.$$

Regulatorul principal se proiectează pentru un model echivalent:

$$H_{Pe}(s) = \frac{10e^{-2s}}{(s+10)(3s+1)}.$$

Pentru acest model recomandăm un regulator PI cu funcţia de transfer:

$$H_{R_1}(s) = 5 \cdot \frac{3s+1}{s}$$

care asigură performanţe satisfăcătoare în raport cu referinţa treaptă şi perturbaţia precompensată în bucla secundară.

În figura 4.33 se prezintă rezultatul simulării în condiţiile în care referinţa se modifică sub formă de treaptă la $t = 2\sec$ iar perturbaţia apare la $t = 6\sec$.

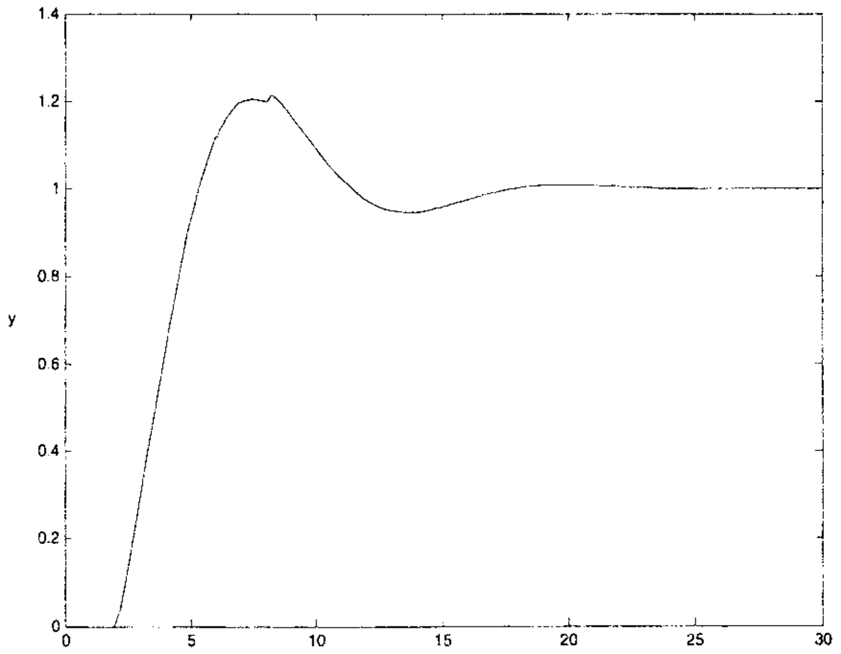


Fig. 4.33

Principalele proprietăţi ale reglării în cascadă sunt:

- reglarea în cascadă este o strategie bazată pe reacţie;
- variabila intermediară trebuie măsurată; se poate interpreta aceasta că bucla secundară are un estimator pentru perturbaţie;

– se impune a considera la proiectarea buclei secundare zgomotul de măsură care poate limita banda de frecvenţă a acesteia;

– deşi reglarea în cascadă necesită inversarea, ea poate fi mai puţin sensibilă la erorile de modelare prin folosirea avantajelor reacţiei negative.

4.6.5. Structura de reglare cu predictor Smith

Prezenţa timpului mort în modelul procesului face dificilă utilizarea unor proceduri de reglare bazate pe inversarea modelului. În acest caz se recomandă o structură de reglare cu scoaterea timpului mort în afara buclei de reglare. În figura 4.34 se prezintă structura de reglare cu predictor Smith.

Ideea de bază în cadrul strategiei de reglare cu predictor Smith este de a construi un model paralel ce compensează întârzierea.

Admitem că procesul este modelat prin:

$$H_p(s) = H(s)e^{-\tau s} \tag{4.136}$$

evidenţiind raţionala $H(s)$ stabilă, proprie şi timpul mort τ.

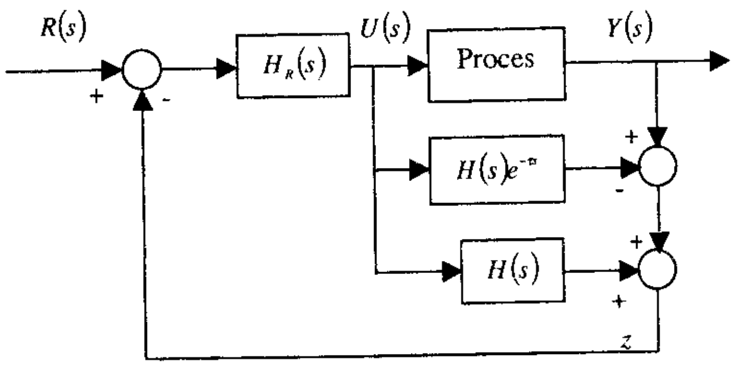


Fig. 4.34

Regulatorul, în acest caz, se poate proiecta pe baza funcţiei de transfer între $R(s)$ şi $Z(s)$, care nu conţine timpul mort în bucla de reglare:

$$T_{zr}(s) = \frac{H(s)H_R(s)}{1 + H(s)H_R(s)} \tag{4.137}$$

Funcţia de transfer între $R(s)$ şi $Y(s)$ în acest caz este calculată cu relaţia:

$$H_0(s) \equiv T(s) = \frac{H(s)H_R(s)e^{-\tau s}}{1 + H(s)H_R(s)} \tag{4.138}$$

sau

$$T(s) = e^{-\tau s}T_{zr}(s) \tag{4.139}$$

Această structură este aplicabilă numai dacă procesul în buclă deschisă este stabil.

Relaţia (4.139) evidenţiază o modalitate simplă de alegere şi proiectare a unui regulator pe baza modelului fără timp mort şi întârzierea răspunsului cu τ.

Dacă admitem că modelul nominal al procesului este:

$$\hat{H}_p(s) = \hat{H}(s)e^{-\hat{\tau} s} \tag{4.140}$$

iar modelul real este de aceeaşi formă:

$$H_p(s) = H(s)e^{-\tau s},$$

atunci structura de reglare cu predictor Smith are forma din figura 4.35.

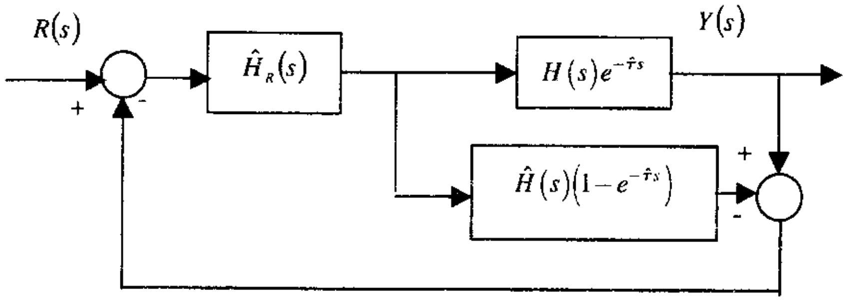


Fig. 4.35

Funcţia de transfer $\hat{H}_R(s)$ se obţine pe baza modelului fără timp mort.

Regulatorul cu predictor Smith are funcţia de transfer:

$$H_R(s) = \frac{\hat{H}_R(s)}{1 + \hat{H}_R(s)\hat{H}(s)\left(1 - e^{-\tau s}\right)} \tag{4.141}$$

iar funcţia de transfer a căii directe este:

$$H_d(s) = H_R(s)H_p(s) = \frac{\hat{H}_R(s)H(s)e^{-\tau s}}{1 + \hat{H}_R(s)\hat{H}(s)\left(1 - e^{-\tau s}\right)} \tag{4.142}$$

Funcţia de transfer a SRA în acest caz capătă forma:

$$H_0(s) \equiv T(s) = \frac{\hat{H}_R(s)H(s)e^{-\tau s}}{1 + \hat{H}_R(s)\hat{H}(s) + \hat{H}_R(s)H(s)e^{-\tau s} - \hat{H}_R(s)\hat{H}(s)e^{-\hat{\tau} s}}$$

sau

$$T(s)=\frac{\hat{H}_R(s)H(s)e^{-\tau s}}{1+\hat{H}_R(s)\hat{H}(s)+\hat{H}_R(s)\left(H(s)e^{-\tau s}-\hat{H}(s)e^{-\hat{\tau}s}\right)} \tag{4.143}$$

Dacă $\hat{\tau}\equiv\tau$ şi $\hat{H}(s)\equiv H(s)$, $T(s)$ capătă forma:

$$\hat{T}(s)=\frac{\hat{H}_R(s)\hat{H}(s)}{1+\hat{H}_R(s)\hat{H}(s)}\cdot e^{-\tau s}\equiv T_{zr}(s)\cdot e^{-\tau s} \tag{4.144}$$

Din (4.142) se poate evidenţia incertitudinea aditivă:

$$L_A(s)=H(s)e^{-\tau s}-\hat{H}(s)e^{-\hat{\tau}s} \tag{4.145}$$

iar $T(s)$ poate fi pusă sub forma:

$$T(s)=\frac{\hat{H}_R(s)H(s)e^{-\tau s}}{1+\hat{H}_R(s)\hat{H}(s)+\hat{H}_R(s)L_A(s)}. \tag{4.146}$$

În mod similar, se pot evidenţia incertitudini multiplicative:

$$L_M(s):=\frac{H(s)e^{-\tau s}}{\hat{H}(s)e^{-\hat{\tau}s}}-1 \tag{4.147}$$

iar funcţia de transfer $T(s)$ poate fi pusă sub forma:

$$T(s)=\frac{\hat{H}_R(s)H(s)e^{-\tau s}}{1+\hat{H}_R(s)\hat{H}(s)+\hat{H}_R(s)\hat{H}(s)e^{-\hat{\tau}s}\left[\dfrac{H(s)e^{-\tau s}}{\hat{H}(s)e^{-\hat{\tau}s}}-1\right]}$$

sau

$$T(s)=\frac{\hat{H}_R(s)H(s)e^{-\tau s}}{1+\hat{H}_R(s)\hat{H}(s)+\hat{H}_R(s)\hat{H}(s)e^{-\hat{\tau}s}L_M(s)} \tag{4.148}$$

Robusteţea stabilităţii şi a performanţelor SRA cu regulatorul $\hat{H}_R(s)$ proiectat pe baza modelului fără timp mort pot fi studiate pentru diferite clase de incertitudini structurate şi nestructurate ($\tau\neq\hat{\tau}$ şi $H(s)\neq\hat{H}(s)$).

Dacă ţinem seama de definiţia incertitudinilor multiplicative, funcţia de transfer $H_d(s)$ poate fi pusă sub forma:

$$H_d(s)=\frac{\hat{H}_R(s)\hat{H}(s)e^{-\hat{\tau}s}}{1+\hat{H}_R(s)\hat{H}(s)\left[1-e^{-\hat{\tau}s}\right]}\cdot\frac{H(s)e^{-\tau s}}{\hat{H}(s)e^{-\hat{\tau}s}} \tag{4.149}$$

sau

$$H_d(s)=\hat{H}_d(s)\cdot\left[L_M(s)+1\right] \tag{4.150}$$

unde $\hat{H}_d(s)$ este funcţia de transfer a căii directe pentru $\tau\equiv\hat{\tau}$ şi $\hat{H}(s)=H(s)$.

Exemplul 4.7:

Se consideră un proces caracterizat prin:

$$H_p(s)=\frac{K_p e^{-\tau s}}{T_p s+1}$$

şi un model nominal:

$$\hat{H}_p(s)=\frac{\hat{K}_p e^{-\hat{\tau}s}}{\hat{T}_p s+1}.$$

Admiţând că $\tau\neq\hat{\tau}$, $\hat{T}_p\neq T_p$ şi $\hat{K}_p=K_p$, se cere a analiza efectul parametrilor $\delta=\tau-\hat{\tau}$ şi $\Delta=T_p-\hat{T}_p$ asupra performanţelor SRA cu regulator proiectat pe baza modelului $\hat{H}(s)=\dfrac{\hat{K}_p}{\hat{T}_p s+1}$.

Pentru proiectarea regulatorului impunem ca răspunsul indiceal al SRA să fie:

$$H_0(s)=\frac{1}{T_0 s+1}e^{-\tau s},$$

cu $T_0=\dfrac{\hat{T}_p}{\hat{K}_p}$.

În aceste condiţii, rezultă un regulator PI cu funcţia de transfer:

$$\hat{H}_R(s)=\frac{\hat{T}_p s+1}{\hat{T}_p s},$$

cu $\hat{H}_d(s)=\dfrac{1}{T_0 s}$.

Incertitudinea $L_M(s)$ în acest caz capătă forma:

$$L_M(s)=\frac{H(s)e^{-\tau s}}{\hat{H}(s)e^{-\hat{\tau}s}}-1=\frac{\hat{T}_p s+1}{T_p s+1}e^{-\delta s}-1 \text{ sau}$$

$$L_M(s)=\frac{\hat{T}_p s+1}{(\hat{T}_p\pm\Delta)s+1}e^{-\delta s}-1.$$

Pentru cazul în care $\hat{T}_p=8s$ şi $\hat{\tau}=4s$, admiţând că $\delta\in[0.2\div0.8]$ şi $\Delta\in[2\div4]$, se obţine algoritmul de reglare:

$$\hat{H}_R(s)=\frac{8s+1}{8s}$$

şi răspunsurile indiciale din figura 4.36.

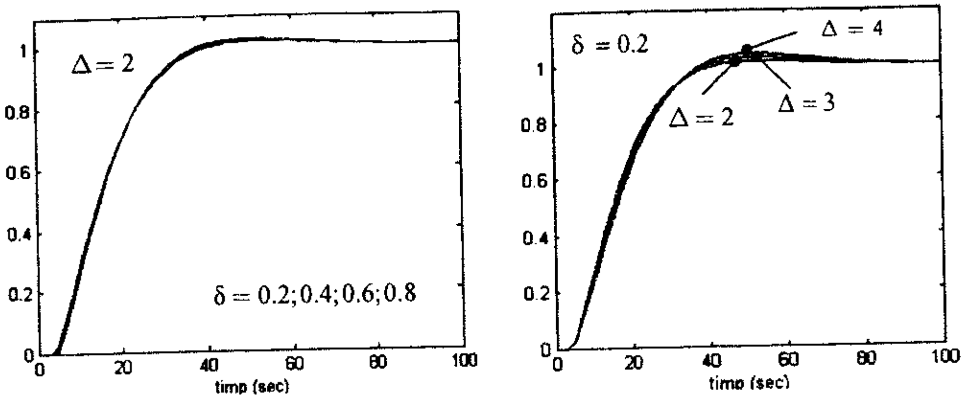


Fig. 4.36

Din analiza răspunsurilor indiciale pentru diferite incertitudini $\delta \neq 0$ *şi* $\Delta \neq 0$, *rezultă că strategia de reglare cu predictor Smith are o bună robusteţe a stabilităţii şi performanţelor.*

PROBLEME

4.1. Se consideră modelul:

$$H_p(s) = \frac{-\alpha s + 1}{(s+1)(s+2)}.$$

Se cere analiza efectului parametrului α asupra parametrilor K_R, T_i şi T_d folosind procedura Cohen-Coon de acordare ($\alpha = 0.1 \div 20$).

4.2. Se consideră procesul caracterizat prin modelul:

$$H_p(s) = \frac{K_p e^{-\tau s}}{T_p s + 1}$$

şi un regulator acordat prin procedura Cohen-Coon. Se cere:

a) marginea de amplitudine şi marginea de fază pentru diferite valori ale raportului $a = \dfrac{\tau}{T_p}$;

b) valoarea maximă a sensibilităţii în funcţie de valoarea lui a.

4.3. Se consideră un proces caracterizat printr-un model nominal:

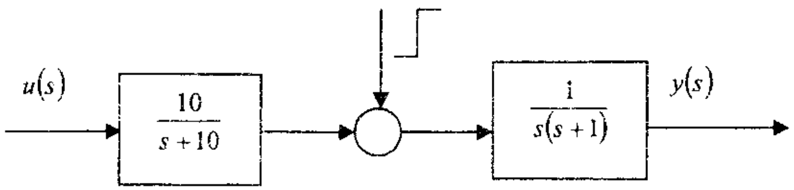
$$H_p(s) = \frac{-s+3}{(s+3)(s+6)}.$$

Se cere:

a) algoritmul PID care realizează o bandă de frecvenţă $\omega_B = 2[rad/s]$;

b) comparaţi rezultatul obţinut cu rezultatul obţinut prin utilizarea procedurii Cohen-Coon.

4.4. Se consideră un proces caracterizat prin modelul:



Se cere:

a) algoritmul de reglare care asigură un răspuns indicial caracterizat prin: $\sigma \leq 5\%$, $t_t \leq 1s$, $\varepsilon_{st} = 0$;

b) valoarea factorului de amplificare K_R astfel încât $\varepsilon_v \leq 0.01s$;

c) răspunsul indicial în raport cu perturbaţia.

4.5. Se consideră procesul caracterizat prin:

$$H_p(s) = \frac{0.5e^{-4s}}{10s+1}.$$

Se cere:

a) algoritmul de reglare care asigură un răspuns indicial cu durata regimului tranzitoriu $t_t = 7s$;

b) admiţând că τ şi T_p sunt variabile, în limitele $\tau \in [2, 6]$ şi $T_p \in [8, 12]$, să se determine legea de variaţie a factorului de amplificare, astfel încât răspunsul indicial să se modifice câtuşi de puţin.

4.6. Se consideră procesul caracterizat prin:

$$H_p(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}.$$

Se cere:

a) algoritmul de reglare care asigură un răspuns indicial aperiodic cu o constantă de timp $T_0 = 3s$;

b) valorile optime ale parametrilor K_R, T_i şi T_d obţinute prin aplicarea criteriului modulului.

4.7. Să se sintetizeze un regulator PI pentru un proces caracterizat prin modelul:

$$H_p(s)=\frac{1}{s^2+4s+8},$$

astfel încât $M_A \geq 10[dB]$ şi $M_\varphi \geq \frac{\pi}{4}$.

4.8. Se consideră un proces caracterizat prin modelul:

$$H_p(s)=\frac{-s+4}{(s+1)(s+4)}.$$

Se cere o strategie de reglare care să asigure:

a) $\varepsilon_{st}=0$ pentru o referinţă constantă;

b) erori staţionare egale cu zero pentru perturbaţii sinusoidale de frecvenţă $0.25[rad/s]$;

c) regulatorul $H_R(s)$ să fie propriu.

4.9. Se consideră un proces caracterizat prin modelul:

$$H_p(s)=\frac{0.5e^{-2s}}{8s+1}.$$

Se cere alegerea unei structuri de reglare şi a unei strategii, astfel încât răspunsul indiceal să fie aperiodic cu o durată a regimului tranzitoriu $t_t=10s$.

4.10. Se consideră un proces având modelul nominal dat prin:

$$H_p(s)=\frac{-s+8}{(s+1)(s+4)}.$$

Se cere un regulator care satisface IMP pentru $\omega=0$ şi ω=2 [rad/s].

5. ALGORITMI NUMERICI DE REGLARE PID

5.1. Introducere

Sistemele moderne de conducere a proceselor presupun implementarea strategiilor (algoritmilor) de conducere pe cale numerică.

În acest capitol sunt evidenţiate particularităţile algoritmilor de reglare implementaţi pe cale numerică. Se prezintă în continuare clasa algoritmilor convenţionali de reglare de tip PID şi problemele discretizării şi implementării acestora pe cale numerică.

Conducerea numerică a unui proces continuu presupune prezenţa elementelor de interfaţă care asigură conversia semnalelor continue în semnale numerice (CAN) şi în mod corespunzător conversia comenzii numerice în comandă continuă (CNA), după cum se arată în figura 5.1.

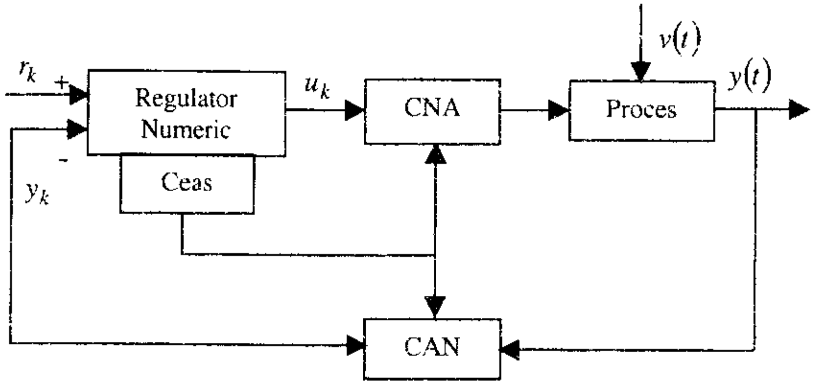


Fig. 5.1

Operaţia de conversie a mărimii continue $y(t)$ într-o mărime numerică y_k presupune eşantionarea mărimii $y(t)$ cu o perioadă de eşantionare egală cu T şi ataşarea fiecărei valori $y^*(t)$ a unui număr întreg

de cuante. Astfel, fiecărei amplitudini $y^*(t)$ eşantionată cu perioada T din funcţia continuă $y(t)$ i se asociază o mărime numerică, $y_k = Q[y^*(kT)]$, unde $Q(\cdot)$ reprezintă operatorul de cuantizare. Cel mai adesea această operaţie se neglijează şi astfel lucrăm cu valorile eşantionate $y_k = y^*(kT) = y(kT)$.

Variabila y_k este denumită variabilă discretă iar precizia de cuantizare (de conversie) este dată de lungimea cuvântului cu care operează convertorul analog-numeric. Pentru un convertor cu 10 biţi, lungimea cuvântului are o rezoluţie de 0.1% ($2^{10} = 1024$).

Comanda numerică elaborată de regulatorul numeric este transmisă la momente discrete de timp spre proces prin intermediul convertorului numeric-analogic. Convertorul CNA are rolul de a converti mărimile numerice în mărimi analogice compatibile cu intrarea elementelor de execuţie. Conversia se poate realiza folosind diferite metode de aproximare (extrapolare) a comenzii între momentele discrete de timp. Cea mai utilizată metodă de aproximare este metoda cu extrapolator de ordin zero – comanda se menţine constantă între două momente discrete de timp (fig. 5.2*a*). În figura 5.2*b* se prezintă metoda de aproximare cu extrapolator de ordin întâi unde comanda variază liniar între două momente discrete de timp.

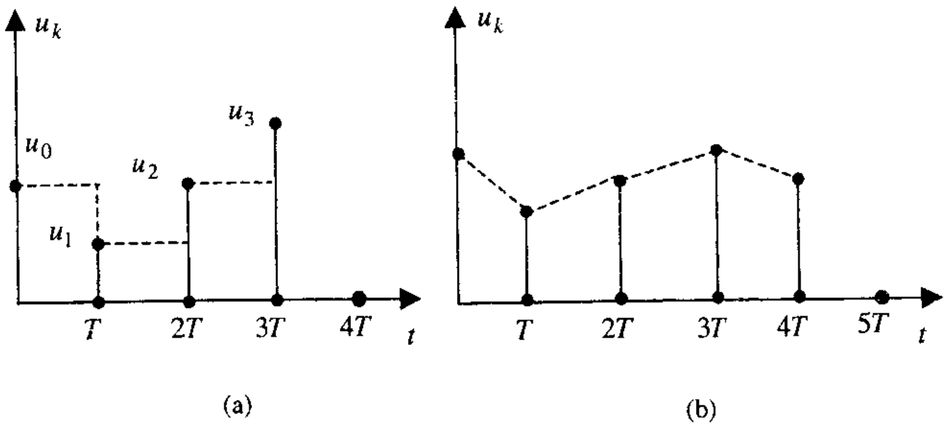


Fig. 5.2

În practică, cea mai utilizată metodă de aproximare a comenzii între două momente discrete de timp este menţinerea constantă a acesteia pe parcursul unei perioade de discretizare:

$u(t) = u_k$ pentru $t \in [kT, (k+1)T]$.

Comanda u_k este calculată pe baza referinţei în formă discretă r_k şi a ieşirii în formă discretă (numerică) y_k.

Este uşor de remarcat faptul că ieşirea convertorului numeric-analogic este cvasicontinuă.

Pentru obţinerea ecuaţiilor cu diferenţe pentru diverşi algoritmi continui de reglare descrişi prin ecuaţii diferenţiale sau funcţii de transfer pot fi folosite mai multe metode de discretizare.

Cele mai utilizate metode de discretizare a algoritmilor continui sunt: metoda dreptunghiurilor şi metoda trapezelor [6].

Pentru a ilustra cele două metode considerăm integrala:

$$I = \int_0^t f(\tau)d\tau \tag{5.1}$$

a cărei aproximare numerică poate fi obţinută sub forma :

$$I_k = I_{k-1} + Tf_k \text{ sau } I_k = I_{k-1} + Tf_{k-1} \tag{5.2}$$

în cazul aproximării prin metoda dreptunghiurilor şi:

$$I_k = I_{k-1} + \frac{T}{2}(f_k + f_{k-1}) \tag{5.3}$$

în cazul utilizării metodei trapezelor. Prin I_k s-a notat valoarea integralei până la momentul t_k.

Ilustrarea celor două metode poate fi urmărită în figura 5.3.

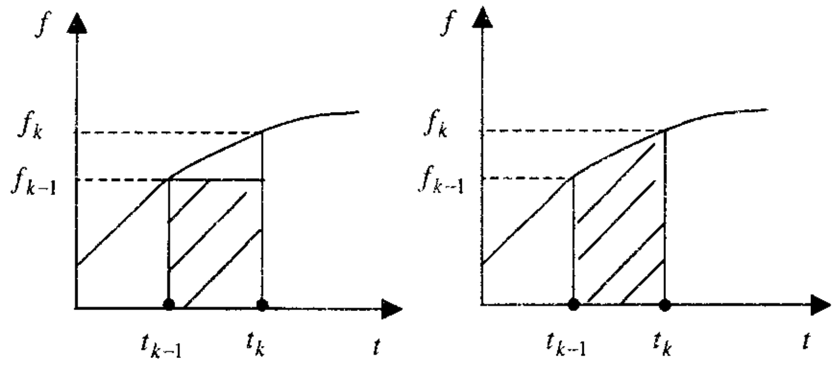


Fig. 5.3

În relaţiile (5.2) şi (5.3) f_k şi f_{k-1} reprezintă valorile funcţiei $f(t)$ în momentele t_k şi t_{k-1} iar $T = t_k - t_{k-1}$ reprezintă perioada de eşantionare (discretizare).

Dacă aplicăm transformata Z ecuaţiilor (5.3) obţinem cu uşurinţă funcţia de transfer a unui integrator numeric sub forma:

$I(z) = z^{-1}I(z) + Tf(z)$

respectiv

$$I(z) = z^{-1} I(z) + \frac{T}{2}\left(1 + z^{-1}\right) f(z),$$

$$\frac{I(z)}{f(z)} = \frac{T}{1 - z^{-1}} \text{ și } \frac{I(z)}{f(z)} = \frac{T}{2}\frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}.$$

Din aceste funcții de transfer care definesc operațiile de integrare se poate admite că echivalentul acestor operații de aproximare a integralei este:

$$\frac{1}{s} \approx \frac{T}{z-1} \text{ sau } \frac{1}{s} \cong \frac{Tz}{z-1} \text{ (cunoscuta metodă Euler)} \tag{5.4}$$

respectiv

$$\frac{1}{s} \approx \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} \text{ (cunoscuta metodă Tustin)} \tag{5.5}$$

Același rezultat se obține dacă considerăm în (5.4) și (5.5) în membrul drept $z = e^{Ts}$ folosind diferite metode de aproximare a exponențialei:

$$e^{Ts} \approx 1 + sT \tag{5.6}$$

sau

$$e^{Ts} \approx \frac{1}{1 - sT}$$

respectiv

$$e^{Ts} \approx \frac{1 + s\frac{T}{2}}{1 - s\frac{T}{2}} \text{ (metoda trapezelor).}$$

Ecuațiile cu diferențe pentru algoritmi PID de reglare se pot obține fie direct din ecuațiile diferențiale, fie din funcțiile de transfer $H_R(s)$ unde variabila s se înlocuiește cu aproximarea în Z a acesteia (relațiile (5.4) sau (5.5)).

La alegerea metodei de discretizare a algoritmilor PID se iau în considerație *precizia de aproximare* a algoritmului continuu, *complexitatea relațiilor* de calcul a parametrilor algoritmului și *capacitatea de structurare* a algoritmului în vederea implementării cu *flexibilitate ridicată*.

Este ușor de observat că metoda trapezelor aproximează mai bine integrala și are avantajul că semiplanul stâng al planului s este transformat în interiorul cercului unitar.

Utilizarea metodei Euler de aproximare poate conduce la instabilitate, un sistem continuu stabil poate fi transformat într-un sistem discret instabil. Aproximarea pe baza diferenței înapoi asigură totdeauna conservarea stabilității sistemului după transformare.

5.2. Algoritmul PID de poziție și incremental

Algoritmul PID ideal este descris de ecuația:

$$u(t) = K_R\left[\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i}\int \varepsilon(\tau)d\tau + T_d\frac{d\varepsilon}{dt}\right] \tag{5.7}$$

unde K_R, T_i și T_d au semnificația dată în capitolul 4.

Folosind metoda dreptunghiurilor pentru aproximarea integralei în (5.7), obținem:

$$u_k = K_R\left[\varepsilon_k + \frac{I_{k-1}}{T_i} + \frac{T}{T_i}\varepsilon_{k-1} + \frac{T_d}{T}\left(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}\right)\right] \tag{5.8}$$

sau

$$u_k = K_R\left[\varepsilon_k + \frac{I_{k-1}}{T_i} + \frac{T}{T_i}\varepsilon_k + \frac{T_d}{T}\left(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}\right)\right].$$

De remarcat faptul că în ambele cazuri, pentru a obține comanda la pasul curent este necesară cunoașterea componentei I_{k-1}, deci algoritmul trebuie inițializat. Aici, I_{k-1} reprezintă valoarea integralei până la momentul t_{k-1}.

Relația (5.8) poate fi pusă și sub forma:

$$u_k = K_R\left[\varepsilon_k + \frac{T}{T_i}\sum_{1}^{k}\varepsilon_i + \frac{T_d}{T}\left(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}\right)\right] \tag{5.9}$$

respectiv

$$u_k = K_R\left[\varepsilon_k + \frac{T}{T_i}\sum_{0}^{k-1}\varepsilon_i + \frac{T_d}{T}\left(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}\right)\right].$$

Algoritmul în forma (5.8) sau (5.9) este cunoscut sub denumirea de algoritm PID de poziție.

Pentru a elimina neajunsul algoritmului de poziție, care trebuie inițializat, vom obține comanda sub formă incrementală pornind de la relația:

$$u_{k-1} = K_R\left[\varepsilon_{k-1} + \frac{T}{T_i}\sum_{1}^{k-1}\varepsilon_i + \frac{T_d}{T}\left(\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_{k-2}\right)\right] \tag{5.10}$$

Dacă din (5.9) se scade relația (5.10) se obține:

$$u_k = u_{k-1} + q_0\varepsilon_k + \varepsilon_1\varepsilon_{k-1} + q_2\varepsilon_{k-2} \tag{5.11}$$

sau

$$u_k = u_{k-1} + \sum_{i=0}^{2} q_i \varepsilon_{k-i}$$

unde coeficienţii q_0, q_1 şi q_2 se calculează cu relaţiile:

$$q_0 = K_R\left[1+\frac{T}{T_i}+\frac{T_d}{T}\right]$$

$$q_1 = -K_R\left[1+2\frac{T_d}{T}\right] \tag{5.12}$$

$$q_2 = K_R\frac{T_d}{T}$$

De remarcat faptul că în acest caz algoritmul nu mai trebuie iniţializat, comanda se generează sub forma unui increment:

$$\Delta u_k = u_k - u_{k-1} = q_0\varepsilon_k + \varepsilon_1\varepsilon_{k-1} + \varepsilon_2\varepsilon_{k-2} \tag{5.13}$$

iar amplitudinea incrementului poate fi controlată prin valorile parametrilor q_0, q_1 şi q_2, respectiv K_R, T_i, T_d şi T.

Algoritmul descris prin (5.11) este cunoscut sub denumirea de *algoritm PID incremental.* Acest algoritm este uşor compatibil cu elemente de execuţie de tip integral.

De remarcat faptul că utilizarea algoritmilor incrementali sau de viteză pentru comanda elementelor de execuţie de tip integrator asigură controlul vitezei medii sau momentane a elementelor de execuţie care, prin integrare de către acestea, devine increment de poziţie.

În cazul elementelor de execuţie de tip proporţional, utilizarea algoritmilor de poziţie asigură controlul poziţiei (ieşirii) elementului de execuţie.

Algoritmul PID incremental poate fi descris şi prin funcţia de transfer:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}}{1-z^{-1}} \tag{5.14}$$

unde $z^{-1}=e^{-sT}$, având în vedere (5.13) şi definiţia funcţiei de transfer.

Modelul (5.14) se obţine imediat dacă se aplică transformata Z ecuaţiei cu diferenţe (5.11) care poate fi pusă şi sub forma:

$$u_k = \frac{q_0+q_1q^{-1}+q_2q^{-2}}{1-q^{-1}}\varepsilon_k \tag{5.15}$$

unde q^{-1} este operatorul de întârziere ($q^{-1}\varepsilon_k = \varepsilon_{k-1}$).

Acelaşi rezultat se obţine dacă în funcţia de transfer:

$$H_R(s) = K_R\left(1+\frac{1}{T_is}+T_ds\right)$$

se introduce $\frac{1}{s} \cong \frac{T}{1-z^{-1}}$:

$$H_R(z^{-1}) = K_R\left[1+\frac{T}{T_i}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{T_d}{T}\left(1-z^{-1}\right)\right] =$$

$$= K_R\left[\frac{T_iT\left(1-z^{-1}\right)+T^2+T_dT_i\left(1-z^{-1}\right)^2}{T_iT\left(1-z^{-1}\right)}\right]$$

sau

$$H_R(z^{-1}) = \frac{K_R\left(1+\frac{T}{T_i}+\frac{T_d}{T}\right)-\left(1+2\frac{T_d}{T}\right)K_Rz^{-1}+K_R\frac{T_d}{T}z^{-2}}{1-z^{-1}} \tag{5.16}$$

sau

$$H_R(z^{-1}) = \frac{q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}}{1-z^{-1}}$$

unde coeficienţii q_0, q_1 şi q_2 au aceeaşi semnificaţie ca în relaţia (5.12).

Un rezultat similar se obţine dacă se utilizează metoda Tustin de aproximare a integralei:

$$H_R(z^{-1}) = K_R\left[1+\frac{1}{T_i}\cdot\frac{T}{2}\cdot\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}+T_d\cdot\frac{2}{T}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right]$$

sau

$$H_R(z^{-1}) = K_R\left[\frac{2T_iT\left(1-z^{-2}\right)+T^2\left(1+z^{-1}\right)^2+4T_dT_i\left(1-z^{-1}\right)^2}{2T_iT\left(1-z^{-2}\right)}\right]$$

sau

$$H_R(z^{-1}) = \frac{q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}}{1+p_1z^{-1}+p_2z^{-2}} \tag{5.17}$$

unde coeficienţii q_i şi p_j se calculează cu relaţiile:

$$q_0 = K_R\left[1+\frac{T}{2T_i}+2\frac{T_d}{T}\right]$$

$$q_1 = K_R\left[\frac{T}{T_i}-4\frac{T_d}{T}\right]$$

$$q_2 = K_R\left[-1+\frac{T}{2T_i}+2\frac{T_d}{T}\right]$$

$$p_1 = -2$$

$$p_2 = 1.$$

De remarcat faptul că algoritmul în formă discretă conține un integrator:

$$\lim_{z\to 1} H_R(z) = \infty \quad (p_1 + p_2 = -1).$$

Algoritmul obținut este un algoritm recurent de ordinul doi a cărui ecuație cu diferențe are forma:

$$u_k = \frac{q_0 + q_1 q^{-1} + q_2 q^{-2}}{1 + p_1 q^{-1} + p_2 q^{-2}} \varepsilon_k$$

sau

$$u_k + p_1 u_{k-1} + p_2 u_{k-2} = q_0 \varepsilon_k + q_1 \varepsilon_{k-1} + q_2 \varepsilon_{k-2} \tag{5.18}$$

5.3. Algoritm PID cu filtrare

În cazul utilizării unui algoritm PID real descris prin funcția de transfer:

$$H_R(s) = K_R \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)\left(\frac{T_d s + 1}{\alpha T_d s + 1}\right) \tag{5.19}$$

echivalentul discret obținut prin utilizarea metodei dreptunghiurilor este un algoritm recurent de ordinul doi:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2}} \tag{5.20}$$

unde coeficienții q_i și p_j se calculează cu relațiile:

$$q_0 = \frac{K_R (T - T_i)(T - T_d)}{T_i (\alpha T_d - T)}$$

$$q_1 = \frac{K_R T (T_i + T_d) - 2 K_R T_i T_d}{T_i (\alpha T_d - T)}$$

$$q_2 = \frac{K_R T_d}{\alpha T_d - T} \tag{5.21}$$

$$p_1 = \frac{T - 2\alpha T_d}{\alpha T_d - T}$$

$$p_2 = \frac{\alpha T_d}{\alpha T_d - T}.$$

Expresiile (5.21) evidențiază că discretizarea prin metoda trapezelor conduce la relații de calcul ale coeficienților p_j mai complexe. Structura algoritmului recurent de ordin doi (5.20) prezintă flexibilitate redusă la implementare și dificultăți în ceea ce privește evidențierea diferitelor regimuri de funcționare și moduri de lucru.

Cea mai simplă realizare a algoritmului (5.20) în vederea implementării este prezentată în figura 5.4.

De menționat că schema din figura 5.4 nu corespunde unei realizări sistemice minimale, însă evidențiază modalitatea de a calcula comanda pe baza informațiilor disponibile, modelul utilizat fiind cauzal.

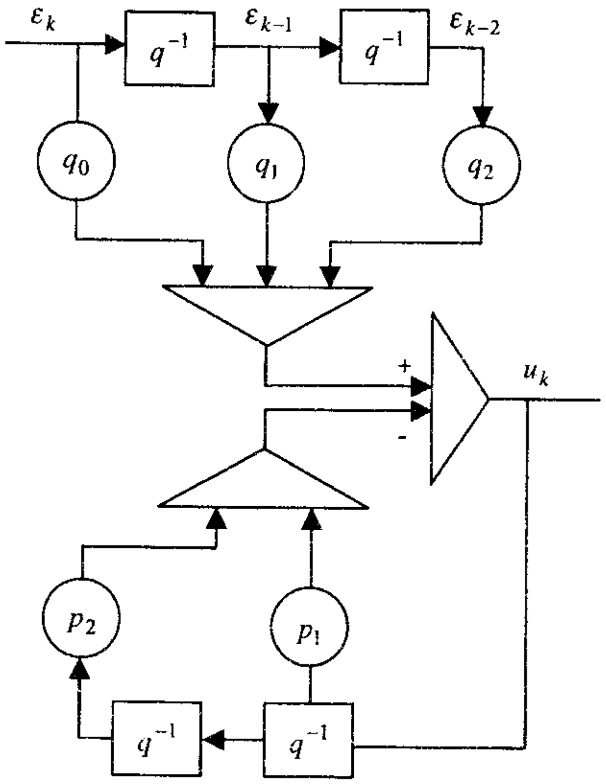


Fig. 5.4

Este uşor de remarcat faptul că pentru elaborarea comenzii u_k sunt necesare 5 operaţii de înmulţire, 11 adrese de memorie pentru variabilele ε_k, ε_{k-1}, ε_{k-2}, u_k, u_{k-1}, u_{k-2} şi pentru coeficienţii p_j şi q_i.

O uşoară relaxare a necesarului de memorie se obţine dacă se apelează la realizarea din figura 5.5.

Relaţiile de calcul a variabilelor ce intervin în cadrul algoritmului sunt:

$$\begin{aligned} u_k &= q_0 x_0 + q_1 x_1 + q_2 x_2 \\ x_0 &= \varepsilon_k - p_1 x_1 - p_2 x_2 \\ x_1 &= x_0 q^{-1} \\ x_2 &= x_1 q^{-1} \end{aligned} \tag{5.22}$$

unde q^{-1} reprezintă operatorul de întârziere ($q^{-1}u_k = u_{k-1}$).

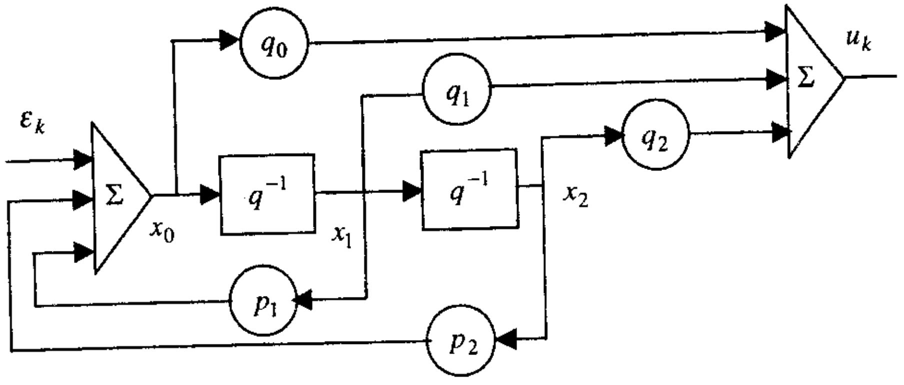


Fig. 5.5

Un algoritm recurent de ordinul n se obţine similar dacă se consideră:

$$H_R(s) = \frac{Q_R(s)}{P_R(s)}$$

cu dimensiunea polinomului $P_R(s)$ egală cu n şi se înlocuieşte operatorul de integrare $\frac{1}{s} \cong \frac{T}{2} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$ (metoda Tustin sau a trapezului).

Forma generală a algoritmului recurent de ordinul n este:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \cdots + q_n z^{-n}}{1 + p_1 z^{-1} + \cdots + p_n z^{-n}} \tag{5.23}$$

sau

$$u_k = \sum_{i=0}^{n} q_i \varepsilon_{k-i} - \sum_{j=1}^{n} p_j u_{k-j} \tag{5.24}$$

O realizare canonică a acestui algoritm este prezentată în figura 5.6.

Din această structură se deduce cu uşurinţă necesarul de memorie pentru implementare şi timpul necesar pentru elaborarea comenzii. De remarcat că $\varepsilon_k = r_k - y_k$ se generează la fiecare achiziţie a variabilei din proces.

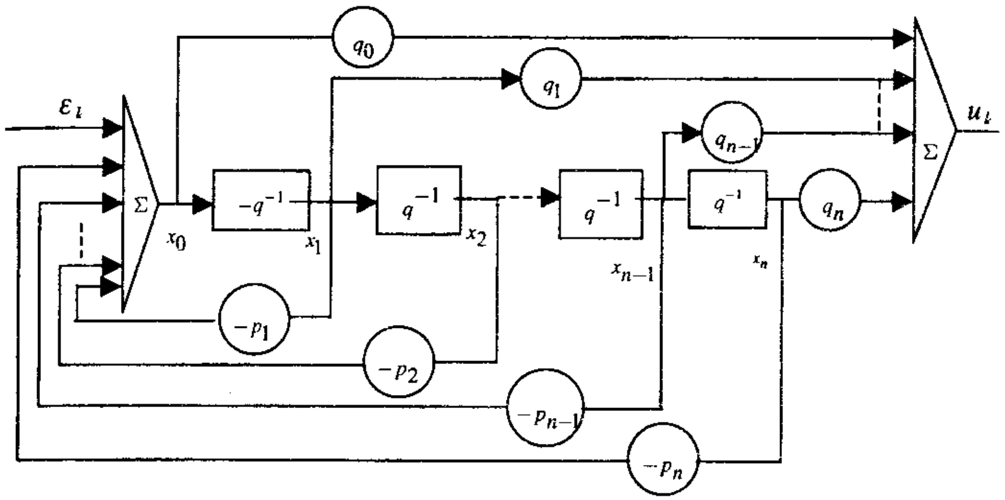


Fig. 5.6

O altă modalitate de discretizare a algoritmului PID cu filtrare presupune structurarea algoritmului sub forma unor module standard P, I şi PD cu filtrare (fig. 5.7).

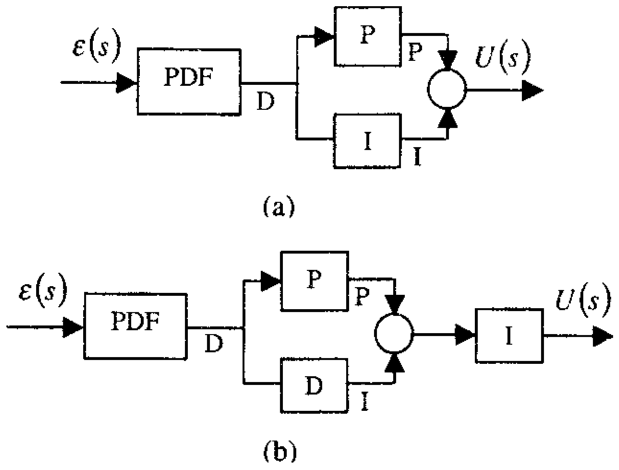


Fig. 5.7

Utilizarea structurilor modulare din figura 5.7 permite obţinerea unui algoritm numeric uşor de implementat pe cale numerică cu ridicată flexibilitate şi reale facilităţi pentru considerarea diferitelor regimuri de

funcţionare şi moduri de lucru. Astfel, dacă se determină echivalentul discret al fiecărui modul din structura 5.7, obţinerea comenzii pentru diferite legi de reglare este posibilă prin configurarea corespunzătoare a algoritmului.

Ecuaţia diferenţială ce caracterizează componenta PDF este:

$$\alpha T_d \frac{dD}{dt} + D(t) = T_d \frac{d\varepsilon}{dt} + \varepsilon(t) \tag{5.25}$$

unde $D(t)$ este ieşirea modulului PDF.

Echivalentul discret al acestui modul (reţea de anticipaţie-întârziere) se obţine apelând la metoda dreptunghiurilor pentru aproximarea integralei:

$$\alpha T_d \frac{D_k - D_{k-1}}{T} + D_k = T_d \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}}{T} + \varepsilon_k \tag{5.26}$$

După unele operaţii simple (5.26) poate fi pusă sub forma:

$$D_k = D_{k-1} + \frac{T_d}{\alpha T_d + T}\left(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}\right) + \frac{T}{\alpha T_d + T}\left(\varepsilon_k - D_{k-1}\right) \tag{5.27}$$

Componenta proporţională este dată de relaţia:

$$P_k = K_R D_k \tag{5.28}$$

iar componenta integrală se obţine prin metoda dreptunghiurilor sub forma:

$$I_k = I_{k-1} + K_R \frac{T}{T_i} D_k \tag{5.29}$$

Comanda u_k se obţine ca suma

$$u_k = P_k + I_k \tag{5.30}$$

Pentru implementarea acestui algoritm se pot lua în consideraţie diferite regimuri de funcţionare şi moduri de lucru, precum şi diverse structuri (fig. 5.8).

În funcţie de poziţia comutatorului C_0 (1, 0, 2) se poate fixa referinţa de la calculator, prin intermediul operatorului uman sau de la alt regulator în regim de funcţionare în cascadă.

Comutatorul C_1 permite utilizarea unui algoritm cu structură variabilă şi cu două grade de libertate, ieşirea măsurată y_k este prelucrată după o lege PID iar referinţa după o lege PI, dacă poziţia comutatorului este „0“, sau cu un singur grad de libertate dacă poziţia comutatorului C_1 este „1“.

Comutatorul C_2 permite trecerea mărimii de comandă de la modul de lucru AUTOMAT (poziţia „1“ a comutatorului) la modul de lucru MANUAL (poziţia „0“) sau la modul de lucru CALCULATOR (poziţia „2“).

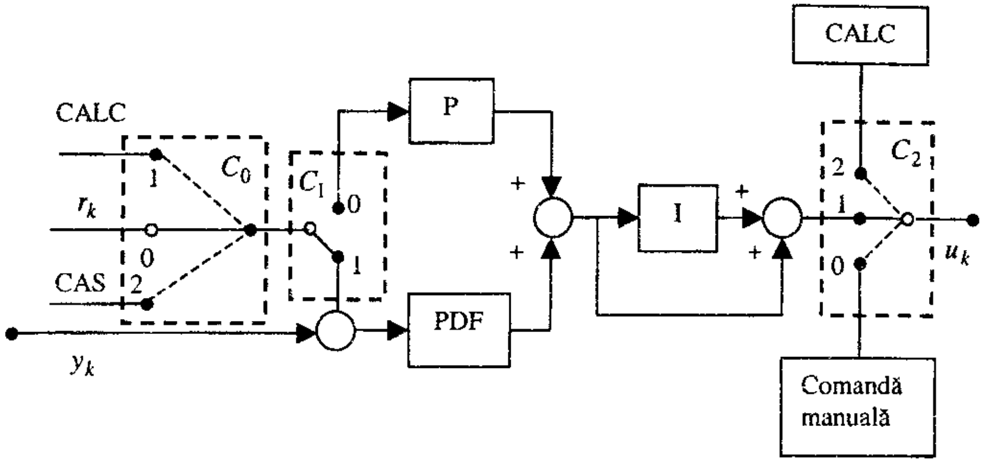


Fig. 5.8

O asemenea structurare a algoritmului evidenţiază o ridicată flexibilitate la implementare. Problemele specifice implementării sunt prezentate în § 5.6.

5.4. Algoritmi PID modificaţi

Există mai multe variante de algoritmi PID modificaţi: PI-D, I-PD sau PID cu două grade de libertate (§ 4.1). Se consideră algoritmii care prelucrează diferit variabilele de intrare (referinţă, eroare şi ieşirea măsurată).

În cazul general al plasării componentei derivative pe calea de reacţie şi a componentei PI pe calea directă se obţine legea de reglare:

$$U(s) = K_R\left[1 + \frac{1}{T_i s}\right]R(s) - K_R\left[1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{\alpha T_d s + 1}\right]Y(s)$$

sau

$$U(s) = H_{R_1}(s)\cdot R(s) - H_{R_2}(s)\cdot Y(s) \tag{5.31}$$

Cele două blocuri de reglare pot fi obţinute în formă numerică simplu, apelând la una din metodele de discretizare menţionate în § 5.1:

$$H_{R_1}\left(z^{-1}\right) = K_R\left[1 + \frac{T}{T_i}\cdot\frac{1}{1 - z^{-1}}\right] \tag{5.32}$$

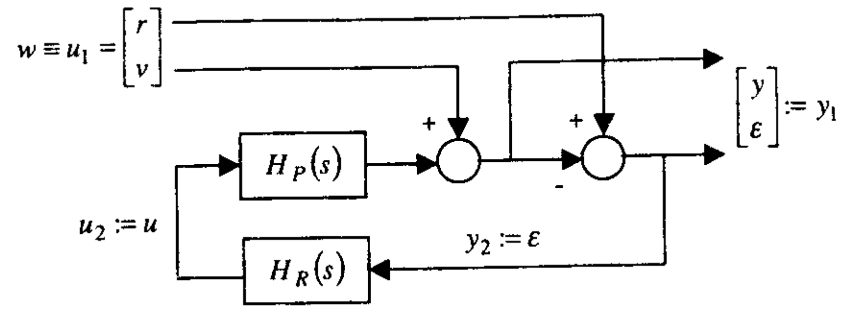


Fig. 6.6

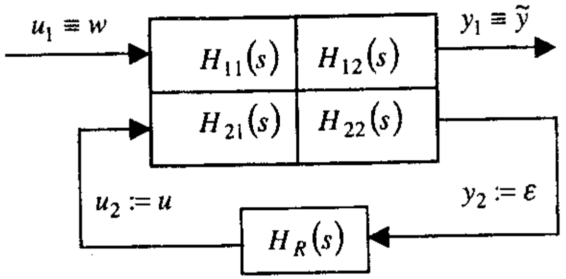


Fig. 6.7

Semnificația matricelor H_{ij} din figura 6.7 este ușor de evidențiat ținând seama de notații și de cele două structuri echivalente din figurile 6.6 și 6.7:

$$\begin{bmatrix} y \\ \varepsilon \end{bmatrix} = y_1 \equiv \tilde{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & H_P \\ 1 & -1 & -H_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ v \\ u \end{bmatrix} \qquad (6.20)$$

$$\varepsilon \equiv y_2 = [1 \;\; -1 \vdots \;\; H_P]$$

sau

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \vdots & H_P \\ 1 & -1 & \vdots & -H_P \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -1 & \vdots & -H_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ v \\ \cdots \\ u \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ \\ u_2 \end{matrix} . \qquad (6.21)$$

Din (6.21) rezultă:

$$H_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \; H_{12} = \begin{bmatrix} H_P \\ -H_P \end{bmatrix}$$

$$H_{21} = [1 \;\; -1], \; H_{22} = -H_P \qquad (6.22)$$

Relația intrare-ieșire pentru sistemul prezentat în figura 6.7 se obține cu ușurință ținând seama că $u_2 = H_R \cdot y_2$:

$$\tilde{y} = y_1 = \left[H_{11} + H_{12}H_R(1 - H_{22}H_R)^{-1}H_{21}\right]u_1$$

adică

$$T = H_{y_1u_1} = H_{11} + H_{12}H_R(1 - H_{22}H_R)^{-1}H_{21}. \qquad (6.23)$$

Ținând seama de (6.21) se obține:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_P \\ -H_P \end{bmatrix} H_R(1 + H_PH_R)^{-1}[1 \;\; -1]$$

sau

$$T \equiv H_{\tilde{y}w} = \begin{bmatrix} H_d(1+H_d)^{-1} & 1 - H_d(1+H_d)^{-1} \\ 1 - H_d(1+H_d)^{-1} & -\left(1 - H_d(1+H_d)^{-1}\right) \end{bmatrix} \qquad (6.24)$$

adică exact matricea de transfer atașată sistemului cu ieșirea $\tilde{y}$ și intrarea w.

Pentru evaluarea efectului mărimilor exogene w asupra ieșirii de calitate (reglată) reprezentată prin vectorul $\tilde{y} \equiv y_1$ se poate scrie:

$$\tilde{y} = T(s) \cdot w. \qquad (6.25)$$

O posibilitate pentru evaluarea performanțelor unui sistem de reglare automată este aceea de a evalua norma unei funcții de transfer $H(s)$ în cazul monovariabil:

$$\|H\|_\infty := \sup_\omega |H(j\omega)| \qquad (6.26)$$

în ipoteza că „$H(s)$ nu are poli pe axa imaginară“, unde numărul pozitiv $\|H\|_\infty$ se numește *norma în sens* L^∞ a funcției de transfer $H(s)$ și reprezintă distanța maximă de la origine la punctele locului de transfer $H(j\omega)$ (care nu are ramuri la infinit datorită ipotezei că nu are poli în origine).

O a doua posibilitate de evaluare a intensității transferului $w \to \tilde{y}$ dacă funcția de transfer este strict proprie și nu are poli în origine, presupune apelarea la norma funcției de transfer:

$$\|H\|_2^2 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(-j\omega)H(j\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega \qquad (6.27)$$

care se numește norma în sens L^2 a funcției de transfer $H(s)$.

În cazul sistemelor cu mai multe intrări și mai multe ieșiri – unde u_1, u_2, y_1, y_2 sunt vectori cu dimensiunile m_1, m_2, p_1, p_2, reprezentând corespunzător mărimile exogene, de comandă, reglată și măsurată, – generalizarea rezultatelor de la sistemele monovariabile este imediată:

$$H_s(s) = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \qquad (6.28)$$

$$H_{R_2}\left(z^{-1}\right)=K_R\left[1+\frac{T}{T_i}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{T_d}{\alpha T_d+\dfrac{T}{1-z^{-1}}}\right]$$

$$H_{R_2}\left(z^{-1}\right)=K_R\left[1+\frac{T}{T_i}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{T_d\left(1-z^{-1}\right)}{T+\alpha T_d\left(1-z^{-1}\right)}\right] \qquad (5.33)$$

După efectuarea unor operaţii elementare de calcul se poate obţine:

$$u_k=\frac{T\left(q^{-1}\right)}{R\left(q^{-1}\right)}r_k-\frac{S\left(q^{-1}\right)}{R\left(q^{-1}\right)}y_k \qquad (5.34)$$

sau

$$u_k=\sum_0^2 t_i r_{k-i}-\sum_0^2 s_n y_{k-n}-\sum_1^2 r_j u_{k-j}$$

unde polinoamele $R\left(q^{-1}\right)$, $S\left(q^{-1}\right)$ şi $T\left(q^{-1}\right)$ se obţin cu uşurinţă din (5.32) şi (5.33) după trecerea în domeniul timp:

$$\begin{aligned} T\left(q^{-1}\right)&=t_0+t_1q^{-1}+t_2q^{-2}\\ R\left(q^{-1}\right)&=1+r_1q^{-1}+r_2q^{-2}\\ S\left(q^{-1}\right)&=s_0+s_1q^{-1}+s_2q^{-2}\end{aligned} \qquad (5.35)$$

Coeficienţii t_i, r_j şi s_n se calculează în funcţie de parametrii algoritmului în formă continuă K_R, T_i, T_d, α şi de T. (exerciţiu elementar pentru cititor)

Structura comenzii (5.34) evidenţiază un algoritm cu două grade de libertate sau aşa numita formă canonică de reglare (R, S, T).

Desigur diversele variante de algoritmi PID modificaţi pot fi luate în consideraţie pentru obţinerea formei echivalente discrete, însă în toate cazurile se obţine o structură standard de regulator cu două grade de libertate cu diferite polinoame $R\left(q^{-1}\right)$, $S\left(q^{-1}\right)$ şi $T\left(q^{-1}\right)$.

O posibilă realizare a acestui tip de algoritm în vederea implementării este prezentată în figura 5.9.

De menţionat că la punerea în funcţie a unui asemenea algoritm se impune prudenţă la iniţializarea stărilor pentru a evita generarea unor comenzi de valori care depăşesc domeniul de lucru admis.

O variantă de algoritm PID modificat presupune ponderarea referinţei cu un coeficient β iar componenta derivativă este filtrată cu o constantă de timp de α ori mai mică decât constanta de timp asociată componentei derivative.

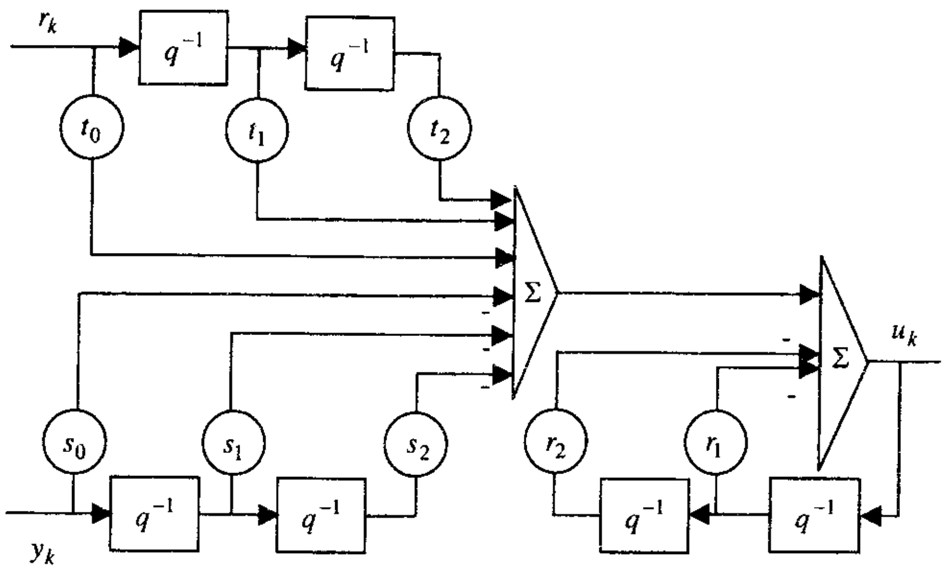


Fig. 5.9

Forma continuă a acestui algoritm este:

$$U(s)=K_R\left[\beta R(s)-Y(s)+\frac{1}{T_is}\left(R(s)-Y(s)\right)-\frac{sT_d}{1+s\alpha T_d}Y(s)\right] \qquad (5.36)$$

sau

$$U(s)=K_R\left[\beta-\frac{1}{T_is}\right]R(s)-K_R\left[1+\frac{1}{T_is}+\frac{sT_d}{1+s\alpha T_d}\right]Y(s) \qquad (5.37)$$

Dacă se apelează la o metodă de discretizare se obţine cu uşurinţă forma canonică R, S, T:

$$u_k=\frac{T\left(q^{-1}\right)}{R\left(q^{-1}\right)}r_k-\frac{S\left(q^{-1}\right)}{R\left(q^{-1}\right)}y_k$$

unde polinoamele $R\left(q^{-1}\right)$, $S\left(q^{-1}\right)$ şi $T\left(q^{-1}\right)$ capătă diverse forme în funcţie de metoda de discretizare folosită.

Dacă folosim metoda dreptunghiurilor şi ţinem seama că cele trei componente ale algoritmului PID modificat cu ponderarea referinţei sunt:

$$P(t)=K_R\left(\beta r(t)-y(t)\right)$$

$$I(t)=\frac{K_R}{T_i}\int_0^t\varepsilon(\tau)\,d\tau$$

$$\alpha T_d \frac{dD}{dt} + D(t) = -K_R T_d \frac{dy}{dt}$$

se obține comanda discretă sub forma:

$$u_k = P_k + I_k + D_k \tag{5.38}$$

unde

$$\begin{aligned} P_k &= K_R(\beta r_k - y_k) \\ I_k &= I_{k-1} + \frac{K_R T}{T_i}\varepsilon_k \\ D_k &= \frac{\alpha T_d}{\alpha T_d + T} D_{k-1} - \frac{K_R T_d}{\alpha T_d + T}(y_k - y_{k-1}) \end{aligned} \tag{5.39}$$

Din (5.38) și (5.39) se obține:

$$u_k = K_R[\beta r_k - y_k] + I_{k-1} + \frac{K_R T}{T_i}(r_k - y_k) + $$
$$+ \frac{\alpha T_d}{\alpha T_d + T} D_{k-1} - \frac{K_R T_d}{\alpha T_d + T}(y_k - y_{k-1})$$

sau

$$u_k = K_R\left(\beta + \frac{K_R T}{T_i}\right) r_k - K_R\left(1 + \frac{T}{T_i} + \frac{T_d}{\alpha T_d + T}\right) y_k + $$
$$+ K_R \frac{T_d}{\alpha T_d + T} y_{k-1} + I_{k-1} + \frac{\alpha T_d}{\alpha T_d + T} D_{k-1} \tag{5.40}$$

O formă compactă, fără a evidenția cele trei componente, se obține dacă în (5.37) se folosește aproximarea $\frac{1}{s} \cong \frac{T}{1-z^{-1}}$:

$$U(z) = K_R\left[\beta - \frac{T}{T_i}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}}\right] R(z) - K_R\left[1 + \frac{T}{T_i}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{T_d}{\frac{T}{1-z^{-1}} + \alpha T_d}\right] Y(z) \tag{5.41}$$

După operații elementare se obține forma polinoamelor $R(z^{-1})$, $S(z^{-1})$ și $T(z^{-1})$:

$$U(z^{-1}) = K_R \frac{\left[\beta(1-z^{-1}) - \frac{T}{T_i}\right]\left[T + \alpha T_d(1-z^{-1})\right]}{(1-z^{-1})\left[T + \alpha T_d(1-z^{-1})\right]} R(z^{-1}) -$$
$$-K_R \frac{\left[(1-z^{-1}) + \frac{T}{T_i}\right]\left[T + \alpha T_d(1-z^{-1})\right] + T - T_d(1-z^{-1})^2}{(1-z^{-1})\left[T + \alpha T_d(1-z^{-1})\right]} Y(z^{-1})$$

sau

$$U(z^{-1}) = \frac{t_0 + t_1 z^{-1} + t_2 z^{-2}}{1 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2}} R(z^{-1}) - \frac{s_0 + s_1 z^{-1} + s_2 z^{-2}}{1 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2}} Y(z^{-1}) \tag{5.42}$$

Din (5.42) rezultă că algoritmul PID modificat este un algoritm recurent de ordinul doi în formă canonică. Coeficienții r_i, t_j, s_n ai polinoamelor ce definesc algoritmul se calculează cu ușurință în funcție de parametrii algoritmului continuu K_R, T_i, T_d, α, β și T.

5.5. Alegerea perioadei de discretizare

Algoritmii de reglare obținuți prin discretizarea algoritmilor continui au în general performanțe inferioare ca urmare a aproximării componentelor integrală și derivativă și, evident, ca urmare a pierderii de informație în procesul de eșantionare și cuantizare. Pentru alegerea perioadei de discretizare sunt recomandate, cel mai adesea pe baza experienței, relații ce definesc raportul între T și T_i, respectiv T și T_d. Regulatoarele numerice industriale destinate reglării unui număr redus de mărimi din proces folosesc o perioadă de discretizare fixată de ordinul 200 ms. O alegere a perioadei T în jur de (100-200) ms determină o comportare cvasicontinuă a algoritmului de reglare. În acest caz pot fi extinse metodele de acordare cunoscute din domeniul sistemelor de reglare continue.

Este de remarcat faptul că valori foarte mici ale perioadei T (frecvențe mari de eșantionare) asigură o bună aproximare a algoritmului de reglare, însă costurile interfeței de proces sunt ridicate, numărul buclelor de reglare realizate cu un singur regulator este redus iar complexitatea algoritmilor implementați este limitată.

În cazul în care T este mai mare, pierderea de informaţie în procesul de eşantionare determină o precizie redusă în comportarea sistemului de reglare, perturbaţiile pot determina apariţia oscilaţiilor între momentele de eşantionare fără ca informaţia să fie transmisă şi prelucrată de regulator.

Principalii factori ce trebuie luaţi în consideraţie la alegerea perioadei de discretizare sunt:

- performanţele dorite pentru sistemul de reglare;
- dinamica procesului şi spectrul de frecvenţă al perturbaţiilor;
- particularităţile elementului de execuţie şi a traductoarelor;
- complexitatea algoritmilor şi costul pentru fiecare buclă de reglare.

Este uşor de observat că alegerea perioadei de eşantionare T presupune o analiză atentă a mai multor factori al căror efect cel mai adesea este contradictoriu.

În cazul sistemelor de reglare cu regulatoare numerice sunt prezentate în literatură [6, 16, 36,43] recomandări privind alegerea perioadei T pentru diferite clase de procese şi diferite spectre de frecvenţă ce caracterizează perturbaţiile.

Dintre aceste recomandări reţinem:

- $T \cong (0.1 \div 0.3)T_i$ pentru regulatoare PI;
- $T \cong (0.3 \div 1)\tau$ sau $T \cong (0.1 \div 0.3)T_0$ pentru regulatoare PI acordate pe baza metodei Ziegler-Nichols şi procese cu timp mort;
- $T \cong \left(\frac{1}{6} \div \frac{1}{15}\right)t_t$, unde t_t reprezintă durata regimului tranzitoriu.

O metodă mult mai precisă pentru alegerea perioadei T are la bază banda de frecvenţă a sistemului de reglare (care trebuie realizat). Pornind de la faptul că un sistem de reglare cu regulator numeric are o comportare cvasicontinuă, performanţele fiind definite prin banda de frecvenţă ω_B, se poate alege o pulsaţie ω_s astfel încât semnalul discret de la intrarea SRA să poată fi refăcut la ieşire.

Ţinând seama de teorema lui Shanon [6, 16] se poate recomanda pentru alegerea perioadei T relaţia:

$$\omega_s \geq (2 \div 20)\,\omega_B$$

unde $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ reprezintă pulsaţia de eşantionare.

Cerinţele de performanţă impuse la urmărirea referinţei şi rejecţia perturbaţiilor sunt factori determinanţi la alegerea perioadei T. Cunoaşterea a priori a performanţelor elementelor de execuţie şi a traductoarelor, precum şi clasa de perturbaţii ce acţionează asupra procesului, reprezintă cerinţe primare ale alegerii corespunzătoare a perioadei T.

5.6. Acordarea algoritmilor numerici

Comportarea algoritmilor PID numerici obţinuţi prin discretizarea algoritmilor PID continui este foarte apropiată de comportarea algoritmilor continui dacă T este suficient de mic. În aceste condiţii pot fi extinse cu uşurinţă metodele de acordare din domeniul sistemelor continue la sistemele cu regulatoare numerice.

Pentru procese lente şi foarte lente cu timp mort, determinarea răspunsului indicial şi caracterizarea acestuia prin parametrii K_p, τ şi T_p (fig. 5.10) permit calculul parametrilor de acord conform tabelului 5.1.

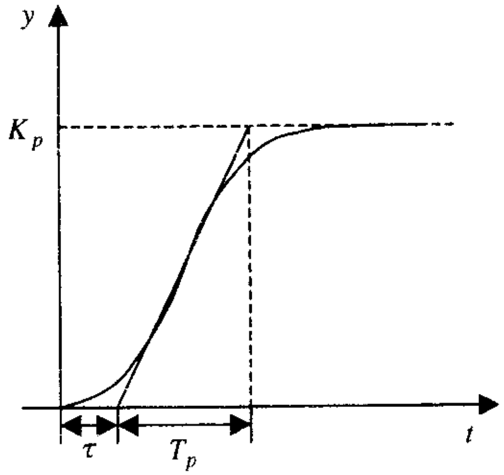


Fig. 5.10

Tabelul 5.1

Algoritm	K_R	T_i	T_d
P	$1/a$	–	–0
PI	$0.9/a$	3τ	–
PID	$1.2/a$	2τ	0.5τ

În tabelul 5.1, $a = \frac{\tau}{T_p}$.

Extinderea metodelor bazate pe comportarea SRA la limita de stabilitate conduce, de asemenea, la rezultate bune în acordarea algoritmilor numerici de tip PID.

În tabelul 5.2 se prezintă relațiile de calcul ale parametrilor de acord K_R, T_i și T_d în funcție de K_{R_0} și T_0 (v. § 4.4.2).

Factorul K_{R_0} reprezintă factorul de amplificare pentru care se atinge limita de stabilitate a SRA, iar T_0 reprezintă perioada oscilațiilor la limita de stabilitate.

Tabelul 5.2

Algoritm	K_R	T_i	T_d
P	$0.5K_{R_0}$	–	–
PI	$0.45K_{R_0}$	$T_0/1.2$	–
PID	$0.6K_{R_0}$	$T_0/2$	$T_0/8$

În literatură [6, 36, 43, 46] sunt prezentate relațiile de calcul ale parametrilor de acord pornind de la cerințe de performanță exprimate prin criterii sintetice de tipul IAE, ISE, ITAE.

De remarcat faptul că în unele relații de calcul se include timpul mort echivalent $\tau_e = \tau + \frac{T}{2}$ pentru partea continuă a SRA. Timpul mort echivalent este luat în calcule în măsura în care T are o valoare semnificativă, pornind de la faptul că elementul de eșantionare și reținere atașat părții continue a SRA este caracterizat prin funcția de transfer:

$$H_{EER}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{Ts}.$$

În domeniul frecvențelor, acest element evidențiază o întârziere pură egală cu $\frac{T}{2}$:

$$H_{EER}(j\omega) = \frac{1 - \cos\omega T + j\sin\omega T}{j\omega T} = \frac{\sin\omega T}{\omega T} - j\frac{1 - \cos\omega T}{\omega T}$$

sau

$$H_{EER}(j\omega) = \frac{\sin\frac{\omega T}{2}\cos\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} - j\frac{\sin^2\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} = \frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}\left(\cos\frac{\omega T}{2} - j\sin\frac{\omega T}{2}\right)$$

$$H_{EER}(j\omega) \cong \frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} e^{-j\frac{\omega T}{2}}.$$

Ținând seama că procesul este caracterizat prin funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{K_p e^{-\tau s}}{T_p s + 1}$$

rezultă cu ușurință timpul mort echivalent.

Timpul mort echivalent $\tau_e = \tau + \frac{T}{2}$ se calculează pentru o perioadă de discretizare care satisface condiția $\frac{\omega T}{2} < \pi$.

În tabelul 5.3 sunt date relațiile de calcul ale parametrilor de acord K_R, T/T_i și T_d/T pentru un algoritm PID modificat cu $\beta = 1$ [6, 36, 57].

Tabelul 5.3

Parametri	Acordarea pe baza răspunsului indiceal			Acordarea pe baza parametrilor la limita de stabilitate		
Tip algoritm	K_R	T/T_i	T_d/T	K_R	T/T_i	T_d/T
P	$\frac{T_p}{\tau + T}$	–	–	$\frac{K_{R_0}}{2}$	–	–
PI	$\frac{0.9T_p}{\tau + \frac{T}{2}} - \frac{0.135T_pT}{\left(\tau + \frac{T}{2}\right)^2}$	$\frac{0.27T_pT}{K_R\left(\tau + \frac{T}{2}\right)^2}$	–	$(0.45 - 0.27)\frac{K_{R_0}}{T_0}$	$0.54\frac{K_{R_0}}{K_R}\frac{T}{T_0}$	–
PID	$\frac{1.2T_p}{\tau + T} - \frac{0.3T_pT}{\left(\tau + \frac{T}{2}\right)^2}$	$\frac{0.6T_pT}{K_R\left(\tau + \frac{T}{2}\right)^2}$	$\frac{0.5T_p}{K_RT}$	$0.6K_{R_0}\frac{T}{T_0}$	$1.2\frac{K_{R_0}}{K_R}\frac{T}{T_0}$	$\frac{3}{40}\frac{K_{R_0}}{K_R}\frac{T_0}{T}$

Relațiile de acordare în funcție de perioada oscilațiilor T_0 și factorul de amplificare critic K_{R_0}, pentru care se obține limita de stabilitate a sistemului, sunt valabile pentru $T \le 2\tau$ și nu sunt recomandate pentru $T \cong 4\tau$.

Desigur, parametrii algoritmilor numerici pot fi determinați riguros prin metode de proiectare în condițiile în care modelul matematic atașat părții continue este cunoscut și criteriile de performanță sunt impuse. În acest caz pot fi utilizate metode bazate pe alocarea polilor, metode de optimizare parametrică, metode bazate pe răspuns impus etc.

În general, utilizarea algoritmilor PID implementați pe cale numerică presupune utilizarea unor metode de acordare cunoscute din domeniul sistemelor continue cu modificări nesemnificative, având în vedere că T este redus iar comportarea algoritmilor este cvasicontinuă.

5.7. Implementarea algoritmilor PID numerici

Pentru implementarea unui algoritm de reglare acesta trebuie astfel organizat, încât să includă toate facilitățile impuse unei bucle de reglare. Astfel, vor fi incluse în cadrul programului variabile de stare de configurare ce definesc diferite regimuri de funcționare, moduri de lucru, diferite tipuri de algoritmi cu luarea în considerație a fenomenelor de saturare a componentei integrale și a parametrilor de acord.

Înainte de a trece la organizarea algoritmului de reglare sub forma unui task (PID) parte componentă a unui program de reglare organizat pe taskuri, să evidențiem printr-un model toate regimurile și modurile de operare ale unui algoritm PID cu filtrare.

Astfel, algoritmul PID cu filtrare poate fi inclus ca algoritm cu un singur grad de libertate sau cu două grade de libertate în cazul în care componenta PD cu filtrare primește la intrare numai variabila măsurată din proces, cu moduri de operare AUTOMAT și MANUAL și regimuri de funcționare CALCULATOR și CASCADĂ.

Pentru a lua în considerație saturarea componentei integrale și saturarea elementului de execuție sau așa numitul efect „integrator windup" pot fi considerate mai multe căi. O posibilitate este aceea de a stopa integrarea când elementul de execuție atinge nivelul de saturare. O altă posibilitate este prezentată în figura 5.11, unde se include în jurul integratorului o reacție negativă în funcție de abaterea dintre ieșirea și intrarea elementului de execuție.

Eroarea e_s definită ca diferența între ieșirea elementului de execuție m și ieșirea regulatorului v este egală cu zero atâta timp cât EE nu este saturat.

Prin reacție negativă în jurul integratorului se urmărește anularea erorii e_s prin resetarea integratorului, astfel încât ieșirea regulatorului este la saturare. Resetarea integratorului se realizează la o valoare corespunzătoare cu o dinamică determinată de constanta de timp de urmărire T_t. Avantajul acestei scheme pentru eliminarea efectului de saturare (*antiwindup*) constă în posibilitatea de generalizare pentru orice tip de element de execuție.

În cazul în care ieșirea elementului de execuție nu este măsurabilă, acesta poate fi modelat și un semnal echivalent poate fi generat de model pentru a calcula eroarea e_s. Este ușor de remarcat faptul că la implementarea numerică a algoritmului sub forma unui program de reglare se impune luarea în considerație a structurii *antiwindup* prezentată în figura 5.11.

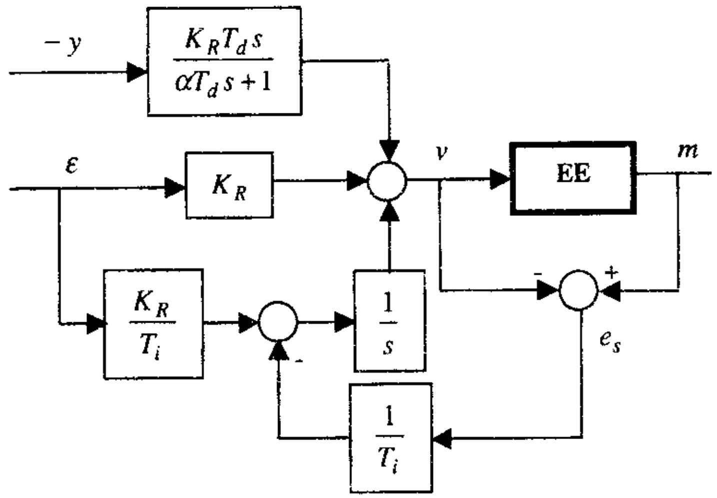


Fig. 5.11

Practic, toate regulatoarele PID pot funcționa în două moduri: MANUAL (M) și AUTOMAT (A). În modul MANUAL, ieșirea regulatorului este generată de operator prin acțiuni corespunzătoare de creștere sau scădere. Regulatoarele pot funcționa în cascadă cu alte regulatoare sau cu alte elemente neliniare multiplicatoare sau selectoare, respectiv pot funcționa în regim CALCULATOR cu fixarea referinței de la nivelul ierarhic superior sau comanda este calculată la nivelul superior și transmisă elementului de execuție. În acest ultim caz regulatorul este, fie în regim de stație de rezervă, fie este defect.

În timpul funcționării regulatorului este posibilă cerința de ajustare a parametrilor de acord.

Pentru evitarea apariției unor șocuri în funcționarea procesului controlat ca urmare a ieșirii comenzii din domeniul admisibil la comutarea modurilor și regimurilor de funcționare, precum și la modificarea parametrilor, se impune la implementarea algoritmului includerea unor funcții de echilibrare a comenzii.

Astfel, la trecerea de la modul M la modul A se impune a verifica dacă valoarea de ieșire a integratorului este corectă în momentul comutării. Acest fenomen este cunoscut ca transfer fără șocuri (bumpless transfer). În figura 5.12 sunt prezentate variante de algoritmi și modalități de realizare a comutării fără șocuri. Comanda manuală este generată prin intermediul unității de comandă manuală (UCM).

Compensarea unor poli sau zerouri ale procesului caracterizat printr-un model $H_P(s)$ care conține incertitudini structurale și parametrice, cu valabilitate limitată în vecinătatea punctului de funcționare, este inadmisibilă din punctul de vedere al cerinței de stabilitate a SRA.

Polinomul caracteristic conține acele singularități incluse în $\alpha_r(s)$ și $\alpha_p(s)$ care generează instabilitatea SRA, deși formal funcția de transfer a căii directe este într-o formă simplificată.

În aceste condiții se recomandă construcția unei funcții de transfer $H_d(s)$ pornind de la performanțe, astfel încât să nu se compenseze eventualele singularități instabile ale procesului condus. Pot fi compensați cu precauție anumiți poli stabili ai procesului, cu condiția ca aceștia să nu se încadreze printre incertitudinile parametrice ale modelului atașat procesului condus.

Cea de a două cerință de performanță se referă la comportarea în regim staționar (permanent). Este cunoscut faptul că orice SRA trebuie să asigure urmărirea referinței și rejectarea perturbațiilor.

Atingerea acestor obiective presupune o anumită formă a funcțiilor de transfer $H_d(s)$ și $H_0(s)$. Pentru o clasă precizată de mărimi exogene (referință, perturbații) definită prin:

$$W = \left\{ w \,\middle|\, w(s) = \frac{\alpha(s)}{\beta_w(s)},\ \forall\alpha(s),\ \partial[\alpha(s)] \le \partial[\beta_w(s)] \right\} \tag{6.14}$$

unde

$$\beta_w(s) = \beta_0 + \beta_1 s + \ldots\ldots\beta_{q-1}s^{q-1} + s^q \tag{6.15}$$

este polinomul ce determină clasa mărimilor exogene, iar prin fixarea unui $\alpha(s)$ se alege un element din clasa mărimilor exogene. Pentru mărimi exogene persistente se admite implicit că polinomul $\beta_w(s)$ este instabil.

Pentru structura prezentată în figura 6.5, eroarea $\varepsilon(s)$ se calculează cu relația:

$$\varepsilon(s) = \frac{1}{1+H_d(s)} \cdot R(s) \text{ sau } \varepsilon(s) = -\frac{1}{1+H_d} \cdot V(s) \tag{6.16}$$

sau

$$\varepsilon(s) = S(s) \cdot \frac{\alpha(s)}{\beta_w(s)} \tag{6.17}$$

Rezultă cu ușurință din (6.16) și (6.17) condiția pentru a obține precizia dorită $\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = 0$, prezența în funcția de sensibilitate a unui număr de zerouri în origine mai mare decât dimensiunea q a polinomului $\beta_w(s)$.

Cele două condiții referitoare la *stabilitate* și la *precizie* vor fi completate cu o nouă condiție privind realizarea algoritmului de reglare. De remarcat faptul că cerința de precizie impune includerea în funcția de transfer atașată regulatorului a modelului mărimilor exogene. Astfel, pentru semnale de tip treaptă, rampă sau parabolă, $H_R(s)$ trebuie să conțină un număr de poli în origine egal cu q ($q = 1$ pentru treaptă, $q = 2$ pentru rampă și $q = 3$ pentru parabolă).

În aceste condiții rezultă o structură de algoritm implementabil dacă $e_0 \ge e_p$. Această condiție rezultă din analiza relației:

$$H_R(s) = H_p^{-1}(s) . H_d(s) \tag{6.18}$$

sau

$$H_R(s) = H_p^{-1} \cdot \frac{H_0(s)}{1-H_0(s)} \tag{6.19}$$

ținând seama că $e_0 \equiv e_d$ iar $e_p = \partial[A_p(s)] - \partial[B_p(s)]$, unde prin e_p s-a notat excesul polilor față de zerourile funcției de transfer $H_P(s)$, iar prin e_0 s-a notat excesul polilor față de zerourile funcției de transfer $H_0(s)$.

Obținerea funcției de transfer $H_R(s)$ presupune satisfacerea a două cerințe:

- cerința funcțională (stabilitate, precizie, performanțe tranzitorii);
- cerința structurală ($e_0 \ge e_p$, cu luarea în considerație a incertitudinilor structurale și parametrice ale modelului atașat procesului condus).

Pentru construcția funcției de transfer $H_d(s)$ se va avea în vedere includerea modelului intern al exogenului în structura regulatorului pentru asigurarea regimului permanent dorit al sistemului.

6.3. Problematica proiectării în frecvență

Pornind de la structura generală a SRA prezentat în figura 6.6, obținută din figura 6.5 cu o evidențiere a mărimilor exogene $W = [r,v]^T$ și a mărimilor de calitate $[y,\varepsilon]^T$, se obține reprezentarea generală a SRA, ca în figura 6.7.

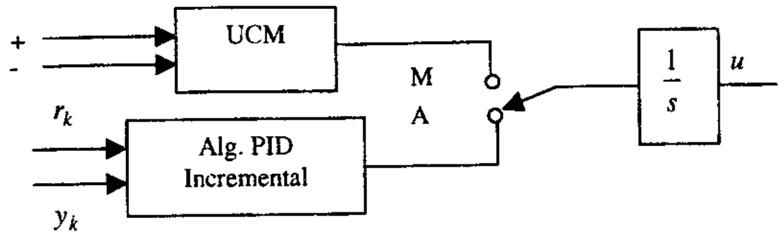
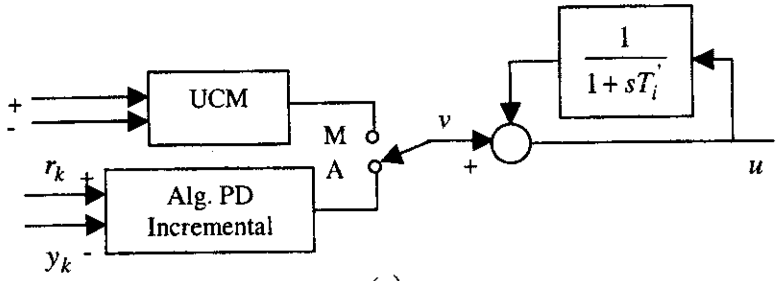


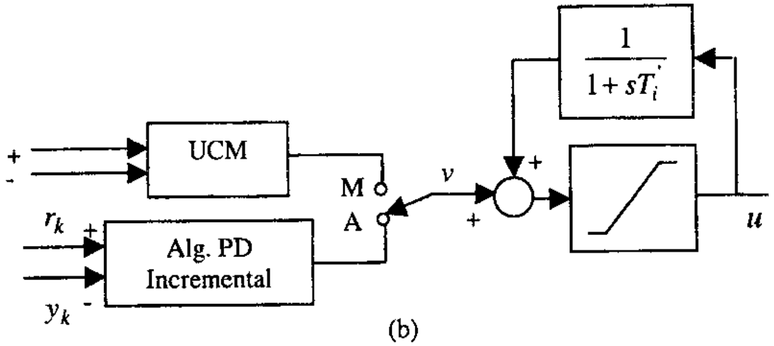
Fig. 5.12

În această figură comanda se generează incremental, ca urmare a prezenței integratorului plasat la ieșire, și ca urmare, la comutare nu apar șocuri.

În figura 5.13 sunt incluse forme speciale de algoritmi de poziție și modalități specifice de echilibrare.



(a)



(b)

Fig. 5.13

În figura 5.13*a* acțiunea integrală este realizată ca reacție pozitivă în jurul unui sistem de ordinul întâi. În acest caz funcția de transfer de la u la v este:

$$H_1(s)=\frac{1}{1-\frac{1}{1+sT_1'}}=\frac{1+sT_1'}{sT_1'}$$

ceea ce evidențiază că, pe manual, ieșirea este incrementată. Pentru a considera protecția antiwindup se poate utiliza schema din figura 5.13*b*, cu includerea pe calea directă a caracteristicii cu saturație a elementului de execuție. În acest caz constanta acțiunii integrale este egală cu T_i. În [6, 43, 57] sunt prezentate și alte modalități de structurare a algoritmului, astfel încât comutarea să se realizeze fără șocuri pentru procesul condus.

Pentru a exemplifica modul de structurare a unui algoritm în vederea implementării ca program de reglare, considerăm algoritmul PID cu filtrare. În figura 5.14 se prezintă schema bloc a algoritmului cu considerarea diferitelor moduri de lucru și variante funcționale.

În spatele „comutatoarelor" care apar în schemă, sunt variabile de tip eveniment, pe care le vom numi flaguri, prin intermediul cărora se poate modifica foarte ușor atât structura algoritmului, cât și regimurile de lucru.

Comutatorul C_0, cu cele două poziții $C_0=0$ și $C_0=1$, definește tipul de referință pentru regulator. Așa cum s-a menționat, regulatorul poate primi referință internă sau referință externă de la calculator sau alt regulator în regim cascadă.

Comutatorul C_1 introduce, de asemenea, două variabile de stare $C_1=0$ și $C_1=1$ pentru a evidenția utilizarea unui algoritm PID standard sau un regulator PID modificat (cu două grade de libertate). $C_1=0$ ilustrează utilizarea unui algoritm PID modificat cu prelucrarea diferențiată a referinței și a variabilei măsurate din proces.

Comutatorul C_2 introduce variabilele $C_2=0$ și $C_2=1$ în funcție de tipul elementului de execuție care poate fi normal deschis sau normal închis. Astfel, comanda crește odată cu creșterea erorii ($C_2=1$) sau comanda scade la creșterea erorii ($C_2=0$).

Comutatorul C_3, cu cele două poziții $C_3=0$ și $C_3=1$, include în algoritm protecția antiwindup. Variabila $C_3=1$ ilustrează situația normală de funcționare când mărimea de comandă nu este saturată.

Comutatorul C_4 inclus în schema bloc evidențiază prin cele două variabile $C_4=0$ și $C_4=1$ prezența sau absența componentei integrale în cadrul algoritmului. Astfel, $C_4=1$ ilustrează un algoritm PID, iar $C_4=0$ ilustrează un algoritm PD, componenta integrală a algoritmului este exclusă de la calculul comenzii, dar ea trebuie memorată pentru a se putea trece fără șocuri de la structura PD la structura PID, în cazul unei reconfigurări a algoritmului.

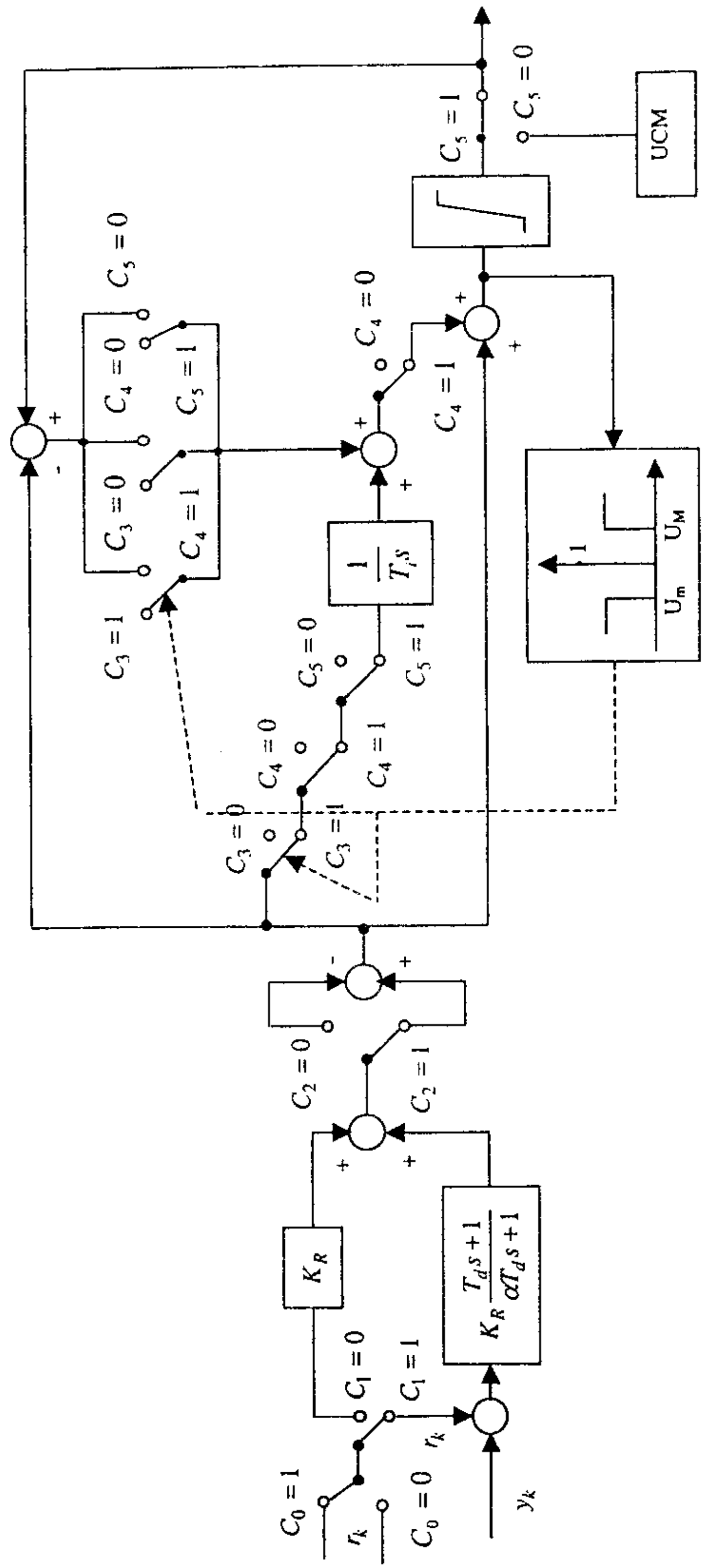


Fig. 5.14

Conform figurii 5.14, rezultă relația:

$I_k = U_k = D_k$

și deci la reintroducerea componentei integrale vom avea la ieșirea algoritmului aceeași comandă u_k :

$U_k^{'} = I_k + D_k = U_k - D_k + D_k = U_k$.

În felul acesta, în primul moment de la reconfigurare valoarea comenzii u_k rămâne neschimbată, urmând ca apoi să se manifeste efectul componentei integrale.

Comutatorul C_5, cu cele două poziții $C_5 = 0$ și $C_5 = 1$, determină comutarea modului de operare de pe comanda automată (A) elaborată de algoritm pe comanda manuală (M) elaborată de operator și invers.

$C_5 = 1$ ilustrează faptul că regulatorul numeric este pe regim AUTOMAT iar mărimea de comandă este furnizată de algoritm, iar $C_5 = 0$ ilustrează faptul că regulatorul este pe regim MANUAL, caz în care comanda este furnizată de operator de la tastatură prin incrementare sau decrementare cu o valoare fixă prestabilită.

La pornirea sistemului, algoritmul trebuie inițializat pe regimul MANUAL ($C_5 = 0$), operatorul furnizând comanda pentru aducerea procesului în punctul de funcționare dorit.

După obținerea mărimii reglate la o valoare în jurul punctului de funcționare, se trece în regimul AUTOMAT ($C_5 = 1$). Pentru ca trecerea să se facă fără șocuri și în acest caz, este necesar ca în regim MANUAL să se calculeze valoarea componentei integrale cu relația:

$I_k = U_{MAN} - D_k$

În felul acesta, la trecerea pe AUTOMAT avem:

$U_k = I_k + D_k = U_{MAN} - D_k + D_k = U_{MAN}$

și astfel comutarea are loc fără șocuri.

Componenta integrală este limitată în această schemă cu ajutorul variabilei aparente C_3 care nu se configurează de către operator ci este „poziționată“ automat, conform schemei în funcție, de valoarea mărimii de comandă:

$C_3 = 1$, în cazul în care mărimea de comandă nu este saturată: $U_k \in (U_{\min}, U_{\max})$;

$C_3 = 0$, în cazul saturării superioare sau inferioare a comenzii, situație în care componenta integrală trebuie limitată pentru a nu căpăta valori necontrolate și pentru a obține o de saturare rapidă în cazul schimbării semnului erorii.

Componenta integrală este limitată la valoarea:

$I_k = U_{max} - D_k$ sau $I_k = U_{min} - D_k$

după cum mărimea de comandă este limitată superior sau inferior.

Astfel, mărimea de comandă va fi menţinută la valoarea U_{min} sau U_{max} până la schimbarea semnului erorii:

$U_k = I_k + D_k = D_k + U_{max} - D_k = U_{max}$

De menţionat că la configurarea algoritmului se introduc: *variabilele* C_i, *parametrii de acord* $(K_R, T_i, T_d, \alpha, \beta)$, *limitele maximă şi minimă ale comenzii* U_{max} şi U_{min}, *valoarea referinţei* şi *elemente specifice variabilei măsurate din proces*.

În vederea organizării programului de aplicaţie se urmăreşte asigurarea unei flexibilităţi ridicate la configurare cu luarea în consideraţie a tuturor modurilor şi regimurilor de funcţionare. Astfel, regimul MANUAL, în funcţie de particularităţile regulatorului numeric, poate fi asigurat local sau de la nivelul ierarhic superior, pe când regimul AUTOMAT presupune elaborarea comenzii prin prelucrarea adecvată a variabilei măsurate din proces şi a referinţei. Se iau în consideraţie, de asemenea, regimul cascadă şi regimul calculator. În regim CASCADĂ bucla de reglare funcţionează cu referinţă externă, referinţă fixată de alt bloc de reglare. În regimul CALCULATOR se pot evidenţia, fie o funcţionare a blocului de reglare cu referinţă impusă de nivelul ierarhic superior (regim de supervizare), fie o funcţionare în regim de rezervă, caz în care comanda este calculată la nivelul ierarhic superior şi transmisă direct spre elementul de execuţie.

La comutarea de la un regim de funcţionare la alt regim de funcţionare se impune evitarea şocurilor pentru instalaţia tehnologică. În acest sens pot fi incluse două opţiuni la configurarea algoritmului de reglare: *iniţializarea* şi *urmărirea variabilei din proces*.

Urmărirea variabilei din proces semnifică faptul că în regim MANUAL sau CASCADĂ referinţa locală urmăreşte variabila din proces. În acest fel, comutările din regim MANUAL sau CASCADĂ în regim automat se vor face fără şocuri (eroarea buclei este forţată la zero). Această situaţie este frecvent întâlnită şi la regulatoarele analogice, egalizarea dintre referinţa locală şi măsură fiind realizată de operator, înainte de comutarea de regim MANUAL-AUTOMAT.

Iniţializarea se referă la conectarea în cascadă a două blocuri de reglare (de calcul). Dacă blocul interior este în regim MANUAL sau AUTOMAT, ieşirea blocului exterior urmăreşte referinţa locală a blocului interior. Astfel, comutarea MAN-CASC sau AUTO-CASC se vor face fără şocuri. În figura 5.15 pot fi evidenţiate regimurile de funcţionare ale

blocurilor conectate în cascadă. Şi această situaţie este întâlnită la regulatoarele analogice, egalizarea dintre referinţa externă şi referinţa internă a regulatorului din aval făcându-se de către operator, înainte de comutarea pe referinţa externă a regulatorului din aval.

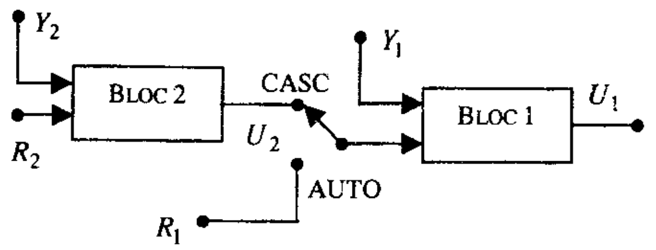


Fig. 5.15

De observat că dacă blocul din interior este configurat, atât cu urmărirea variabilei din proces, cât şi cu iniţializarea, atunci, în regim manual, ieşirea blocului din amonte U_2 urmăreşte referinţa locală a blocului din aval R_1, care, la rândul ei, urmăreşte semnalul măsurat din proces Y_1. Astfel, toate cele 3 mărimi ce intervin în calculul erorii în diferite regimuri de funcţionare (U_2, Y_1, R_1) sunt egale, orice comutare de regim neproducând variaţii ale poziţiei elementului de execuţie.

În legătură cu opţiunea de configurare *„iniţializare"*, apare următoarea situaţie specială. Dacă blocul din aval este configurat în *iniţializare*, iar blocul din amonte este în regim MANUAL, operatorul nu poate modifica ieşirea blocului din amonte (deşi este în regim MANUAL), deoarece acesta urmăreşte referinţa locală a blocului din aval. Acest regim special se numeşte *„manual-iniţializare"*. De remarcat că apariţia acestui regim special al blocului din amonte este dictată de configurarea blocului din aval.

6. PROIECTAREA SRA PE BAZA MODELELOR INTRARE - IEŞIRE

6.1. Introducere

Procesul de proiectare a unui SRA reprezintă un demers dificil, având în vedere faptul că modelul matematic ataşat obiectului condus nu poate surprinde toate aspectele funcţionale ale instalaţiei tehnologice, iar cerinţele de performanţă impuse pot determina soluţii care nu totdeauna devin operaţionale.

Conceptual, proiectarea unui SRA poate fi definită într-o formă sistemică. Dându-se un model al obiectului condus şi precizându-se mărimile exogene, se cere un regulator care în prezenţa unor restricţii impuse asupra comenzii, asigură satisfacerea cerinţelor de performanţă cât mai precis.

O soluţie analitică a problemei de proiectare se poate obţine în cadrul unui proces iterativ şi interactiv, parcurgând etapele deja menţionate în capitolul I:

– determinarea modelului matematic al obiectului condus: ansamblul format din instalaţia tehnologică, traductoare şi elemente de execuţie (v. cap. 2);

– stabilirea obiectivelor reglării/conducerii – cerinţe de performanţă impuse (v. cap. 3);

– alegerea metodei de proiectare (v. cap. 4 pentru optimizarea parametrilor de acord ai algoritmilor PID);

– testarea posibilităţii de realizare a algoritmilor proiectaţi şi analiza condiţiilor de implementare a acestora;

– validarea soluţiei de automatizare prin analiza performanţelor SRA, implementat pe proces.

Alegerea metodei de proiectare reprezintă cea de **a treia etapă în cadrul algoritmului de proiectare**. În funcţie de tipul modelului matematic al procesului, de criteriul de performanţă selectat, pot fi utilizate metode de optimizare a parametrilor algoritmilor de reglare selectaţi pentru un proces

dat în cadrul unor structuri cunoscute de reglare sau pot fi utilizate metode de sinteză a structurii sistemului de conducere şi a algoritmului de conducere, care minimizează un criteriu de performanţă selectat. În cadrul primei categorii de metode, algoritmii convenţionali de reglare PID sau alţi algoritmi cunoscuţi calitativ, se adaptează la un proces dat prin optimizarea valorilor parametrilor. În această clasă de metode se înscriu criteriile de alegere şi acordare a regulatoarelor, metodele de optimizare parametrică.

Metodele de sinteză exactă presupun utilizarea unor modele matematice cât mai precise şi de dimensiune adecvată pentru determinarea legilor de comandă optimă într-un sens bine definit prin criteriile de performanţă adoptate. Se pot determina algoritmi optimi de reglare în cadrul unor structuri fixate de sistem de reglare sau de conducere, sau se determină atât structura optimă, cât şi algoritmul optim de conducere pentru un proces dat.

În cadrul acestui capitol vor fi prezentate criterii de alegere şi acordare a regulatoarelor convenţionale, proceduri de optimizare parametrică, precum şi metode specifice de proiectare a algoritmilor de reglare pentru structuri date de sisteme de reglare.

Testarea posibilităţii de realizare a algoritmilor proiectaţi şi analiza condiţiilor de implementare pe un suport hardware reprezintă cea de **a patra etapă a proiectării sistemelor de reglare** (conducere). Un algoritm este util şi eficient în măsura în care este implementabil pe un suport hardware cu erori minime. Algoritmul rezultat din proiectare poate fi implementat pe o structură hardware în logică cablată sau în logică programată sub forma unor programe de aplicaţie. Indiferent de modul de implementare, se impune o analiză a performanţelor obţinute în urma implementării algoritmului pe echipamentul ales. Această etapă presupune alegerea optimă a echipamentului care asigură implementarea cât mai precisă a algoritmului de conducere.

Ultima etapă a proiectării o constituie **validarea soluţiei prin analiza performanţelor întregului sistem de reglare implementat pe proces**. În condiţiile în care performanţele obţinute prin analiză corespund cerinţelor impuse, se consideră încheiat procesul de proiectare. În caz contrar, se reia procesul de proiectare şi ajustare a parametrilor de acord pe n funcţiune.

Se poate constata cu uşurinţă că procesul de proiectare a unui SRA este iterativ şi interactiv, uşor de algoritmizat în vederea asistării de calculator. Astfel, problema proiectării asistată de calculator poate fi uşor formalizată la modele, atribute, indicatori, obiecte şi baze de cunoştinţe. În figura 6.1 se evidenţiază relaţia între calculator şi proiectant în procesul interactiv al dezvoltării unei aplicaţii de proiectare asistată de calculator a unui SRA. Este important de observat că proiectarea este un proces cu reacţie, obiectul şi specificaţiile fiind iterativ ajustate într-un ciclu cu reacţie.

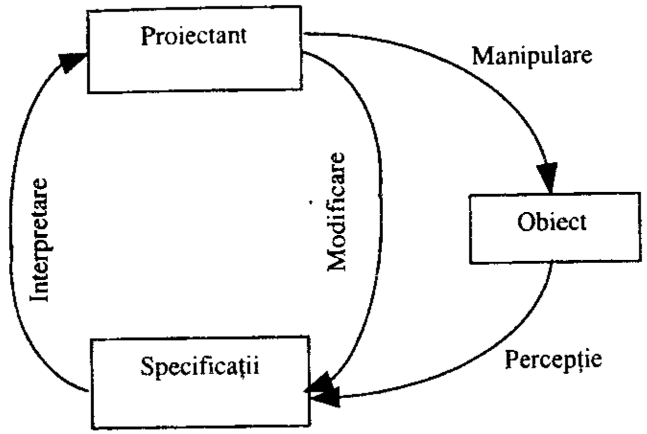


Fig. 6.1

În această interacţiune om–maşină din cadrul procesului de proiectare, proiectantul este confruntat cu incertitudinile modelului şi complexitatea calculelor. Pentru elaborarea unui sistem pentru proiectarea asistată de calculator (PAC) (se dezvoltă un mediu iterativ de calcul), se iau în consideraţie abilităţile specifice la nivelul operatorului şi al maşinii. Astfel, proiectantul stabileşte obiective, manevrează ambiguităţi, conceptualizează, rezolvă conflicte între obiective şi incertitudini etc, iar calculatorul evaluează funcţii, execută proceduri complexe, caută prin seturi complexe de date, generează şi manipulează indicatori etc. În contextul interactiv de calcul se manevrează cunoştinţe formale şi informale precum şi cunoştinţe declarative şi imperative. Toate aceste cunoştinţe trebuie astfel manipulate încât să se atingă obiectivul proiectării, apelând la principii şi proceduri. Proiectantul gândeşte apelând la principii generale, iar calculatorul operează pe baza unor proceduri formale specificate. În figura 6.2. se prezintă modul de organizare a interacţiunii între obiecte şi baza de cunoştinţe.

Proiectantul utilizează mediul de calcul interactiv pentru:

– a manipula cunoştinţele declarative formale prin evaluarea comportării şi atributelor oricărui model dinamic dat;

– a manipula cunoştinţe imperative formale prin executarea unor secvenţe de proceduri adecvate în scopul atingerii obiectivelor specificate;

– a manipula cunoştinţe imperative informale sub forma unor ghiduri de proiectare, reguli practice, cerinţe de proiectare etc.

Pentru a realiza toate acestea în mod corespunzător, se cere un larg spectru software, interfeţe şi display-uri performanţe şi se cere a folosi

limbaje declarative şi imperative adecvate pentru a asigura compatibilitatea maximă a proiectantului cu sistemul PAC. În procesul de proiectare operăm cu: obiecte, atribute ale obiectelor şi operaţii asupra obiectelor.

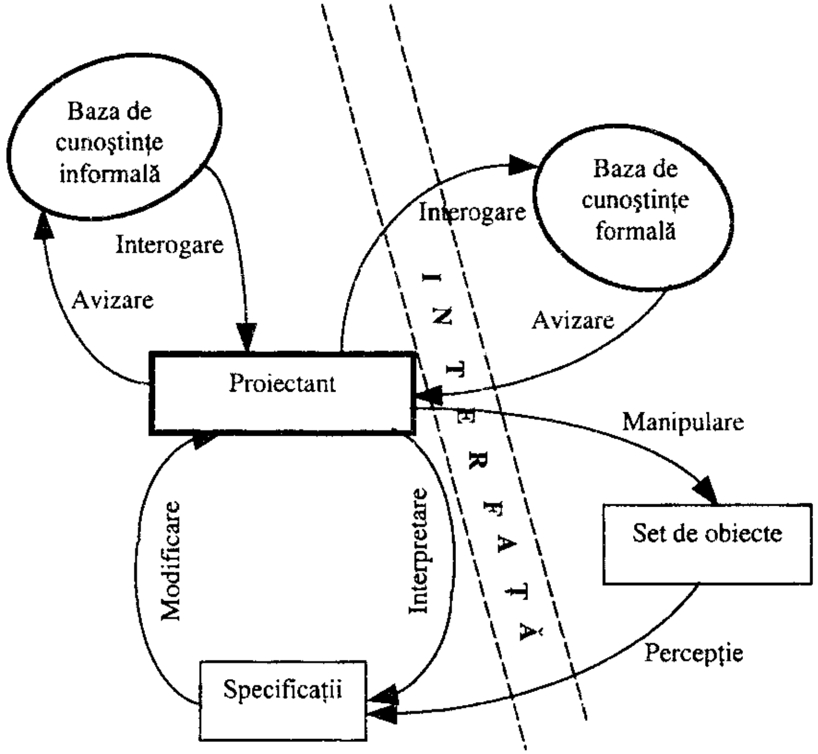


Fig. 6.2

Dintr-un punct de vedere general, *metodologiile de proiectare presupun trei situaţii posibile*:

– un atribut dat determină un obiect corespunzător;

– setul de obiecte poate fi cercetat pentru a găsi unul cu atributul dorit;

– un obiect dat poate fi manipulat folosind operaţii disponibile până ce va avea atributul dorit.

Astfel, în funcţie de cantitatea de cunoştinţe analitice disponibile, proiectantul foloseşte metode analitice, procedurale sau experimentale. În figura 6.3. se evidenţiază conexiunile între cadrul conceptual al proiectantului şi cadrul executiv al sistemului de calcul.

Din cele prezentate, rezultă cu uşurinţă *caracterul interactiv al procesului de proiectare de la faza de construcţie a modelului matematic, până la validarea soluţiei de automatizare, prin analiza asistată de*

calculator a performanțelor. În literatură [10, 44, 46] sunt prezentate mai multe sisteme de programe PAC a SRA implementate atât pe calculatoare personale, multe dintre acestea apelând la sisteme EXPERT.

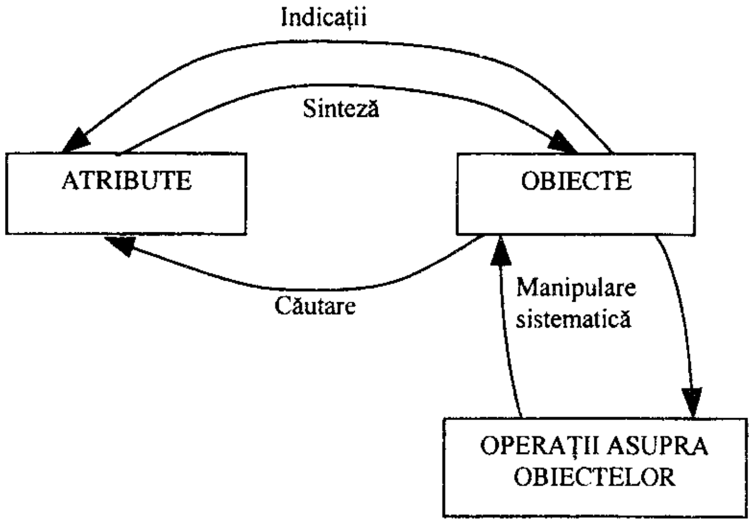


Fig. 6.3

Pornind de la modelul matematic al procesului și ținând seama de obiectivele reglării/conducerii concretizate sub forma unui obiect matematic se poate formula *problema proiectării unui sistem de reglare/conducere* astfel: *dându-se un model al procesului, se cere a se determina structura sistemului de reglare/conducere și algoritmul de reglare sau conducere a procesului, astfel încât să fie satisfăcute cerințele de performanță impuse. Se cere astfel a se determina legea de conducere $u(t) \in U_a$ (unde U_a reprezintă mulțimea comenzilor admisibile) astfel încât obiectivele conducerii să fie integral satisfăcute.*

Așa cum s-a menționat în capitolul I, la proiectarea SRA trebuie luați în considerație diferiți factori ce pot influența cerințele de performanță, cum ar fi:

- atenuarea perturbațiilor de tip sarcină;
- reducerea efectului zgomotului de măsură;
- urmărirea referinței;
- variațiile și incertitudinile în comportarea procesului.

Adoptarea metodei de proiectare presupune luarea în considerație, pe lângă factorii menționați mai sus, și a particularităților modelului matematic ce descrie obiectul condus și obiectivele reglării/conducerii, prezentate, de asemenea, sub formă de model matematic.

Etapele proiectării unui SRA cu luarea în considerație, atât a aspectelor conceptuale, cât și a aspectelor legate de alegerea componentelor în vederea implementării soluției pe proces, sunt prezentate în figura 6.4. [86]. Astfel, proiectantul:

1. obține o înțelegere completă cu privire la:

- descrierea generală a problemei;
- performanțele globale ale SRA, precizia în regim staționar și comportarea în regim tranzitoriu;
- identificarea funcției de transfer a procesului controlat;
- siguranța în funcționare, conexiunea cu mediul, dimensiuni, costuri, energie necesară, întreținere etc;

2. consideră mai multe soluții alternative, incluzând sisteme electrice, hidraulice și pneumatice și utilizând varianta continuă sau numerică de reglare;

3. alege cele mai bune proceduri pornind de la specificații, cerințe și elemente fixate de beneficiar;

4. interpretează cerințele în raport cu performanțele sistemului în circuit închis (caracteristici de frecvență, caracteristici ale răspunsului tranzitoriu pentru mărimi exogene precizate);

5. stabilește caracteristicile aproximative ale buclei deschise ce vor satisface cerințele sistemului în circuit închis;

6. proiectează sistemul și selectează comportamentele care asigură satisfacerea cerințelor de la punctul 5;

7. rafinează, simplifică, corectează etapele 5 și 6;

8. simulează sistemul incluzând caracteristicile sale liniare și neliniare în vederea validării în mediu simulat a soluției și realizează modificările necesare;

9. construiește un prototip și validează experimental proiectarea. Realizează modificările ce se impun pentru a atinge obiectivele propuse;

10. rafinează proiectarea în scopul optimizării performanțelor și minimizării costului. Validează soluția optimizată pe proces.

De observat că schema de proiectare (fig. 6.4) nu se parcurge întotdeauna în mod complet. Caracterul interactiv al procesului de proiectare presupune reluarea unor etape și corecția unor elemente specifice proiectării.

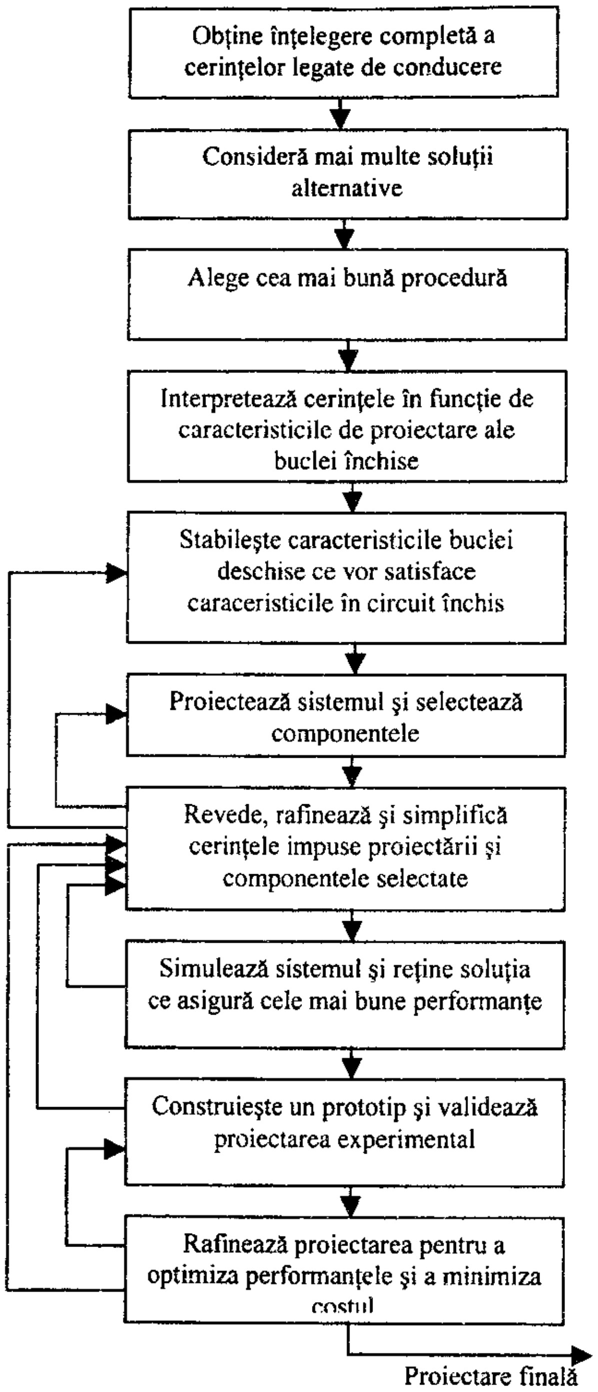


Fig. 6.4

6.2. Problematica proiectării SRA monovariabile

Considerăm structura convențională a unui SRA (fig. 6.5):

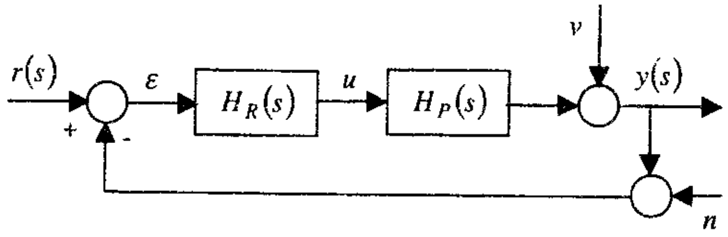


Fig. 6.5

unde H_P este funcția de transfer a obiectului condus, H_R este funcția de transfer a regulatorului (compensatorului), iar r este mărimea de referință, u este mărimea de comandă, y este mărimea reglată, n este zgomotul de măsură și deci mărimea măsurată va fi $(y+n)$.

Mărimea de intrare în regulator este eroarea ε, care este alterată de zgomot ($\varepsilon = r - y - n$).

Comportarea intrare–ieșire, adică transferurile de la mărimile externe sistemului la mărimea reglată y și eventual la comanda u, poate fi descrisă prin relațiile:

$$y = \frac{H_d}{1+H_d}(r-n) + \frac{1}{1+H_d}v \tag{6.1}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{1+H_d}(r-v) + \frac{H_d}{1+H_d}n \tag{6.2}$$

$$u = \frac{H_R}{1+H_d}(r-v) - \frac{H_R}{1+H_d}n \tag{6.3}$$

unde $H_d = H_R H_P$ reprezintă funcția de transfer a căii directe a SRA.

Mărimile care intervin în relațiile (6.1)–(6.3) sunt evident transformatele Laplace ale mărimilor originale temporale, omițându-se, pentru comoditatea scrierii, argumentul s, iar în locul literelor mari folosindu-se literele mici.

De remarcat faptul că în relațiile (6.1– 6.3) intervin două funcții de transfer și anume:

$$H_0 := \frac{H_d}{1+H_d}$$ – funcția de transfer în circuit închis și

$H_\varepsilon := \frac{1}{1+H_d}$ – funcția de transfer a erorii.

Cele două funcții de transfer sunt legate prin relația

$$H_\varepsilon + H_0 = 1. \tag{6.4}$$

Un scop pentru care a fost concepută structura din figura 6.5 este acela ca mărimea reglată y să urmărească „cât mai fidel" mărimea de referință r (în contextul perturbant al mărimilor v și n).

Cele două obiective ale unui SRA – *urmărirea referinței* și *rejecția perturbațiilor* – pot fi atinse punând condiții asupra celor două funcții de transfer H_0 și H_ε. De remarcat faptul că H_ε reprezintă funcția de sensibilitate în raport cu variația parametrilor modelului obiectului condus. Dacă admitem o variație ΔH_P a funcției de transfer a procesului, rezultă o variație ΔH_d a funcției de transfer a căii directe și evident o variație ΔH_0 a funcției de transfer a sistemului închis.

Calcule elementare evidențiază faptul că variația ΔH_P determină o variație ΔH_0, iar raportul:

$$\frac{\frac{\Delta H_0}{H_0}}{\frac{\Delta H_P}{H_P}} = \frac{1}{1+H_d} := S \tag{6.5}$$

reprezintă sensibilitatea sistemului în raport cu variațiile ΔH_P. Astfel se poate defini prin (6.5) operatorul de sensibilitate și ținând seama de (6.4) H_0 reprezintă operatorul de sensibilitate complementară.

În cele ce urmează vom folosi notațiile:

$S := \frac{1}{1+H_d(s)}$ – funcția de sensibilitate

și

$T := H_d(s)[1+H_d(s)]^{-1}$ – funcția complementară a sensibilității.

Este evident că pentru o structură de SRA cu un singur grad de libertate, cele două funcții satisfac ecuația:

$$S(s)+T(s)=1 \tag{6.6}$$

Pentru procese caracterizate prin modele de forma:

$$H_p(s)=\frac{B_p(s)}{A_p(s)}=\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s + a_0} \tag{6.7}$$

cu un exces de poli față de zerouri egal cu $e_p = n - m$, se cere un algoritm de reglare de forma:

$$H_R(s) = \frac{Q_R(s)}{P_R(s)} = \frac{q_{n_q}s^{n_q} + q_{n_q-1}s^{n_q-1} + \cdots + q_1 s + q_0}{s^{n_p} + p_{n_p-1}s^{n_p-1} + \cdots + p_1 s + p_0}$$

unde coeficienții q_i, p_j sunt necunoscuți, iar dimensiunea polinoamelor n_q și n_p trebuie determinată. Condiția de realizare fizică impune ca $n_p > n_q$.

Presupunem că ambele funcții de transfer $H_P(s)$ și $H_R(s)$ sunt în forma lor minimală (ireductibilă).

Cele două funcții importante ce caracterizează comportarea SRA cu un grad de libertate, $H_d(s)$ și $H_0(s)$ se calculează și au forma:

$$H_d(s) = H_p(s).H_R(s) = \frac{B_p(s)}{A_p(s)}.\frac{Q_R(s)}{P_R(s)} \tag{6.8}$$

și

$$H_0(s) \equiv T(s) = \frac{H_d(s)}{1+H_d(s)} = \frac{B_p(s)\ .\ Q_R(s)}{B_p(s)\ Q_R(s) + A_p(s)\ P_R(s)} \tag{6.9}$$

Cerințele de performanță impuse de SRA pot fi obținute dacă acestea se transpun într-o formă dorită a funcției de transfer $H_0(s)$, respectiv $H_d(s)$. Cele două cerințe funcționale: **a)** stabilitate și **b)** precizie – pot fi realizate asigurând celor două funcții de transfer o anumită formă.

Polinomul caracteristic al SRA este dat de relația:

$$P_c(s) = B_p(s)Q_R(s) + A_p(s)\ .\ P_R(s) \tag{6.10}$$

sau dacă se notează cu $\alpha_P(s) := c.m.m.d.c.\{B_P(s), P_R(s)\}$ și cu $\alpha_r(s) := c.m.m.d.c.\{Q_R(s), A_P(s)\}$

$$P_c(s) = \alpha_r(s)\alpha_P(s)[\bar{B}_P\bar{Q}_R + \bar{A}_P\bar{P}_R] \tag{6.11}$$

întrucât se presupune că polinoamele $A_P(s)$, $B_P(s)$, $Q_R(s)$, $P_R(s)$ conțin factori comuni ce pot fi compensați în funcția de transfer $H_d(s)$.

Relația (6.11) se obține dacă cele patru polinoame pot fi puse sub forma:

$$B_p(s) = \bar{B}_p\ .\ \alpha_p(s)\ ; A_p(s) = \alpha_r(s)\ .\ \bar{A}_p$$
$$Q_R(s) = \bar{Q}_R\ .\ \alpha_r(s)\ ;\ P_R(s) = \bar{P}_R(s)\ .\ \alpha_p(s) \tag{6.12}$$

În aceste condiții, funcția de transfer $H_d(s)$ capătă forma:

$$H_d(s) = \frac{\bar{B}_p(s)\cdot\bar{Q}_R(s)}{\bar{A}_p(s)\cdot\bar{P}_p(s)} \tag{6.13}$$

Compensarea unor poli sau zerouri ale procesului caracterizat printr-un model $H_P(s)$ care conține incertitudini structurale și parametrice, cu valabilitate limitată în vecinătatea punctului de funcționare, este inadmisibilă din punctul de vedere al cerinței de stabilitate a SRA.

Polinomul caracteristic conține acele singularități incluse în $\alpha_r(s)$ și $\alpha_p(s)$ care generează instabilitatea SRA, deși formal funcția de transfer a căii directe este într-o formă simplificată.

În aceste condiții se recomandă construcția unei funcții de transfer $H_d(s)$ pornind de la performanțe, astfel încât să nu se compenseze eventualele singularități instabile ale procesului condus. Pot fi compensați cu precauție anumiți poli stabili ai procesului, cu condiția ca aceștia să nu se încadreze printre incertitudinile parametrice ale modelului atașat procesului condus.

Cea de a două cerință de performanță se referă la comportarea în regim staționar (permanent). Este cunoscut faptul că orice SRA trebuie să asigure urmărirea referinței și rejectarea perturbațiilor.

Atingerea acestor obiective presupune o anumită formă a funcțiilor de transfer $H_d(s)$ și $H_0(s)$. Pentru o clasă precizată de mărimi exogene (referință, perturbații) definită prin:

$$W = \left\{ w \middle| w(s) = \frac{\alpha(s)}{\beta_W(s)},\ \forall\alpha(s),\ \partial[\alpha(s)] \le \partial[\beta_W(s)] \right\} \tag{6.14}$$

unde

$$\beta_W(s) = \beta_0 + \beta_1 s + ...\beta_{q-1}s^{q-1} + s^q \tag{6.15}$$

este polinomul ce determină clasa mărimilor exogene, iar prin fixarea unui $\alpha(s)$ se alege un element din clasa mărimilor exogene. Pentru mărimi exogene persistente se admite implicit că polinomul $\beta_w(s)$ este instabil.

Pentru structura prezentată în figura 6.5, eroarea $\varepsilon(s)$ se calculează cu relația:

$$\varepsilon(s) = \frac{1}{1+H_d(s)} \cdot R(s) \text{ sau } \varepsilon(s) = -\frac{1}{1+H_d} \cdot V(s) \tag{6.16}$$

sau

$$\varepsilon(s) = S(s) \cdot \frac{\alpha(s)}{\beta_W(s)} \tag{6.17}$$

Rezultă cu ușurință din (6.16) și (6.17) condiția pentru a obține precizia dorită $\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = 0$, prezența în funcția de sensibilitate a unui număr de zerouri în origine mai mare decât dimensiunea q a polinomului $\beta_W(s)$.

Cele două condiții referitoare la *stabilitate* și la *precizie* vor fi completate cu o nouă condiție privind realizarea algoritmului de reglare. De remarcat faptul că cerința de precizie impune includerea în funcția de transfer atașată regulatorului a modelului mărimilor exogene. Astfel, pentru semnale de tip treaptă, rampă sau parabolă, $H_R(s)$ trebuie să conțină un număr de poli în origine egal cu q ($q = 1$ pentru treaptă, $q = 2$ pentru rampă și $q = 3$ pentru parabolă).

În aceste condiții rezultă o structură de algoritm implementabil dacă $e_0 \ge e_p$. Această condiție rezultă din analiza relației:

$$H_R(s) = H_p^{-1}(s).H_d(s) \tag{6.18}$$

sau

$$H_R(s) = H_p^{-1} \cdot \frac{H_0(s)}{1-H_0(s)} \tag{6.19}$$

ținând seama că $e_0 \equiv e_d$ iar $e_p = \partial[A_p(s)] - \partial[B_p(s)]$, unde prin e_p s-a notat excesul polilor față de zerourile funcției de transfer $H_P(s)$, iar prin e_0 s-a notat excesul polilor față de zerourile funcției de transfer $H_0(s)$.

Obținerea funcției de transfer $H_R(s)$ presupune satisfacerea a două cerințe:

- cerința funcțională (stabilitate, precizie, performanțe tranzitorii);
- cerința structurală ($e_0 \ge e_p$, cu luarea în considerație a incertitudinilor structurale și parametrice ale modelului atașat procesului condus).

Pentru construcția funcției de transfer $H_d(s)$ se va avea în vedere includerea modelului intern al exogenului în structura regulatorului pentru asigurarea regimului permanent dorit al sistemului.

6.3. Problematica proiectării în frecvență

Pornind de la structura generală a SRA prezentat în figura 6.6, obținută din figura 6.5 cu o evidențiere a mărimilor exogene $W = [r, v]^T$ și a mărimilor de calitate $[y, \varepsilon]^T$, se obține reprezentarea generală a SRA, ca în figura 6.7.

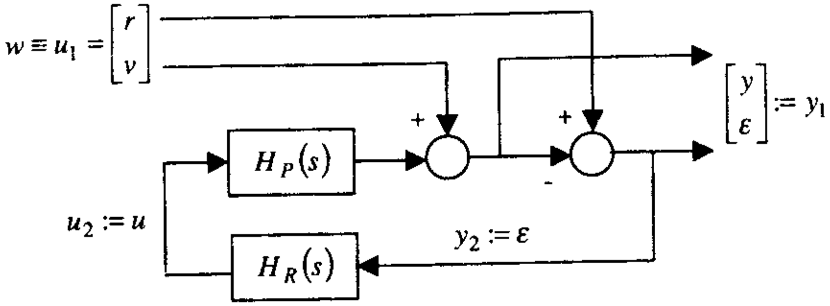


Fig. 6.6

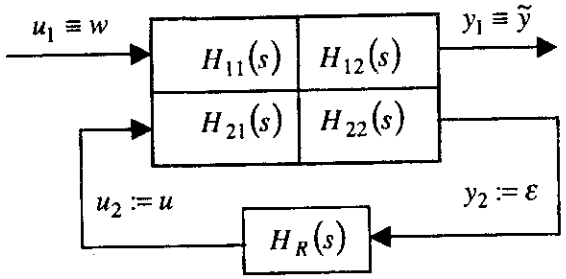


Fig. 6.7

Semnificația matricelor H_{ij} din figura 6.7 este ușor de evidențiat ținând seama de notații și de cele două structuri echivalente din figurile 6.6 și 6.7:

$$\begin{bmatrix} y \\ \varepsilon \end{bmatrix} = y_1 \equiv \tilde{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & H_P \\ 1 & -1 & -H_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ v \\ u \end{bmatrix} \qquad (6.20)$$

$$\varepsilon \equiv y_2 = [1 \;\; -1 \, \vdots \;\; H_P]$$

sau

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \vdots & H_P \\ 1 & -1 & \vdots & -H_P \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -1 & \vdots & -H_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ v \\ \dots \\ u \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ \\ u_2 \end{matrix} . \qquad (6.21)$$

Din (6.21) rezultă:

$$H_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \; H_{12} = \begin{bmatrix} H_P \\ -H_P \end{bmatrix}$$

$$H_{21} = [1 \;\; -1], \; H_{22} = -H_P \qquad (6.22)$$

Relația intrare-ieșire pentru sistemul prezentat în figura 6.7 se obține cu ușurință ținând seama că $u_2 = H_R \cdot y_2$:

$$\tilde{y} = y_1 = \left[H_{11} + H_{12}H_R(1 - H_{22}H_R)^{-1} H_{21}\right] u_1$$

adică

$$T = H_{y_1 u_1} = H_{11} + H_{12}H_R(1 - H_{22}H_R)^{-1} H_{21} . \qquad (6.23)$$

Ținând seama de (6.21) se obține:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_P \\ -H_P \end{bmatrix} H_R (1 + H_P H_R)^{-1} [1 \;\; -1]$$

sau

$$T \equiv H_{\tilde{y}w} = \begin{bmatrix} H_d(1+H_d)^{-1} & 1 - H_d(1+H_d)^{-1} \\ 1 - H_d(1+H_d)^{-1} & -\left(1 - H_d(1+H_d)^{-1}\right) \end{bmatrix} \qquad (6.24)$$

adică exact matricea de transfer atașată sistemului cu ieșirea $\tilde{y}$ și intrarea w.

Pentru evaluarea efectului mărimilor exogene w asupra ieșirii de calitate (reglată) reprezentată prin vectorul $\tilde{y} \equiv y_1$ se poate scrie:

$$\tilde{y} = T(s) \cdot w . \qquad (6.25)$$

O posibilitate pentru evaluarea performanțelor unui sistem de reglare automată este aceea de a evalua norma unei funcții de transfer $H(s)$ în cazul monovariabil:

$$\|H\|_\infty := \sup_\omega |H(j\omega)| \qquad (6.26)$$

în ipoteza că „$H(s)$ nu are poli pe axa imaginară", unde numărul pozitiv $\|H\|_\infty$ se numește *norma în sens* L^∞ a funcției de transfer $H(s)$ și reprezintă distanța maximă de la origine la punctele locului de transfer $H(j\omega)$ (care nu are ramuri la infinit datorită ipotezei că nu are poli în origine).

O a doua posibilitate de evaluare a intensității transferului $w \to \tilde{y}$ dacă funcția de transfer este strict proprie și nu are poli în origine, presupune apelarea la norma funcției de transfer:

$$\|H\|_2^2 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(-j\omega) H(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega \qquad (6.27)$$

care se numește norma în sens L^2 a funcției de transfer $H(s)$.

În cazul sistemelor cu mai multe intrări și mai multe ieșiri – unde u_1, u_2, y_1, y_2 sunt vectori cu dimensiunile m_1, m_2, p_1, p_2, reprezentând corespunzător mărimile exogene, de comandă, reglată și măsurată, – generalizarea rezultatelor de la sistemele monovariabile este imediată:

$$H_s(s) = \begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{vmatrix} \qquad (6.28)$$

unde

$$H_{11}=\begin{bmatrix}0 & I\\ I & -I\end{bmatrix},\ H_{12}=\begin{bmatrix}H_P\\ -H_P\end{bmatrix}$$

$H_{21}=[I\ \ -I]$, $H_{22}=-H_P$.

În acest caz, matricea H_s are semnificaţia:

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=H_s\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H_{11} & H_{12}\\ H_{21} & H_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix} \quad (6.29)$$

$u_2=H_R y_2$

iar transferul intrare-ieşire este realizat prin intermediul matricei:

$$T_0 := H_{11}+H_{12}H_R(I-H_{22}H_R)^{-1}H_{21} \quad (6.30)$$

care poartă denumirea de funcţie omografică a matricelor H_s şi H_R, presupunând îndeplinită condiţia de regularitate [56]:

$$|I-H_{22}H_R|=|I-H_R H_{22}|\neq 0\ . \quad (6.31)$$

Similar cu cazul sistemelor monovariabile (SISO), se pot introduce în cazul sistemelor multivariabile (MIMO) normele L^2 şi L^∞.

Pentru o matrice proprie $T(s)$ fără poli pe axa imaginară se defineşte:

$$\|T\|_\infty := \sup_\omega \bar{\sigma}(T(j\omega)) \quad (6.32)$$

unde $\bar{\sigma}(T(j\omega))$ este valoarea singulară maximă a lui $T(j\omega)$, numită norma L^∞ a matricei de transfer $T(s)$. Dacă se face ipoteza că $T(s)$ este strict proprie atunci este bine definită cantitatea reală:

$$\|T\|_2^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} tr\left(T^*(j\omega)T(j\omega)\right)d\omega \quad (6.33)$$

(unde $T^*(j\omega):=T^T(-j\omega)$, iar $tr(T_R^* T_R)$ este urma matricei $T^*(j\omega)T(j\omega)$) numită norma L^2 a matricei de transfer $T(s)$.

Cu aceste elemente pregătitoare se poate formula *problema fundamentală a sintezei în frecvenţă*:

Dându-se sistemul:

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=H_p\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

se cere un compensator $H_R(s)$, astfel încât sistemul rezultat (v. fig. 6.7) să posede simultan următoarele două proprietăţi:

- (S) *stabilitate*, adică oriunde s-ar injecta în structura din figura 6.7 un semnal mărginit, în orice alt punct al structurii semnalul rezultat să fie de asemenea mărginit;

- (O) *optimalitate*, adică una din normele $\|T_{y_1u_1}\|_\infty$ sau $\|T_{y_1u_1}\|_2$ să fie minimă, unde $T_{y_1u_1}=F(H_s,H_R)$ reprezintă funcţia omografică a lui H_p şi H_R.

Pentru cazul SISO, luând în consideraţie numai referinţa r ($v=0$), matricea $H_{\tilde{y}r}$ devine:

$$H_{\tilde{y}r}=H_{y_1r}=\begin{bmatrix}H_d(1+H_d)^{-1}\\ (1+H_d)^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}T\\ S\end{bmatrix} \quad (6.34)$$

care se referă la *robusteţea stabilităţii* şi la *robusteţea performanţelor* asigurate prin operaţia de minimizare a normei L^∞ sau L^2 a lui $H_{\tilde{y}r}$.

În cazul în care se impune şi limitarea amplitudinii comenzii, cerinţă tehnologică naturală, se poate utiliza o variantă hibridă a matricei de transfer:

$$H_{\tilde{y}r}=\begin{bmatrix}H_d(1+H_d)^{-1}\\ H_R(1+H_d)^{-1}\\ (1+H_d)^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}T\\ H_R S\\ S\end{bmatrix}. \quad (6.35)$$

unde a fost inclusă şi funcţia de transfer $\frac{H_R(s)}{1+H_d(s)}$, care defineşte transferul de la $r(s)$ la $u(s)$.

Cu aceste particularizări, se poate trece la sinteza în frecvenţă a sistemelor de reglare automată, construind T şi S, astfel încât să fie satisfăcute cerinţele de performanţă şi stabilitatea într-un domeniu de frecvenţe bine definit.

6.4. Proiectarea SRA pe baza funcţiilor de transfer $H_0(s)$ şi $H_d(s)$

Funcţia de transfer a unui SRA de ordinul al II-lea este cunoscută şi are forma:

$$H_0(s)=T(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\ . \quad (6.36)$$

Pentru un asemenea sistem se cunosc relaţiile între performanţele impuse în raport cu referinţa treaptă şi parametrii ζ şi ω_n. Astfel, dacă se solicită satisfacerea unor cerinţe locale de performanţă sub forma:

$\sigma\le\sigma_0$, $t_t\le t_0$, $\varepsilon_{st}=0$, $\varepsilon_v\le\varepsilon_{v0}$

se poate construi un model dorit de funcţie de transfer:

$$H_0^d(s)=\frac{\omega_{n0}^2}{s^2+2\zeta_0\omega_{n0}s+\omega_{n0}^2} \text{ sau } H_d^d(s)=\frac{\omega_{n0}^2}{s(s+2\zeta_0\omega_{n0})} \quad (6.37)$$

unde ζ_0 şi ω_{n0} rezultă din cerinţele de performanţă.

În cazul în care procesul este caracterizat printr-o raţională strict proprie, stabilă, de fază minimă, se obţine regulatorul sub forma:

$$H_R(s)=H_P^{-1}(s)\cdot H_d^d(s)=\frac{\omega_{n0}}{s(s+2\zeta_0\omega_{n0})}\cdot\frac{A_P(s)}{B_P(s)}. \quad (6.38)$$

În structura regulatorului este inclus modelul invers al procesului şi modelul dorit $H_d^d(s)$ pentru sistemul în buclă deschisă.

Relaţia (6.38) este validă pentru a genera o lege de reglare implementabilă în măsura în care $e_P \le 2$. Pentru procese caracterizate de raţionale strict proprii de fază minimă cu $e_P > 2$, se impune corecţia funcţiei de transfer $H_0(s)$ sub forma:

$$H_0^c(s)=\frac{\omega_{n0}^2}{s^2+2\zeta_0\omega_{n0}s+\omega_{n0}^2}\cdot\frac{\prod_1^n p_k}{\prod_1^n (s+p_k)} \quad (6.39)$$

unde p_k reprezintă poli reali situaţi pe axa reală negativă suficient de departe de origine ($|p_k| >> (5-6)\zeta_0\omega_{n0}$), pentru ca efectul lor asupra performanţelor tranzitorii să fie cât mai mic. De remarcat că eroarea în regim staţionar se menţine egală cu zero.

Pentru cazul în care se urmăreşte îmbunătăţirea vitezei de răspuns a sistemului şi conservarea celorlalte performanţe în regim tranzitoriu se impune construcţia funcţiei de transfer corectate sub forma:

$$H_0^c(s)=\frac{\omega_{n0}^2}{s^2+2\zeta_0\omega_{n0}s+\omega_{n0}^2}\cdot\frac{\prod_1^n p_k \prod_1^m (s+z_i)}{\prod_1^m z_i \prod_1^n (s+p_k)} \quad (6.40)$$

unde z_i reprezintă zerouri plasate pe axa reală negativă suficient de departe de origine, dar mai aproape decât polii p_k, astfel încât să se realizeze efectul anticipativ, să se asigure condiţia de realizabilitate, iar celelalte performanţe tranzitorii să se menţină în domeniul admisibil.

Astfel, se construieşte $H_0^c(s)$ prin adăugarea unor reţele de compensare $H_{ci}(s)=\frac{p_k}{z_i}\frac{s+z_i}{s+p_k}$ astfel încât să fie satisfăcute *condiţiile de funcţionalitate şi de structură*.

Pentru obţinerea funcţiei de transfer $H_R(s)$ în care $H_P(s)$ este cunoscută, se construieşte $H_0^d(s)$ sau $H_d^d(s)$ în cazul în care $e_P \le 2$ sau se construieşte iterativ şi interactiv $H_0^c(s)$ sau $H_d^c(s)$, utilizând compensatoare cu funcţia de transfer $H_c(s)=\frac{p}{z}\frac{s+z}{s+p}$, respectiv $H_c(s)=\frac{p}{s+p}$, obţinându-se expresii de forma (6.39) sau (6.40).

Introducerea compensatoarelor de tip $H_c(s)$ este posibilă atât pe calea directă cât şi în bucla de reglare. În primul caz, structura SRA este prezentată în figura 6.8.

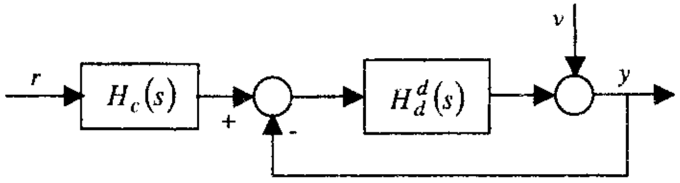


Fig. 6.8

În acest caz, $H_d^d(s)=H_{R1}(s)H_P(s)=\frac{\omega_{n0}^2}{s(s+2\zeta_0\omega_{n0})}$ şi, în consecinţă, se obţine o structură de SRA cu două grade de libertate determinate de prezenţa celor două blocuri de reglare $H_{R_1}(s)$ în buclă şi de compensare sau de tip feedforward $H_c(s)$.

În cel de-al doilea caz se pot introduce pe calea directă şi bucla închisă compensatoare care asigură obţinerea funcţiei de transfer dorite pe calea directă.

Astfel, în cazul în care nu sunt îndeplinite ambele cerinţe, se poate construi

$$H_d^{dc}(s)=H_d^d(s)H_c(s)\,. \quad (6.41)$$

Compensatoarele cu funcţia de transfer $H_c(s)=\frac{p}{z}\frac{s+z}{s+p}$ pot fi de tipul *anticipaţie-întârziere* sau *întârziere-anticipaţie,* în funcţie de valoarea

raportului $\frac{|p|}{|z|}$, care este supraunitar pentru cazul în care compensatorul este de tip *anticipație-întârziere* și este subunitar în cazul compensatoarelor de tipul *întârziere-anticipație*.

Structura cu două grade de libertate presupune că în buclă închisă regulatorul cu funcție de transfer $H_{R1}(s)$ este fizic realizabil numai dacă $e_P \le 2$:

$$H_{R1}(s) = H_P^{-1}(s)\frac{\omega_{n0}^2}{s(s+2\zeta_0\omega_{n0})}. \tag{6.42}$$

Cel de-al doilea bloc de reglare (compensatorul de anticipație-întârziere cu funcția de transfer $H_c(s)$) se introduce pentru a obține funcția de transfer:

$$H_0^c(s) = \frac{\omega_{n0}^2}{s^2 + 2\zeta_0\omega_{n0}s + \omega_{n0}^2}\frac{p}{z}\frac{s+z}{s+p} \tag{6.43}$$

iar rezultatul global are forma:

$$H_R(s) = H_P^{-1}(s)\cdot\frac{H_0^c(s)}{1-H_0^c(s)} = \frac{A_P(s)}{B_P(s)}\cdot\frac{\omega_{n0}^2 p(s+z)}{z(s+p)\left(s^2+2\zeta_0\omega_{n0}s+\omega_{n0}^2\right)-\omega_{n0}^2 p(s+z)} \tag{6.44}$$

Incertitudinile în modelul matematic al procesului sunt preluate de regulatorul ce conține modelul invers $H_P^{-1}(s)$. Pur formal se pot alege singularități ale funcției de transfer $H_0^c(s)$ care să asigure o formă minimală a funcției de transfer $H_R(s)$ pentru a se reduce efortul de implementare.

Pentru cazul în care compensatorul se introduce în cascadă se obține o structură de SRA cu un singur grad de libertate (fig. 6.9).

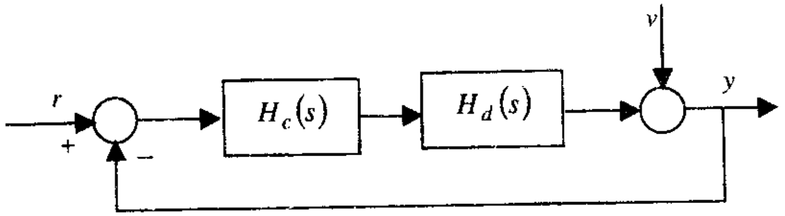


Fig. 6.9

Dacă se alege un compensator cu funcția de transfer:

$$H_c(s) = \frac{s+z}{s+p} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1+\alpha Ts}{1+Ts} \tag{6.45}$$

unde $\alpha > 1$ iar $z = -\frac{1}{\alpha T}$ și $p = -\frac{1}{T}$, funcția de transfer a căii directe corectată are forma:

$$H_d^{dc}(s) = \frac{\omega_{n0}^2}{s\left(s+2\zeta_0\omega_{n0}\right)}\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1+\alpha Ts}{1+Ts} \tag{6.46}$$

iar

$$H_0^{dc}(s) = \frac{H_d^{dc}(s)}{1+H_d^{dc}(s)} = \frac{\omega_{n0}^2(1+\alpha Ts)}{\omega_{n0}^2(1+\alpha Ts)+\alpha s(1+Ts)\left(s+2\zeta_0\omega_{n0}\right)}$$

sau

$$H_0^{dc}(s) = \frac{\omega_{n0}^2(1+\alpha Ts)}{\alpha Ts^3 + \alpha(1+2\zeta_0\omega_{n0}T)s^2 + \left(2\alpha\zeta_0\omega_{n0}+\alpha T\omega_{n0}^2\right)s + \omega_{n0}^2} \tag{6.47}$$

ceea ce evidențiază o structură cu trei poli și un zero.

În cazul în care $\alpha >> 1$, se poate considera o aproximare a funcției de transfer $H_c(s)$ sub forma:

$$H_c(s) \cong 1 + \alpha Ts$$

iar funcția de transfer $H_0^{dc}(s)$ capătă forma:

$$H_0^{dc}(s) = \frac{\omega_{n0}^2(1+\alpha Ts)}{s^2 + \left(2\zeta_0\omega_{n0}+\alpha\omega_{n0}^2 T\right)s + \omega_{n0}^2} \tag{6.48}$$

și se obține un model de ordinul doi și cu un zero determinat de valorile parametrilor α și T. Factorul relativ de amortizare corectat se poate calcula din (6.48):

$$\zeta_c = \zeta_0 + \alpha\frac{T\omega_{n0}}{2}. \tag{6.49}$$

Modificarea factorului de amortizare, care crește față de factorul ζ_0 selectat din performanțe, determină o modificare a erorii în raport cu semnale de tip rampă. Astfel, eroarea la viteză se calculează cu ajutorul relației:

$$\varepsilon_v = \frac{2\zeta_c}{\omega_{n0}} = \frac{2}{\omega_{n0}}\left(\zeta_0 + \alpha\frac{T\omega_{n0}}{2}\right)$$

sau

$$\varepsilon_v = \frac{2\zeta_0}{\omega_{n0}} + \alpha T. \tag{6.50}$$

Un rezultat similar se obţine şi în cazul în care se foloseşte un compensator de tip derivativ în cadrul unei bucle minore (v. fig. 6.10).

Funcţia de transfer a căii directe în acest caz este:

$$H_d^{dc}(s)=\frac{\omega_{n0}^2}{s\left(s+2\zeta_0\omega_{n0}+\omega_{n0}^2\beta\right)},\ \text{iar}$$

$$H_0^{dc}(s)=\frac{\omega_{n0}^2}{s^2+\left(2\zeta_0\omega_{n0}+\omega_{n0}^2\beta\right)s+\omega_{n0}^2}. \qquad (6.51)$$

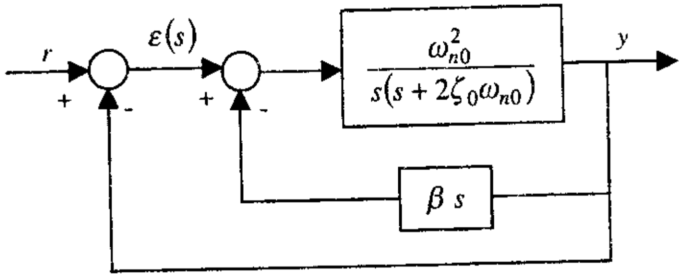


Fig. 6.10

Din (6.51) rezultă că factorul relativ de amortizare al sistemului corectat este mai mare şi se calculează cu relaţia:

$$\zeta_c=\zeta_0+\frac{\omega_{n0}\beta}{2}\ (\text{pentru } \beta>0).$$

Eroarea în raport cu referinţa de tip rampă este:

$$\varepsilon_v=\frac{2\zeta_0}{\omega_{n0}}+\beta$$

ceea ce evidenţiază o înrăutăţire a comportării în regim permanent.

Din analiza celor două variante de compensare rezultă că efectul de stabilizare produs de αT şi de β este acelaşi.

Exemplul 6.1:

Se consideră sistemul a cărui funcţie de transfer a căii directe este:

$$H_d(s)=\frac{144}{s(0.1s+1)}.$$

Se cere a corecta această funcţie de transfer, astfel încât răspunsul indicial al sistemului de reglare să fie amortizat critic.

Pentru sistemul iniţial necompensat $\omega_{n0}^2=144$ *şi* $\zeta_0=0.417$.

Performanţele SRA în acest caz sunt:

$$\sigma=23.5\%,\ t_t\cong\frac{4}{\zeta_0\omega_{n0}}=\frac{4}{0.417\cdot 12}\cong 3.2\,s,\ \varepsilon_{st}=0\ \text{şi}$$

$$\varepsilon_v=\frac{2\zeta_0}{\omega_{n0}}\cong 0.0695\,s.$$

Răspunsul amortizat critic se obţine pentru $\zeta=1$.

Introducând un compensator cu funcţia de transfer:

$$H_c(s)\cong 1+\alpha Ts$$

rezultă un sistem de ordinul doi cu aceeaşi pulsaţie naturală şi $\zeta_c=\zeta_0+\alpha T\frac{\omega_{n0}}{2}$.

Punând condiţia $\zeta_c=1=\alpha_0+\alpha T\frac{\omega_{n0}}{2}$, *rezultă* $\alpha T=0.0972$.

În cazul utilizării unei compensări printr-o buclă minoră se obţine un rezultat similar:

$$\zeta_c=\zeta_0+\frac{\omega_{n0}\beta}{2}=1=0.417+6\cdot\beta$$

$$\beta=0.0972.$$

De notat că β *şi* αT *sunt identice.*

Eroarea la viteză în acest ultim caz este:

$$\varepsilon_v=\frac{2\zeta_0}{\omega_{n0}}+\beta=0.0695+0.0972=0.1667\,s.$$

6.5. Proiectarea SRA pe baza caracteristicilor logaritmice de frecvenţă

Pentru unele procese pot fi obţinute cu uşurinţă modele matematice neparametrice sub forma caracteristicilor de frecvenţă. Utilizarea acestor modele pentru proiectarea legii de reglare are la bază criterii de performanţă definite în domeniul frecvenţelor cu reală semnificaţie inginerească.

Dacă pentru un proces se cunosc caracteristicile $A_p(\omega)$ şi $\varphi_p(\omega)$ definite astfel: $A_p(\omega)=\left|H_p(j\omega)\right|$ şi $\varphi_p(\omega)=\arg\left[H_p(j\omega)\right]$, prezentate sub forma grafică în figura 6.11*a*, acestea pot fi folosite cu bune rezultate pentru proiectarea SRA.

Caracteristicile de frecvenţă $A(\omega)$ şi $\varphi(\omega)$ în reprezentare logaritmică (caracteristicile BODE) sunt folosite frecvent de inginerii practicieni pentru proiectarea SRA. Caracteristicile logaritmice

aproximative pentru sistemul caracterizat prin $A_p(\omega)$ şi $\varphi_p(\omega)$ sunt prezentate în figura 6.11*b*.

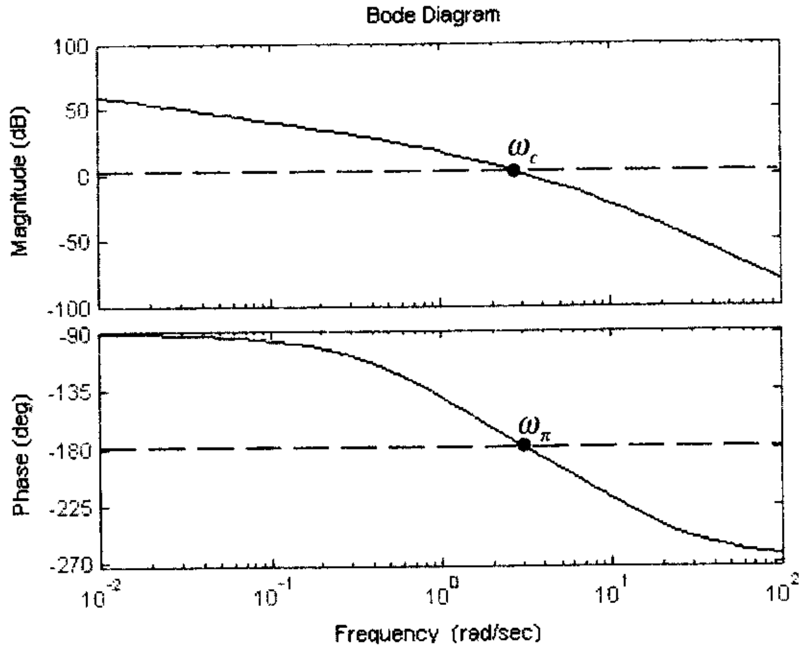


Fig. 6.11

Prima teoremă a lui BODE stabileşte corespondenţa între pantele caracteristicii logaritmice $A(\omega)$ şi caracteristica $\varphi(\omega)$. O pantă de $20\alpha dB/decadă$ corespunde la o fază $\varphi = 90° \cdot \alpha$, pentru $\alpha = 0, \pm 1, \pm 2$. Mai mult, această teoremă stabileşte că panta la pulsaţia de tăiere ω_c dă informaţii asupra gradului de stabilitate. Pentru o pantă de $-20dB/decadă$ rezultă o margine de fază egală cu $90°$, ceea ce implică un sistem cu un ridicat grad de stabilitate. Astfel, o primă condiţie pentru asigurarea stabilităţii unui SRA este ca panta caracteristicii logaritmice $A(\omega)$ în jurul pulsaţiei de tăiere trebuie să fie de $-20dB/decadă$ pentru un domeniu suficient de mare de frecvenţe în jurul pulsaţiei de tăiere.

De remarcat faptul că definirea pulsaţiilor ω_c pentru care amplitudinea este egală cu 1 (caracteristica $A(\omega)$ intersectează axa frecvenţelor) şi ω_π pentru care argumentul funcţiei $H(j\omega)$ este de $-180°$ permite determinarea marginii de amplitudine şi a marginii de fază (v. cap.3).

Cea de-a doua teoremă a lui BODE stabileşte că, pentru sisteme liniare de fază minimă, caracteristicile $A(\omega)$ şi $\varphi(\omega)$ sunt unic determinate. Când specificăm panta caracteristicii $A(\omega)$ pentru un interval de frecvenţe avem specificată caracteristica $\varphi(\omega)$ pe acelaşi interval de frecvenţe. În [10, 34] sunt prezentate relaţii analitice pentru definirea celor două teoreme. Teorema a doua a lui Bode evidenţiază interdependenţa amplitudinii şi a fazei pentru întregul domeniu de frecvenţe pozitive.

Procedura de proiectare are la bază *transpunerea cerinţelor de performanţă* (M_A, M_φ, ω_c) *într-o formă dorită a caracteristicilor* $A(\omega)$ *şi* $\varphi(\omega)$ *în reprezentare logaritmică*. Prin ajustări iterative asupra structurii şi parametrilor algoritmului de reglare se pot obţine caracteristici de frecvenţă dorite.

Pentru o structură convenţională de SRA (fig. 6.5), pornind de la expresia funcţiei de transfer $H_d(s)$:

$$H_d(s) = H_R(s) \cdot H_P(s)$$

se pot defini caracteristicile $A_d(\omega)$ şi $\varphi_d(\omega)$:

$$A_d(\omega) = 20\log\left|H_d(j\omega)\right| = 20\log\left|H_R(j\omega)\right| + 20\log\left|H_P(j\omega)\right|$$

$$\varphi_d(\omega) = \arg H_R(j\omega) + \arg H_P(j\omega) = \varphi_R(\omega) + \varphi_P(\omega). \quad (6.52)$$

Dacă se notează cu $A_R(\omega)$ şi respectiv $A_P(\omega)$ caracteristicile de modul în reprezentare logaritmică ale regulatorului şi obiectului condus, rezultă:

$$A_R(\omega) = A_d(\omega) - A_P(\omega) \quad (6.53)$$

şi, în mod similar, se obţine caracteristica $\varphi_R(\omega)$ a regulatorului:

$$\varphi_R(\omega) = \varphi_d(\omega) - \varphi_P(\omega). \quad (6.54)$$

Întrucât expresia $H_P(s)$ se presupune cunoscută în faza de proiectare, rezultă că pentru obţinerea algoritmului de reglare definit prin caracteristica $A_R(\omega)$ şi $\varphi_R(\omega)$ se cere a construi $A_d(\omega)$ şi $\varphi_d(\omega)$ astfel încât să fie satisfăcute cerinţele de performanţă. Cu alte cuvinte, $A_d(\omega)$ şi $\varphi_d(\omega)$ reprezintă caracteristici de frecvenţă dorite, construite pentru a satisface cerinţe impuse de performanţă.

Datorită folosirii caracteristicilor asimptotice, aplicarea relaţiilor (6.53) şi (6.54) este foarte simplă. Astfel, prin folosirea unor reţele de corecţie de anticipaţie sau de întârziere şi combinaţii ale acestora, se poate asigura forma dorită a caracteristicilor $A_d(\omega)$ şi $\varphi_d(\omega)$ pentru satisfacerea

tuturor performanţelor. Forma generală a funcţiei de transfer a unei reţele de corecţie introdusă în cascadă cu $H_P(s)$ este:

$$H_c(s)=\frac{k_c\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)}. \tag{6.55}$$

În acest caz problema se reduce la alegerea judicioasă a polilor şi zerourilor compensatorului (reţelei de corecţie) pentru a satisface performanţele impuse (obţinerea caracteristicilor dorite $A_d(\omega)$ şi $\varphi_d(\omega)$).

Caracteristica dorită $A_d(\omega)$ poate fi trasată pornind de la obţinerea unei pante de -20 $dB/decadă$ în jurul pulsaţiei de tăiere ω_c definită prin condiţia $A_d(\omega_c)=0$, pantă care se cere a fi menţinută constantă într-o gamă suficient de mare de pulsaţii în vecinătatea pulsaţiei ω_c. O asemenea cerinţă, conform teoremei lui Bode [76], asigură performanţele tranzitorii bune.

O altă posibilitate de trasare a caracteristicii $A_d(\omega)$ este aceea de a folosi relaţiile stabilite între performanţele sistemului şi poziţiile polilor şi zerourilor funcţiei de transfer $H_0(s)$ definită în funcţie de $H_d(s)$:

$$H_0(s)=\frac{H_d(s)}{1+H_d(s)}. \tag{6.56}$$

Din (6.56) rezultă că asimptotele de înaltă frecvenţă coincid pentru caracteristicile de frecvenţă ale sistemului închis şi deschis, întrucât $H_0(j\omega)$ şi $H_d(j\omega)$ tind în acelaşi mod către zero când $\omega\to\infty$.

Pentru a exemplifica, să considerăm sistemul de ordinul al 2-lea pentru care definim expresiile funcţiilor de transfer $H_0(s)$ şi $H_d(s)$:

$$H_d(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}=\frac{\omega_n/2\zeta}{s\left(\frac{s}{2\zeta\omega_n}+1\right)} \tag{6.57}$$

$$H_0(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}. \tag{6.58}$$

La frecvenţe joase se obţine caracteristica:

$$H_{dj.f}(j\omega)=\frac{k_v}{j\omega},\ k_v=\frac{\omega_n}{2\zeta},$$

iar modulul

$$A_{dj.f}=\left|H_{dj.f}(j\omega)\right|=\frac{k_v}{\omega}. \tag{6.59}$$

Asimptota de joasă frecvenţă are o pantă de -20 $dB/decadă$, iar pentru $\omega=1$ rad/s se obţine:

$$20\log\left|H_{dj.f}(j\cdot 1)\right|=[k_v]_{dB}. \tag{6.60}$$

Din (6.57) rezultă pulsaţia de frângere $\omega_f=2\zeta\omega_n$; de la această pulsaţie, asimptota de înaltă frecvenţă are panta de -40 $dB/decadă$, care coincide cu asimptota de înaltă frecvenţă a caracteristicii sistemului închis. În figura 6.12 se prezintă caracteristicile de frecvenţă ale sistemului deschis şi închis, fiind satisfăcute cerinţele de performanţă impuse prin ζ şi ω_n. Satisfacerea şi a altor performanţe, spre exemplu $\varepsilon_v\le\varepsilon_{v0}$, presupune ajustarea coeficientului k_v care se concretizează practic prin translatarea caracteristicii $A(\omega)$. Pentru a nu fi alterate prin această modificare a factorului de amplificare performanţele sistemului, se utilizează o reţea de corecţie de anticipaţie-întârziere cu o funcţie de transfer:

$$H_c(s)=\frac{j\omega\alpha T+1}{j\omega T+1} \tag{6.61}$$

cu α ales în concordanţă cu cerinţele impuse de deplasarea caracteristicii $A(\omega)$, pentru a satisface cerinţa $K_v\ge K_{v0}$. Utilizarea reţelei de corecţie (6.61) şi alegerea convenabilă a constantelor T şi αT asigură satisfacerea tuturor performanţelor, caracteristica de frecvenţă corectată coincide cu caracteristica dorită pentru un domeniu larg de frecvenţe (v. fig. 6.12).

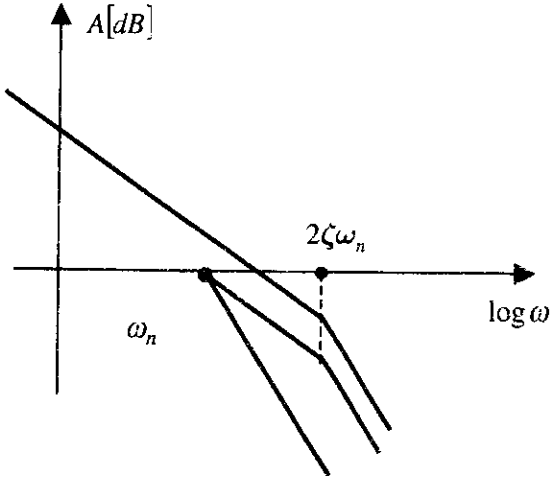


Fig. 6.12

Constantele T şi αT se aleg având în vedere concluziile rezultate din teorema lui Bode, precum şi considerente suplimentare legate de alterarea cât mai redusă a performanţelor determinate de polii dominanţi.

În figura 6.13 sunt prezentate caracteristicile $A_c(\omega)$ şi $\varphi_c(\omega)$ ale reţelei de corecţie de anticipaţie-întârziere.

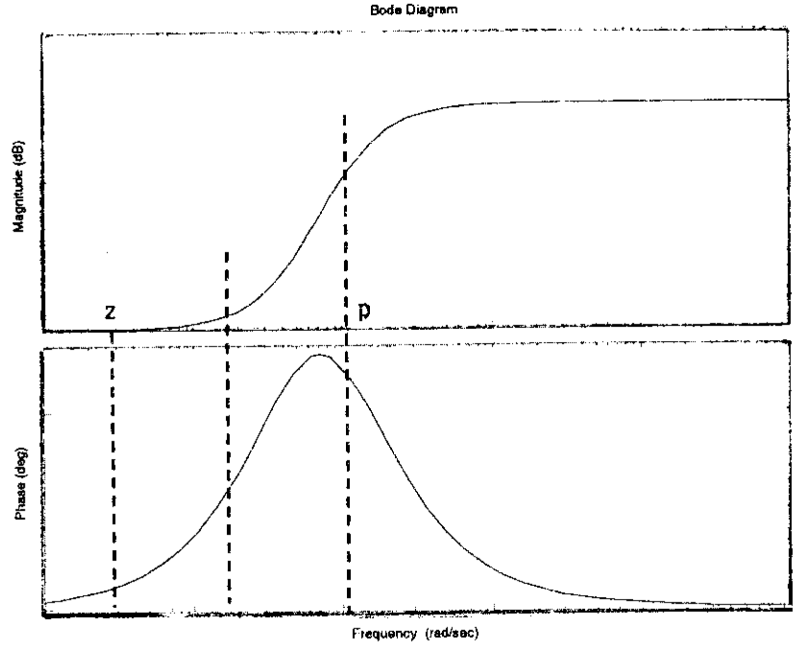


Fig. 6.13

Odată construită caracteristica $A_d(\omega)$, care asigură satisfacerea tuturor performanţelor, se obţine caracteristica $A_R(\omega)$ prin utilizarea relaţiei (6.53).

Folosind cerinţe de performanţă ca *margine de amplitudine* şi *margine de fază* se pot trasa caracteristicile dorite $A_d(\omega)$ şi $\varphi_d(\omega)$ prin introducerea în sistem a unor compensatoare (algoritmi de reglare), care să corecteze în mod corespunzător caracteristicile de frecvenţă ale obiectului condus.

Etapele de proiectare ale unui compensator pe baza caracteristicilor de frecvenţă în reprezentare logaritmică sunt:

– se trasează $A_p(\omega)$ şi $\varphi_p(\omega)$, evaluându-se M_A, M_φ şi coeficienţii de eroare pentru sistemul necompensat (obiectul condus);

– se determină cerinţa de fază pentru a satisface condiţia $M_\varphi \geq M_{\varphi 0}$, respectiv necesarul de avans de fază, ştiind că valoarea maximă a fazei pentru o reţea de tipul (6.61) se obţine la o frecvenţă $\omega_m = \sqrt{zp} = \dfrac{1}{T\sqrt{\alpha}}$. Faza se calculează pornind de la relaţia:

$$H_c(j\omega) = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{T\alpha j\omega + 1}{Tj\omega + 1} = \frac{1}{\alpha}\left[\frac{(\alpha Tj\omega + 1)(1 - Tj\omega)}{1 + T^2\omega^2}\right]$$

sau

$$H_c(j\omega) = \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1 + \alpha T^2\omega^2}{1 + T^2\omega^2} + j\frac{\alpha T\omega - T\omega}{1 + T^2\omega^2}\right]$$

şi este dată de:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\alpha T\omega - T\omega}{1 + \alpha T^2\omega^2},$$

sau pentru $\omega = \omega_m$:

$$\operatorname{tg}\varphi_m = \frac{\alpha - 1}{2\sqrt{\alpha}} \text{ sau } \sin\varphi_m = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \qquad (6.62)$$

– se calculează α din ecuaţia (6.62) şi se determină amplitudinea din ecuaţia

$$A_d(\omega) = -20\log\alpha + 20\log\sqrt{1 + \alpha^2T^2\omega^2} - 20\log\sqrt{1 + T^2\omega^2}$$

care, pentru $\omega = \omega_m$, devine:

$$A_{dB}(\omega_m) = -10\log\alpha$$

– se evaluează $10\log\alpha$ şi se determină frecvenţa unde curba $A(\omega)$ necompensată este egală cu $-10\log\alpha$. Această frecvenţă este noua frecvenţă de tăiere şi ω_m simultan deoarece compensatorul realizează o amplificare egală cu $-10\log\alpha$ la $\omega = \omega_m$.

Se reprezintă răspunsul în frecvenţă al sistemului compensat cu verificarea satisfacerii cerinţei de margine de fază şi se repetă în continuare etapele anterioare, dacă este necesar.

Exemplul 6.2:

Să considerăm un SRA având $H_d(s) = \dfrac{K}{s(s+2)}$. *Se cere a proiecta un compensator, astfel încât eroarea în regim permanent la intrare rampă să fie mai mică decât 5% din amplitudinea rampei, iar* $M\varphi \geq 45°$.

Din cerințele de precizie rezultă:

$$K_v = \frac{1}{\varepsilon_v} = 20$$

deci:

$$H_d(j\omega) = \frac{K_v}{j\omega(j\omega+2)} = \frac{10}{j\omega(0.5j\omega+1)}.$$

Caracteristica $A_d(\omega)$ pentru acest sistem necompensat este reprezentată în figura 6.14. Frecvența de tăiere pentru sistemul necompensat este de $6.2\,rad/s$, iar marginea de fază la această frecvență este determinată direct din ecuația:

$$\varphi(\omega) = -90 - arctg0.5\omega_c = -162°.$$

Astfel, se obține în acest caz o margine de fază

$$M_\varphi = 180 + \arg H_d(j\omega_c) = 180° - 162° = 18°.$$

Rezultă că trebuie adăugată o rețea de anticipație în așa fel încât să se obțină $M_\varphi = 45°$, la noua frecvență de tăiere ω_c'. Deoarece $\omega_c' > \omega_c$, rezultă o creștere a fazei sistemului compensat. Creșterea de fază va fi $45° - 18° = 27°$, la care vom adăuga încă 10% pentru a se asigura un domeniu suficient de larg pentru M_φ. Astfel, vom proiecta o rețea cu o anticipație de fază egală cu $30°$.

Pentru calculul factorului K_c folosim relația de la pasul al treilea

$$\sin 30° = \frac{\alpha-1}{\alpha+1} = 0.5$$

sau

$$\alpha = 3.$$

Faza maximă apare la ω_m și această frecvență va fi selectată să coincidă cu ω_c'. Amplitudinea la ω_m va fi egală cu:

$$20\log\alpha = 20\log 3 = 9.6dB.$$

Astfel, frecvența de tăiere este evaluată pentru

$$|H_d H_c(j\omega)| = -9.6dB \text{ și în consecință}$$

$$\omega_m = \omega_c' = 8.4\,rad/s.$$

Desenând $A_d(\omega)$, astfel încât intersecția cu axa absciselor să aibă loc la $\omega = \omega_c' = 8.4\,rad/s$, se observă că $z = 9.6$ și $p = \alpha z = 19.2$. Astfel, rețeaua de corecție este

$$H_c(s) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1+s/9.6}{1+s/19.2}.$$

Factorul total de amplificare trebuie multiplicat cu 3 întrucât rețeaua de corecție a introdus o atenuare egală cu $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{3}$.

Sistemul compensat are funcția de transfer

$$H_c(s)H_d(s) = \frac{20(s/9.6+1)}{s(0.5s+1)(s/19.2+1)}.$$

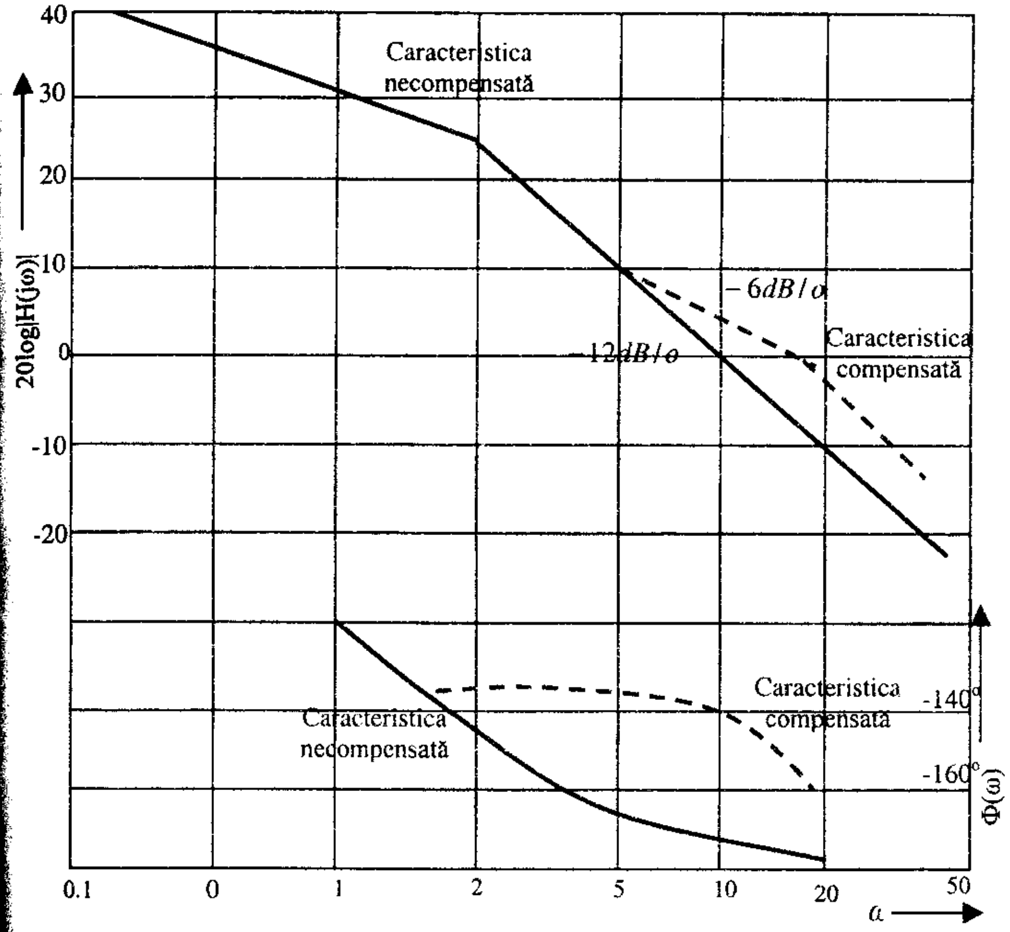


Fig. 6.14

Pentru a verifica dacă s-a obținut marginea de fază dorită, evaluăm faza sistemului compensat la $\omega = \omega_c' = 8.4\,rad/s$:

$$\varphi(\omega_c') = -90° - arctg0.5\omega_c' - arctg\frac{\omega_c'}{19.2} + arctg\frac{\omega_c'}{9.6} = -136.3°.$$

Rezultă astfel rezerva de fază dorită.

În mod similar, se poate utiliza o rețea de corecție (un compensator) de tipul întârziere-anticipație a cărei funcție de transfer este:

$$H_c(s) = \alpha\frac{1+Ts}{1+\alpha Ts},\ \alpha > 1.$$

Caracteristicile de frecvență ale acestui compensator sunt prezentate în figura 6.15.

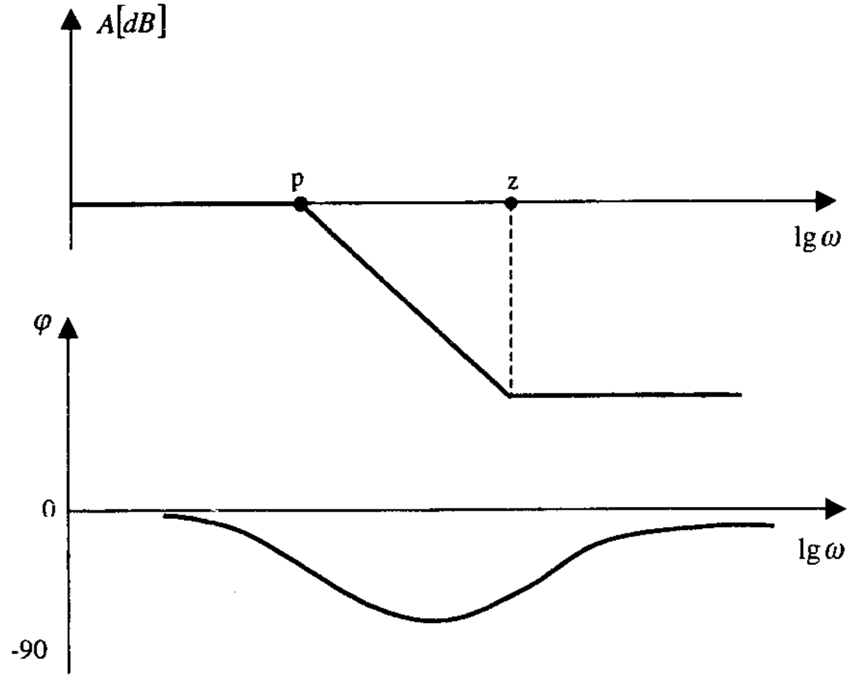


Fig. 6.15

Un asemenea compensator se folosește pentru a obține o îmbunătățire a marginii de amplitudine printr-o frecvență de tăiere mai scăzută și, în mod uzual, M_{φ} a sistemului este mai mare și astfel specificațiile de performanță ale sistemului sunt satisfăcute. Efectul atenuator al acestui compensator poate fi folosit pentru îmbunătățirea stabilității prin „reșaparea" caracteristicii $A(\omega)$ necompensată prin plasarea frecvențelor $\frac{1}{\alpha T}$ și $\frac{1}{T}$ în domeniul de frecvențe, astfel încât panta de $-20dB/dec$ a caracteristicii $A(\omega)$ compensată să asigure cerințele impuse de margine de fază.

Procedura de proiectare a unui compensator cu întârziere de fază folosind caracteristicile $A(\omega)$ și $\varphi(\omega)$ în reprezentare logaritmică presupune parcurgerea următoarelor etape:

– se trasează diagramele Bode ale sistemului necompensat cu amplificarea astfel ajustată, încât să fie satisfăcute cerințele de comportare

dorită în regim permanent. Se asigură valorile dorite pentru K_p, K_v sau K_a, după caz;

– se determină M_{φ} a sistemului necompensat și dacă este insuficientă, se merge la etapele următoare;

– se determină frecvența $\omega_c^{'}$ unde M_{φ} cerută ar putea fi satisfăcută;

– se plasează zeroul compensatorului cu o decadă sub noua frecvență de tăiere $\omega_c^{'}$;

– se măsoară atenuarea necesară la $\omega_c^{'}$ în scopul de a asigura $A\left(\omega_c^{'}\right)=0$;

– se calculează α astfel încât atenuarea să fie egală cu $20\lg\alpha$;

– e poziționează polul compensatorului la $\omega_p=\frac{1}{\alpha T}=\frac{\omega z}{\alpha}$ și astfel proiectarea este încheiată.

Exemplul 6.3

Se consideră un SRA cu funcția de transfer a căii directe

$$H_d(s)=\frac{K}{s(s+2)}.$$

Se cere: $K_v=20$; $M_{\varphi}=45^{\circ}$.

Diagramele Bode ale sistemului sunt prezentate în figura 6.16. Marginea de fază a sistemului necompensat este $M_{\varphi}=18^{\circ}$.

Dacă se dorește o margine de fază egală cu 45°, *se poate ușor obține noua frecvență de tăiere* $\omega_c^{'}=1.5\,rad/s$ *pentru care* $\varphi\left(\omega_c^{'}\right)=-130^{\circ}$. *S-a ales* $\omega_c^{'}=1.5\,rad/s$ *pentru a obține* $M_{\varphi}^{'}=50^{\circ}$ *cu o rezervă de* 5°.

Atenuarea necesară pentru a obține această nouă pulsație de tăiere este egală cu $20dB$, *ceea ce permite a găsi* $\alpha=10$ ($20dB=20\log\alpha$). *Astfel, se alege zeroul la o distanță de o decadă sub pulsația de tăiere* $\omega_z=\frac{\omega_c^{'}}{10}=0.15\,rad/s$, *iar polul se plasează la* $\omega_p=\frac{\omega_z}{\alpha}=0.015\,rad/s$. *În aceste condiții, sistemul compensat este caracterizat prin:*

$$H_c^d(j\omega)=H_c(j\omega)H_d(j\omega)=\frac{20(6.66j\omega+1)}{j\omega(0.5j\omega+1)(6.66j\omega+1)}.$$

Răspunsul în frecvență al sistemului compensat este prezentat în figura 6.16 cu linie punctată.

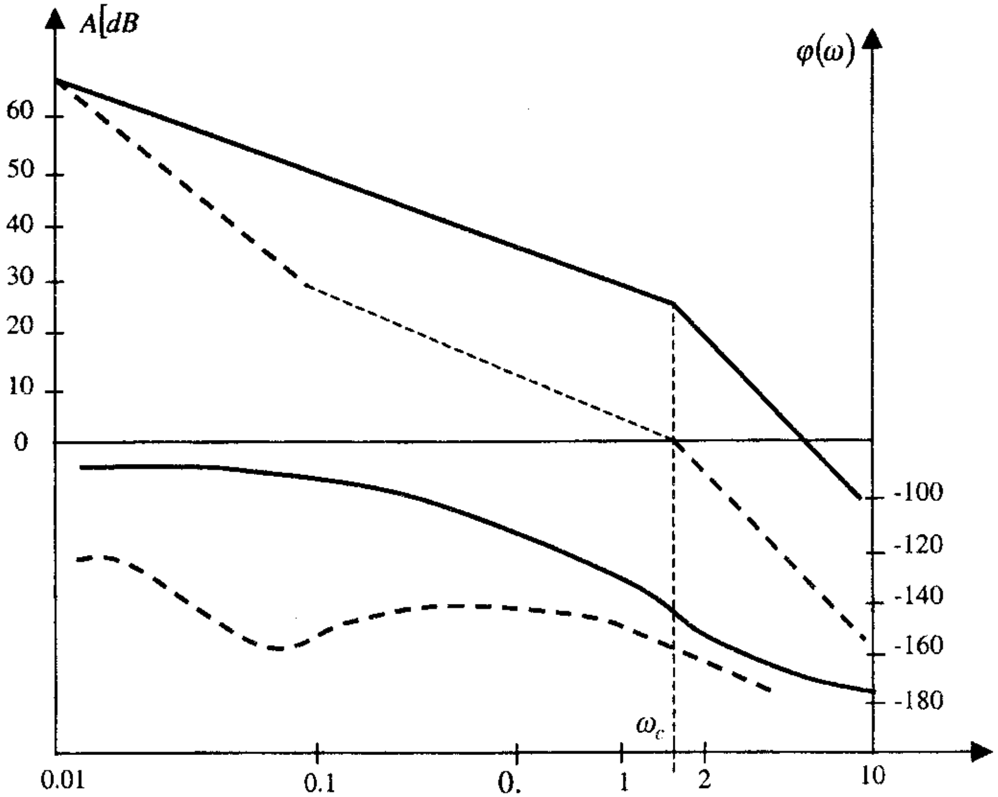


Fig. 6.16

Este evident că o asemenea rețea de corecție (compensator) introduce o atenuare cu frecvența de tăiere mai redusă și astfel se obține o creștere a marginii de fază.

Evaluând marginea de fază pentru $\omega_c' = 1.5\, rad/s$, *obținem că* $M_\varphi = 45°$, *ceea ce corespunde cerinței impuse.*

6.6. Proiectarea pe baza caracteristicilor amplitudine-fază

Pentru un sistem de ordinul al II-lea se poate stabili cu ușurință relația între comportarea în timp și cea în frecvență dacă se determină pulsația de rezonanță ω_r și în mod corespunzător valoarea maximă (de vârf) a modulului M_v, $M_v = M(\omega_r)$.

Calculând $M(\omega)$ și $\frac{dM}{d\omega} = 0$ se obține pulsația de rezonanță:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}\,,\ \zeta \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \tag{6.63}$$

și

$$M_v = M(\omega_r) = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - 2\zeta^2}} \tag{6.64}$$

având în vedere că $M(0) = 1$ pentru comportarea dorită în raport cu referința treaptă unitară.

Din (6.64) rezultă cu ușurință:

$$\zeta^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 1/M_v^2}}{2}\,. \tag{6.65}$$

Relația dintre M_v și suprareglaj se obține cu ușurință dacă ținem seama că

$$\sigma = e^{-\zeta\frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\,. \tag{6.66}$$

În tabelul 6.1 se prezintă valorile suprareglajului pentru diferite valori ale lui M_v.

Tabelul 6.1

M_v	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30	1.35	1.40	1.45
ζ	0.58	0.54	0.5	0.47	0.44	0.42	0.4	0.38	0.37
σ	0.1	0.13	0.16	0.18	0.2	0.22	0.24	0.26	0.28

Din (6.65) și (6.66) rezultă dependența $\sigma = f(M_v)$:

$$\sigma = \exp\left[-\pi\left(M_v - \sqrt{M_v^2 - 1}\right)\right] \tag{6.67}$$

sau

$$M_v = \frac{-\pi^2 - \ln^2\sigma}{2\pi\ln\sigma}\,. \tag{6.68}$$

În mod uzual se recomandă ca $M_v = 1.7$ sau, în cazuri de SRA la care suprareglajul trebuie să fie cât mai mic, se recomandă $M_v = 1.3$. Desigur, ținând seama de cerințele de performanță impuse în domeniul frecvențelor, pentru ω_B cât mai mare se recomandă $M_v = 1$.

Procedurile de proiectare bazate pe caracteristici de frecvență sunt aproximative, însă reprezintă o etapă preliminară pentru o proiectare exactă.

Pentru un sistem de reglare automată cu două blocuri funcționale conectate ca în figura 6.17, se poate obține $H_0(s)$ sub forma:

$$H_0(s)=\frac{H(s)}{1+H(s)G(s)} \tag{6.69}$$

sau

$$H_0(s)=\frac{1}{G(s)}\left[\frac{H(s)G(s)}{1+H(s)G(s)}\right] \tag{6.70}$$

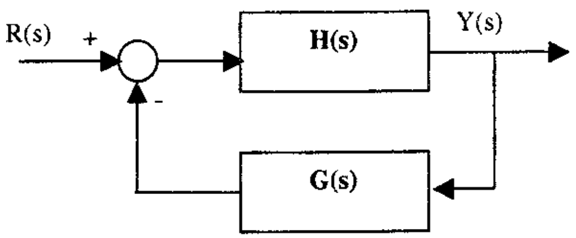


Fig. 6.17

Termenul $1+H(s)G(s)$ poate fi ușor aproximat ținând seama de valoarea amplitudinii (în decibeli) a produsului $H(s)G(s)$ care poate fi reprezentat printr-o dreaptă de pantă constantă.

Astfel:

$$1+H(j\omega)G(j\omega)\cong 1 \text{ pentru } |H(j\omega)G(j\omega)|<<1 \tag{6.71}$$

$$1+H(j\omega)G(j\omega)\cong H(j\omega)G(j\omega) \text{ pentru } |H(j\omega)G(j\omega)|>>1. \tag{6.72}$$

Ținând seama de aceste aproximații și înlocuind în (6.70) se obține:

$$H_0(s)\cong H(s) \text{ pentru } |H(j\omega)G(j\omega)|<1 \tag{6.73}$$

și

$$H_0(s)\cong\frac{1}{G(s)} \text{ pentru } |H(j\omega)G(j\omega)|>1. \tag{6.74}$$

Aceste ultime relații aproximative prezintă un important interes în inițierea procedurii de proiectare a unui SRA pe baza caracteristicilor de frecvență. Aceste relații sunt aproximative și evident se introduc reale erori pentru frecvențele unde $H(s)G(s)=1$. Calculul erorilor ce apar în acest caz permite corecția valorilor aproximative cu care se lucrează în faza preliminară.

Pentru a ilustra modul de utilizare a acestor aproximații considerăm un exemplu.

Exemplul 6.4

Se consideră SRA având funcțiile de transfer:

$$H(s)=\frac{K}{1+Ts}$$

și

$$G(s)=1.$$

Atunci:

$$H_0(s)=\frac{K}{1+K}\frac{1}{\frac{T}{1+K}s+1}\equiv\frac{k_0}{T_0 s+1}.$$

Pentru $K=10$ și $T=1$ sunt prezentate aproximațiile pentru $|H_0(j\omega)|$ și $|H(j\omega)G(j\omega)|$ în figura 6.18.

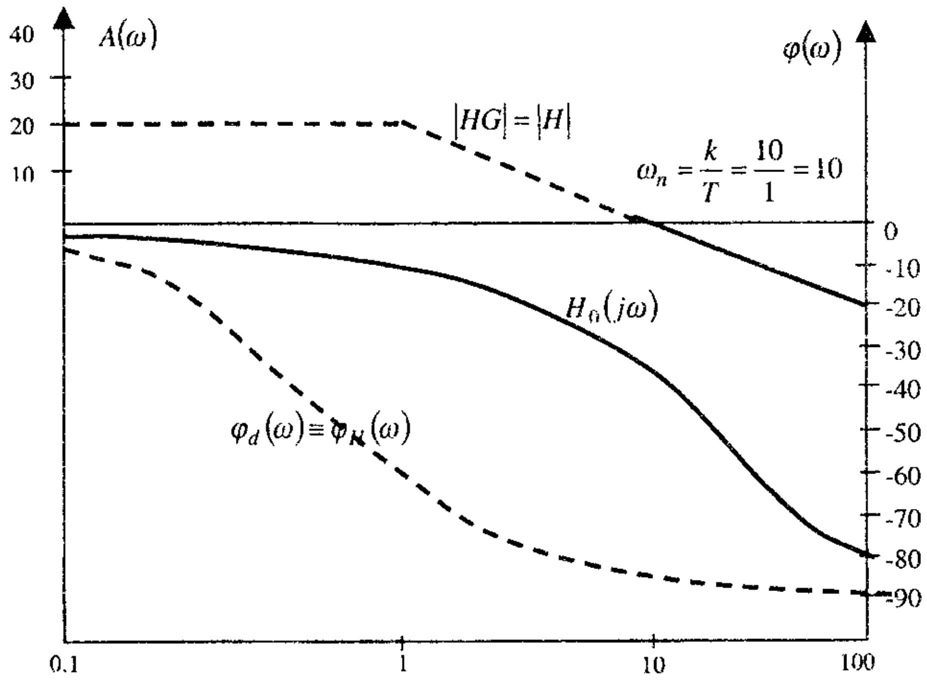


Fig. 6.18

Curba întreruptă reprezintă caracteristicile $A(\omega)$ și $\varphi(\omega)$ pentru $H_d(j\omega)=H(j\omega)$. La frecvențe mai înalte decât ω=1 rad/s, $H(j\omega)$ și $H_d(j\omega)$ au o atenuare de $20\,dB/dec$. La $\omega=\omega_n=\frac{K}{T}=10$, $H(j\omega)$ și $H_d(j\omega)$

se aproximează a fi egale cu $0dB$. Pentru frecvențe joase, $H_0(j\omega)$ este egală cu $\frac{1}{G(s)} = 1$ și este prezentată în figura 6.18 ca fiind identică cu abscisa.

În acest capitol au fost prezentate diferite proceduri pentru proiectarea SRA pe baza caracteristicilor de frecvență utilizând compensatoare de tipul *anticipație -întârziere* , *întârziere-anticipație* și bucle minore cu reacție de viteză.

Comparația între diferitele tipuri de compensatoare și proceduri de proiectare evidențiază următoarele caracteristici, avantaje, dezavantaje și domenii de aplicabilitate [76, 86], conform tabelului 6.2:

Fiecare dintre procedurile de compensare asigură o îmbunătățire a stabilității, dacă sunt folosite în mod corespunzător.

Compensarea cu avans de fază se aplică în cazul în care se dorește creșterea vitezei de răspuns a SRA cu obținerea unui nivel tolerabil al efectului zgomotului la frecvențe înalte.

Din comparația celor patru proceduri rezultă că fiecare aplicație trebuie tratată cu multă precauție, selectându-se cea mai bună procedură ținând seama de particularitățile procesului și de cerințele de performanță impuse.

6.7. Sinteza legii de reglare prin proceduri de alocare a polilor

6.7.1. Formularea problemei

Se consideră procesul caracterizat prin modelul:

$$H_p(s) = \frac{B_p(s)}{A_p(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_{n-1} s^{n-1}}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots a_n s^n} \quad (6.75)$$

iar structura legii de reglare este:

$$H_R(s) = \frac{Q_R(s)}{P_R(s)} = \frac{q_0 + q_1 s + \cdots + q_{n_q} s^{n_q}}{p_0 + p_1 s + \cdots + p_{n_p} s^{n_p}} \quad (6.76)$$

Ambele funcții de transfer sunt în forma ireductibilă și sunt strict proprii.

Tabelul 6.2

Tipul compensatoarelor	Caracteristici	Avantaje	Dezavantaje	Aplicabilitate
întârziere de fază	– descrește banda de frecvențe a SRA; – crește amplificarea la frecvențe joase; – descrește ω_n și crește ζ.	– îmbunătățește stabilitatea; – descrește efectul zgomotului la înaltă frecvență; – reduce eroarea staționară.	– crește durata regimului tranzitoriu; – necesitatea reali-zării unor constante de timp mari.	– largă aplicabilitate pentru cazul în care se doresc valori mari ale coeficienților de eroare; – nu se aplică dacă faza necompensată la frecvențe joase nu poate egala marginea de fază dorită.
avans de fază	– crește banda de frecvențe a sistemului; – crește amplificarea la frecvențe înalte; – crește ω_n și ζ.	– îmbunătățește stabilitatea; – reduce durata regimului tranzitoriu.	– necesită amplificare suplimentară; – crește zgomotul la frecvențe înalte; – poate necesita valori mari ale constantelor de timp.	– foarte utilizat când se dorește creșterea vitezei de răspuns a sistemului.
avans- întârziere de fază	– crește amplificarea la joasă frecvență; – crește amplificarea la înaltă frecvență; – crește ω_n și ζ.	– îmbunătățește stabilitatea; – reduce eroarea în regim staționar; – reduce durata regimului tranzitoriu.	– crește zgomotul la frecvențe înalte; – necesită valori mari ale constantelor de timp.	– aplicabil când se dorește creșterea coeficienților de eroare; – aplicabil când se dorește creșterea vitezei de răspuns.
buclă minoră de viteză	– crește banda de frecvențe a sistemului; – crește amplificarea la frecvențe înalte; – crește ω_n și ζ.	– îmbunătățește stabilitatea; – reduce durata regimului tranzitoriu; – relativ independent de mediu; – permite izolarea dinamicii nedorite într-o porțiune a SRA.	– crește eroarea staționară; – crește zgomotul la înaltă frecvență, însă mai puțin ca în cazul rețelelor cu avans de fază;	– foarte utilizată când se dorește un răspuns tranzitoriu rapid; – utilizat în medii ostile, necesitând un spațiu mic; – utilizat pentru izolarea dinamicii nedorite.

Polinomul caracteristic dorit al SRA este de forma:

$$P_c(s)=\alpha_l s^l+\alpha_{l-1}s^{l-1}+\cdots+\alpha_0 \quad (6.77)$$

unde coeficienții α_i se obțin printr-o alocare corespunzătoare a polilor sistemului. Dacă polinomul $P_c(s)$ este arbitrar specificat se cere acel algoritm de reglare $H_R(s)$ care pentru $H_p(s)$ dat să asigure existența polinomului caracteristic în forma (6.77).

Pentru a evidenția această idee, considerăm următorul exemplu [46].

Exemplul 6.5

Presupunem modelul nominal al procesului:

$$A_p(s)=s^2+3s+2,\ B_p(s)=1$$

și considerăm un regulator de forma:

$$H_R(s)=\frac{q_0+q_1 s}{p_0+p_1 s}.$$

Polinomul caracteristic al SRA este:

$$A_p(s)\cdot P_R(s)+Q_R(s)\cdot B_p(s)=\left(s^2+3s+2\right)\left(p_1 s+p_0\right)+\left(q_0+q_1 s\right).$$

Considerăm polinomul caracteristic dorit $P_c^d(s)$ *al SRA sub forma:*

$$P_c^d(s)=s^3+3s^2+3s+1.$$

Din ecuația polinomială

$$s^3+3s^2+3s+1=\left(s^2+3s+2\right)\left(p_1 s+p_0\right)+\left(q_0+q_1 s\right)$$

rezultă relația matriceală:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\3&1&0&0\\2&3&1&0\\0&2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1\\p_0\\q_1\\q_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\3\\1\end{bmatrix}.$$

Matricea coeficienților este nesingulară și astfel putem rezolva pentru p_1, p_0, q_1, q_0 *și se obțin valorile:*

$$p_1=1,\ p_0=0,\ q_1=1 \text{ și } q_0=1.$$

Astfel, polinomul caracteristic este obținut prin utilizarea unui regulator cu funcția de transfer:

$$H_R(s)=\frac{s+1}{s}.$$

De remarcat faptul că alocarea polilor depinde în esență de nesingularitatea unei matrice particulare.

TEOREMA 6.1 (Teorema lui Silvester)

Se consideră două polinoame:

$$A(s)=a_0+a_1 s+\cdots+a_n s^n$$
$$B(s)=b_0+b_1 s+\cdots+b_n s^n \quad (6.78)$$

împreună cu *matricea eliminant* M_e

$$M_e=\begin{bmatrix}a_n&0&\cdots&0&b_n&0&\cdots&0\\a_{n-1}&a_n&\cdots&0&b_{n-1}&b_n&\cdots&0\\a_{n-2}&a_{n-1}&\cdots&0&b_{n-2}&b_{n-1}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_0&a_1&\cdots&a_n&b_0&b_1&\cdots&b_n\\0&a_0&\cdots&a_{n-1}&0&b_0&\cdots&b_{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&a_0&0&0&\cdots&b_0\end{bmatrix} \quad (6.79)$$

Polinoamele $A(s)$ și $B(s)$ sunt relativ prime (coprime) dacă și numai dacă $\det(M_e)\neq 0$.

Demonstrație:

Dacă: Aproximăm că $A(s)$ și $B(s)$ nu sunt relativ prime. Atunci există o rădăcină comună λ astfel încât cele două polinoame să fie descompuse sub forma:

$$A(s)=(s-\lambda)\left(a'_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a'_0\right)$$
$$B(s)=(s-\lambda)\left(b'_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b'_0\right) \quad (6.80)$$

Eliminarea factorului $(s-\lambda)$ conduce la:

$$A(s)\left[b'_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b'_0\right]-B(s)\left[a'_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a'_0\right]=0 \quad (6.81)$$

Prin egalizarea coeficienților pe ambele părți se obține:

$$M_e\cdot\dot{\theta}=0 \quad (6.82)$$

unde

$$\dot{\theta}^T=\left[b'_{n-1}\ \cdots\ b'_0\ -a'_{n-1}\ \cdots\ a'_0\right] \quad (6.83)$$

Ecuația (6.82) are o soluție netrivială dacă și numai dacă $\det[M_e]=0$.

Numai dacă: Prin inversarea argumentului de mai sus.

Lema 6.1: Se consideră un SRA cu un singur grad de libertate cu regulatorul și modelul procesului date prin (6.76) și (6.75). Aproximăm că

$B_p(s)$ şi $A_p(s)$ sunt coprime. Presupunem că $P_c(s)$ este un polinom arbitrar cu gradul $l=2n-1$. Atunci există polinoamele $Q_R(s)$ şi $P_R(s)$ cu gradele $n_q=n_p=n-1$ astfel ca:

$$A_p(s)P_R(s)+Q_R(s)B_p(s)=P_c(s) \tag{6.84}$$

Demonstraţie:

Din (6.84), prin egalarea coeficienţilor pe ambele părţi se obţine:

$$M\begin{bmatrix} p_{n-1} \\ p_{n-2} \\ \vdots \\ p_0 \\ q_{n-1} \\ q_{n-2} \\ \vdots \\ q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_l \\ \alpha_{l-1} \\ \alpha_{l-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{bmatrix}$$

cu

$$M=\begin{bmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 & b_{n-1} & b_n & \cdots & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \cdots & 0 & b_{n-2} & b_{n-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_n & b_0 & b_1 & \cdots & b_n \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{n-1} & 0 & b_0 & \cdots & b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_0 & 0 & 0 & \cdots & b_0 \end{bmatrix} \tag{6.85}$$

În conformitate cu teorema lui Silvester, matricea M este nesingulară dacă şi numai dacă polinoamele $A_p(s)$ şi $B_p(s)$ sunt relativ prime.

Vom considera două cazuri particulare:

Cazul 1: $l=2n-1+k$, cu k un întreg pozitiv.

În acest caz, o soluţie realizabilă se obţine dacă vom alege $n_p=n-1+k$.

Astfel:

$$P_R(s)=P_a(s)+\overline{P}_R(s) \tag{6.86}$$

$$P_a(s)\overset{\Delta}{=}s^n\left[p_{n-1+k}s^{k-1}+\cdots+p_n\right] \tag{6.87}$$

$$\overline{P}_R(s)\overset{\Delta}{=}p_{n-1}s^{n-1}+\cdots+p_0 \tag{6.88}$$

Coeficienţii polinomului $P_a(s)$ pot fi calculaţi prin egalarea coeficienţilor care corespund la cele mai înalte puteri ale lui s în ecuaţia (6.84). În acest caz se aplică lema 6.1 înlocuind $P_R(s)$ prin $\overline{P}_R(s)$ şi $P_c(s)$ prin $P_c(s)-A_p(s)P_a(s)$. Astfel, o soluţie există întotdeauna dacă $A_p(s)$ şi $B_p(s)$ sunt coprime.

Cazul 2: $l<2n-1$.

În acest caz nu există soluţie decât pentru alegeri speciale ale polinomului $P_c(s)$. Acest lucru poate fi argumentat astfel:

- modelul nominal al procesului este strict propriu şi regulatorul ar putea fi cel puţin bipropriu, $n_p=l-n$;
- la limită avem $n_p=n_q=l-n$. Aceasta arată că avem cel mult $m=2l-2n+2$ coeficienţi ai regulatorului pentru a realiza polinomul caracteristic dorit. De notat că $m=l+1+(l-2n+1)$, care conduce pentru acest caz la $m<l+1$, deoarece $l<2n-1$;
- egalarea coeficienţilor în (6.84) conduce la $(l+1)$ ecuaţii; totuşi, noi am arătat deja că numărul de necunoscute este mai mic de $(l+1)$. Astfel, setul de ecuaţii este, în general, inconsistent.

De remarcat faptul că polinoamele $A_p(s)$, $B_p(s)$, $Q_R(s)$ şi $P_R(s)$ pot fi monice fără a se pierde din generalitate.

În cazul în care este cerut un regulator strict propriu, gradul minim al polinoamelor $Q_R(s)$ şi $P_R(s)$ este $n_q=n-1$ şi $n_p=n$. Pentru o alegere arbitrară a polinomului caracteristic $P_c(s)$, gradul său trebuie să fie $l=2n$.

Pentru a se garanta stabilitatea internă a SRA nu este permisă compensarea poli-zerouri instabili între regulator şi modelul procesului.

În cazul în care se doreşte compensarea poli-zerouri stabili ai regulatorului şi ai modelului procesului, se impune ca factorii ce se compensează să fie incluşi în polinomul caracteristic. În cazul unui pol $s=-p$ al modelului procesului care urmează să fie compensat de un zerou al regulatorului, polinomul caracteristic conţine factorul $(s+p)$. În acest caz, ecuaţia (6.84) are soluţie, factorul $(s+p)$ fiind comun ambelor părţi ale ecuaţiei.

Rezolvarea problemei de proiectare prin metoda alocării polilor presupune validarea condiţiei ca polinoamele $A_p(s)$ şi $B_p(s)$ să fie coprime iar dimensiunea polinoamelor $Q_R(s)$ şi $P_R(s)$ să fie aleasă în strânsă corelaţie cu dimensiunea polinoamelor $A_p(s)$ şi $B_p(s)$ şi dimensiunea polinomului caracteristic dorit.

Exemplul 6.6:

Considerăm modelul nominal al procesului:

$$H_p(s)=\frac{5}{(s+1)(s+5)}.$$

Alegem polinomul caracteristic de gradul 3 sub forma:

$$P_c(s)=(s^2+6s+18)(s+30)$$

astfel încât performanţele să fie determinate de cei doi poli complex-conjugaţi. Cel de-al treilea pol este situat suficient de departe pe axa reală negativă astfel încât să nu influenţeze performanţele SRA.

Gradele polinoamelor $Q_R(s)$ şi $P_R(s)$ sunt astfel egale cu 1.

Ecuaţia polinomială ce trebuie rezolvată este de forma:

$$(s+1)(s+5)(s+p_0)+5(q_0+q_1s)=(s^2+6s+18)(s+30).$$

Necunoscutele în acest caz sunt parametrii regulatorului (q_0, q_1, p_0).

După efectuarea calculelor, se obţine:

$p_0=30$, $q_0=78$ *şi* $q_1=2.6$.

Astfel, regulatorul recomandat are funcţia de transfer:

$$H_R(s)=\frac{78+2.6s}{s+30}.$$

În cazul în care se doreşte includerea componentei integrale în structura regulatorului, polinomul caracteristic se alege de gradul 4. Putem, de asemenea, impune condiţia ca polul la $s=-1$ din modelul procesului să fie compensat de un zero al regulatorului.

Ecuaţia polinomială ce trebuie rezolvată în acest caz are forma:

$$s(s+1)(s+5)(s+p_0)+5(q_0+q_1s)=(s+1)(s^2+6s+18)(s+30).$$

După eliminarea factorilor comuni şi egalarea coeficienţilor, se obţin parametrii regulatorului (exerciţiu pentru cititor). Cu aceste valori ale parametrilor se obţin răspunsurile indiciale prezentate în fig.6.19.

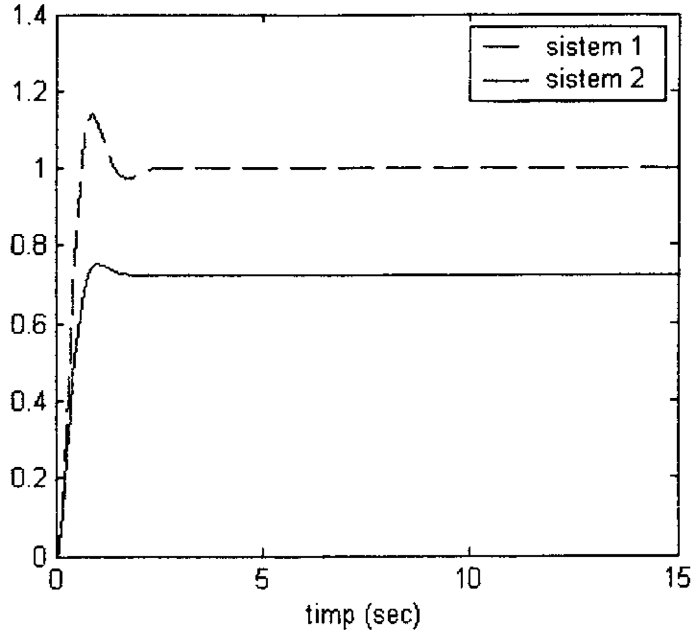


Fig. 6.19

6.7.2. Sinteza algoritmilor PI şi PID prin proceduri de alocare a polilor

Considerăm algoritmii convenţionali PI şi PID, cu parametrii de acord generalizaţi $K_p=K_R$, $K_I=\frac{K_R}{T_i}$, $K_D=K_RT_d$ şi $\alpha T_d=\tau_D$

$$H_R(s)=K_p+\frac{K_I}{s} \quad \text{(PI)} \tag{6.89}$$

şi

$$H_R(s)=K_p+\frac{K_I}{s}+\frac{K_Ds}{\tau_Ds+1} \quad \text{(PID)} \tag{6.90}$$

sau forma generală

$$H_R(s)=\frac{q_2s^2+q_1s+q_0}{p_2s^2+p_1s} \tag{6.91}$$

unde coeficienţii de acord se calculează cu relaţiile:

$$K_p=\frac{q_1p_1-q_0p_2}{p_1^2} \tag{6.92}$$

$$K_I = \frac{q_0}{p_1} \tag{6.93}$$

$$K_D = \frac{q_2 p_1^2 - q_1 p_1 p_2 + q_0 p_2^2}{p_1^2} \tag{6.94}$$

$$\tau_D = \frac{p_2}{p_1} \tag{6.95}$$

Pentru procese caracterizate prin modele de ordinul doi se pot determina parametrii de acord ai regulatoarelor PI şi PID prin proceduri de alocare a polilor pornind de la cerinţe de performanţă impuse printr-un polinom caracteristic dorit $P_c(s)$.

Dacă $\partial[A_p(s)] = 2$ şi $\partial[B_p(s)] \le 1$, parametrii regulatorului se obţin dacă $\partial[P_c(s)] = l = 4$.

În cazul în care modelul procesului conţine timp mort, se aproximează timpul mort (aproximaţia Padé de ordinul I) şi se obţine o raţională de forma:

$$H_p(s) = \frac{K_p e^{-\tau s}}{T_p s + 1} \cong \frac{K_p}{T_p s + 1} \cdot \frac{1 - \frac{s\tau}{2}}{1 + \frac{s\tau}{2}} \tag{6.96}$$

Pentru asemenea model, se recomandă regulatorul PI sau PID, iar parametrii de acord pot fi determinaţi printr-o procedură de alocare a polilor alegând în mod corespunzător polinomul caracteristic al SRA.

Exemplul 6.7:

Se consideră procesul caracterizat prin modelul:

$$H_p(s) = \frac{2}{(s+2)(s+5)}.$$

Se cere a sintetiza un algoritm PID astfel încât polii dominanţi ai sistemului să fie la $s_1 = -2 + j\sqrt{5}$ *şi* $s_2 = -2 - j\sqrt{5}$.

Polinomul caracteristic în acest caz va avea forma:

$$P_c(s) = (s^2 + 4s + 9)(s + 10)^2.$$

Algoritmul de reglare se alege de forma:

$$H_R(s) = \frac{q_0 + q_1 s + q_2 s^2}{s(s + p_0)}$$

pentru a asigura eroare staţionară egală cu zero la referinţă şi perturbaţie treaptă unitară.

Ecuaţia polinomială care trebuie rezolvată are forma:

$$s(s+2)(s+5)(s+p_0) + 2(q_0 + q_1 s + q_2 s^2) = (s^2 + 4s + 9)(s + 10)^2.$$

Soluţia acestei ecuaţii conduce la algoritmul de reglare PID a cărui funcţie de transfer este:

$$H_R(s) = \frac{450 + 55s + 30s^2}{s(s+17)}.$$

Parametrii K_p, K_I, K_D *şi* τ_D *pot fi determinaţi cu uşurinţă în funcţie de* (p_0, q_0, q_1, q_2) *(exerciţiu pentru cititor). Cu aceste valori ale parametrilor se obţine răspunsul indicial prezentat în fig.6.20.*

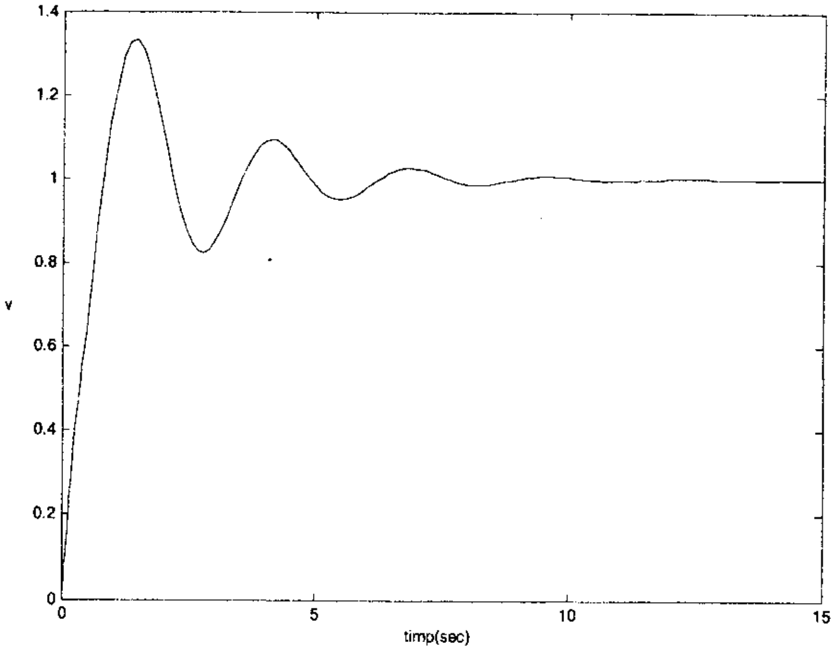


Fig. 6.20

6.8. Proiectarea SRA prin parametrizarea regulatoarelor

6.8.1. Elemente preliminarii

În paragrafele anterioare sunt prezentate principalele metode de proiectare a SRA pentru procese cu o intrare şi o ieşire, evidenţiind particularităţi şi limitări ale acestora.

Pentru un SRA cu un singur grad de libertate (fig. 6.21), comanda $U(s)$ poate fi generată în funcţie de referinţa $R(s)$ sub forma:

$$U(s) = \frac{H_R(s)}{1 + H_R(s)\hat{H}_p(s)} \cdot R(s) \tag{6.97}$$

sau

$$U(s)=Q(s)\cdot R(s)$$

unde

$$Q(s):=\frac{H_R(s)}{1+H_R(s)\hat{H}_p(s)} \tag{6.98}$$

reprezintă o funcţie de transfer ce conţine blocul de reglare caracterizat prin $H_R(s)$ şi modelul nominal al procesului $\hat{H}_p(s)$.

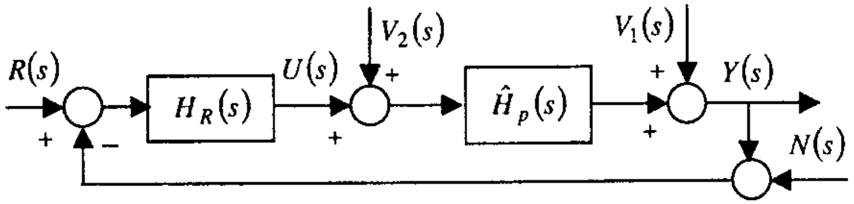


Fig. 6.21

Funcţia de transfer a SRA, în aceste condiţii, poate fi calculată direct sub forma:

$$H_0(s)\equiv T(s)=\hat{H}_p(s)\cdot Q(s)=\frac{H_R(s)\hat{H}_p(s)}{1+H_R(s)\hat{H}_p(s)} \tag{6.99}$$

Această expresie stă la baza parametrizării afine a regulatoarelor.

De remarcat faptul că $T(j\omega)$ va fi egală cu 1 numai la acele frecvenţe unde $Q(j\omega)$ inversează modelul procesului. De notat că (6.99) este afină în raport cu $Q(s)$.

Expresia funcţiei de transfer $H_0(s)$ în raport cu $H_R(s)$ evidenţiază o relaţie neliniară, ceea ce determină reale dificultăţi la acordarea regulatorului pentru obţinerea unor performanţe impuse.

Din definiţia funcţiei de transfer $Q(s)$ (6.98) se obţine cu uşurinţă funcţia de transfer $H_R(s)$:

$$H_R(s)=\frac{Q(s)}{1-Q(s)\cdot\hat{H}_p(s)} \tag{6.100}$$

parametrizată în $Q(s)$ şi cunoscută ca parametrizarea Youla [46] a tuturor regulatoarelor stabilizatoare pentru procese stabile.

Acest rezultat este formalizat în următoarea lemă:

Lema 6.2: (*Parametrizarea afină pentru sisteme stabile*)

Se consideră un proces caracterizat printr-un model nominal $\hat{H}_p(s)$ controlat într-o structură cu un grad de libertate cu un regulator propriu.

Bucla nominală este intern stabilă dacă şi numai dacă $Q(s)$ este orice funcţie de transfer proprie, iar $H_R(s)$ este parametrizat ca în (6.100).

Demonstraţie:

Definim următoarele funcţii de sensibilitate pentru modelul nominal $\hat{H}_p(s)$:

$$\hat{T}(s)=Q(s)\cdot\hat{H}_p(s) \tag{6.101}$$

$$\hat{S}(s)=1-Q(s)\cdot\hat{H}_p(s) \tag{6.102}$$

$$\hat{S}_1(s)=\left[1-Q(s)\hat{H}_p(s)\right]\hat{H}_p(s) \tag{6.103}$$

$$\hat{S}_2(s)=Q(s) \tag{6.104}$$

Din ecuaţia (6.104) rezultă imediat că stabilitatea funcţiei de transfer $Q(s)$ este *necesară* pentru stabilitatea internă.

Ecuaţiile (6.101) şi (6.104) împreună cu aproximarea că $\hat{H}_p(s)$ este stabilă, arată că stabilitatea lui $Q(s)$ este *suficientă* pentru a asigura stabilitatea celor patru funcţii de sensibilitate şi, prin urmare, a asigura stabilitatea internă a buclei.

Punctul esenţial al parametrizării (6.101) este că descrie toate regulatoarele liniare posibile invariante în timp pentru un proces liniar invariant în timp, caracterizat prin $\hat{H}_p(s)$. În acest caz, trebuie să alegem $Q(s)$ ca o funcţie de transfer stabilă.

Parametrizarea descrisă poate fi explicitată sub forma unei structuri de SRA cu *model intern* (fig. 6.22).

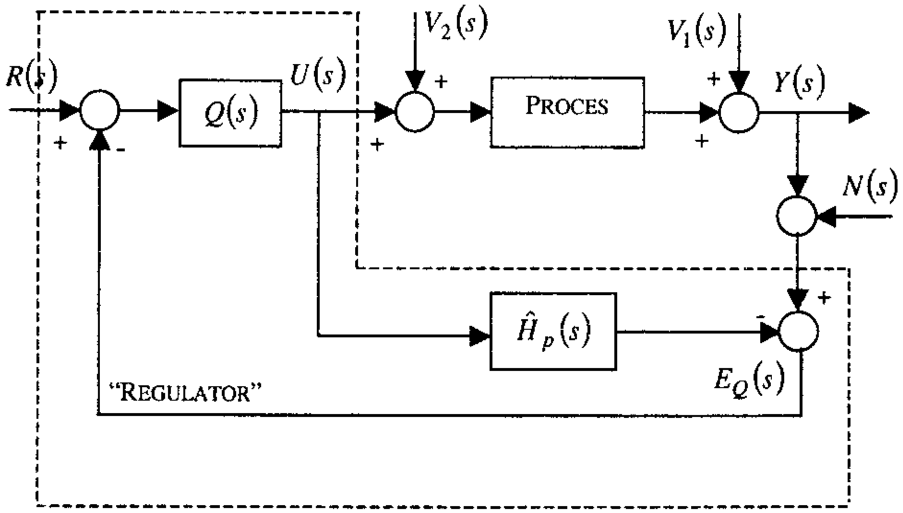


Fig. 6.22

Dacă ținem seama de definiția incertitudinii aditive (6.26):

$$L_A(s)=H_p(s)-\hat{H}_p(s)$$

și multiplicative:

$$L_M(s)=\frac{H_p(s)-\hat{H}_p(s)}{\hat{H}_p(s)}$$

cele patru funcții de sensibilitate se pot calcula cu relațiile:

$$S(s)=\left[1-Q(s)\hat{H}_p(s)\right]\cdot S_M(s)=\hat{S}(s)\cdot S_M(s) \tag{6.105}$$

$$T(s)=Q(s)\cdot\hat{H}_p(s)\left[1+L_M(s)\right]\cdot S_M(s) \tag{6.106}$$

$$S_1(s)=Q(s)\cdot S_M(s) \tag{6.107}$$

$$S_2(s)=\left[1-Q(s)\cdot\hat{H}_p(s)\right]\left[1+L_M(s)\right]\cdot S_M(s)\cdot\hat{H}_p(s) \tag{6.108}$$

$$S_M(s)=\frac{1}{1+Q(s)\cdot L_A(s)} \tag{6.109}$$

6.8.2. Problematica proiectării

Prin selectarea funcției de transfer $Q(s)$ poate fi formată una dintre cele patru funcții de sensibilitate. O cerință obișnuită este aceea de a asigura pentru un SRA ca $\left|\hat{S}(j\omega)\right|$ să fie cât mai mică la frecvențe joase și să crească spre 1 la frecvențe înalte. Ultima cerință este folosită pentru a reduce $\left|\hat{T}(j\omega)\right|$ la frecvențe înalte, condiție impusă pentru rejecția zgomotului la frecvență înaltă și asigurarea robusteței la erorile de modelare.

În aceste condiții, o alegere rezonabilă pentru $Q(s)$ poate fi:

$$Q(s)=F_Q(s)\cdot\left[\hat{H}_p(s)\right]^{-1} \tag{6.110}$$

unde $F_Q(s)$ joacă un rol important în proiectarea regulatorului, luând în considerație: *zerourile instabile ale modelului procesului*, *gradul relativ al modelului (excesul poli-zerouri)*, *rejecția perturbațiilor*, *efortul de comandă* și *robustețea*.

Pentru $\hat{H}_p(s)$ stabil, asigurarea stabilității buclei presupune ca $Q(s)$ să fie stabil. Totuși, aceasta implică faptul că dacă $\hat{H}_p(s)$ conține zerouri de fază minimă, atunci acestea pot conduce la $Q(s)$ instabil, ținând seama de (6.110).

În aceste condiții, se poate înlocui (6.110) cu:

$$Q(s)=F_Q(s)\cdot\hat{H}^i_p(s) \tag{6.111}$$

unde $\hat{H}^i_p(s)$ reprezintă o aproximare stabilă a lui $\left[\hat{H}_p(s)\right]^{-1}$.

Pentru cazul în care polinomul $\hat{B}_p(s)$ din funcția de transfer $\hat{H}_p(s)=\frac{\hat{B}_p(s)}{\hat{A}_p(s)}$ poate fi descompus în două polinoame $\hat{B}^+_p(s)$ stabil și $\hat{B}^-_p(s)$ instabil, monic:

$$\hat{B}_p(s)=\hat{B}^+_p(s)\cdot\hat{B}^-_p(s)$$

o alegere corespunzătoare pentru $\hat{H}^i_p(s)$ ar putea fi:

$$\hat{H}^i_p(s)=\frac{\hat{A}_p(s)}{\hat{B}^+_p(s)} \tag{6.112}$$

În acest caz, (6.111) conduce la relația:

$$Q(s)=F_Q(s)\cdot\frac{\hat{A}_p(s)}{\hat{B}^+_p(s)} \tag{6.113}$$

Condiția de realizabilitate a regulatorului presupune ca $Q(s)$ să fie proprie și, în consecință, $F_Q(s)$ trebuie să aibă gradul relativ cel puțin egal cu gradul relativ respectiv al funcției $\left[\hat{H}^i_p(s)\right]^{-1}$. Conceptual, această condiție poate fi îndeplinită dacă se includ factorii de forma $(1+\tau s)^{n_d}$, $(\tau\in\Re^+)$ în numitorul funcției de transfer [46]. În această formă, n_d se alege astfel ca $Q(s)$ să fie cel puțin bipropriu, iar τ se alege ținând seama de cerințele de proiectare.

6.8.3. Rejectarea perturbațiilor

Erorile staționare în raport cu perturbațiile $v_1(t)$ și $v_2(t)$ pot fi reduse la zero dacă $Q(j\omega)$ este exact inversa lui $\hat{H}_p(j\omega)$ în toata banda de frecvență unde perturbațiile au energie semnificativă.

Parametrizarea afină poate fi generalizată pentru a include cazul când energiile perturbațiilor sunt concentrate la anumite frecvențe cunoscute.

Regulatorul $H_R(s)$ conține componenta integrală dacă și numai dacă $Q(0)=\left[\hat{H}_p(0)\right]^{-1}$. De notat, totuși, că această formulare a problemei rejecției perturbațiilor nu include soluțiile care depind de gradele de libertate pe care le are proiectantul la dispoziție.

O asemenea parametrizare este formulată prin următorul rezultat:

Lema 6.3. Se consideră un model stabil $\hat{H}_p(s)$ cu perturbații la frecvență zero. Atunci un SRA cu un grad de libertate care asigură eroare

staționară de urmărire egală cu zero se obține dacă și numai dacă regulatorul $H_R(s)$ poate fi exprimat ca în (6.100), unde $Q(s)$ satisface relația:

$$Q(s)=s\overline{Q}(s)+\left[\hat{H}_p(0)\right]^{-1}\cdot Q_a(s) \tag{6.114}$$

unde $\overline{Q}(s)$ este o funcție de transfer stabilă, iar $Q_a(s)$ este o funcție de transfer stabilă care satisface condiția $Q_a(0)=1$.

Demonstrație:

Observăm că dacă $\overline{Q}(s)$ și $Q_a(s)$ sunt stabile, atunci și $Q(s)$ este stabilă și în consecință este asigurată stabilitatea buclei. De asemenea, regulatorul $H_R(s)$ conține un integrator:

$$H_R(s)=\frac{Q(s)}{1-Q(s)\hat{H}_p(s)}=\frac{s\overline{Q}(s)+\left[\hat{H}_p(0)\right]^{-1}Q_a(s)}{1-\left[s\overline{Q}(s)+\left[\hat{H}_p(0)\right]^{-1}Q_a(s)\right]\hat{H}_p(s)} \tag{6.115}$$

ceea ce demonstrează *suficiența*.

Pentru a demonstra *necesitatea* se consideră un regulator ce stabilizează modelul în buclă închisă și asigură eroarea la $s=0$. Aceasta este echivalent cu $\hat{T}(0)=1$.

Din ecuația $\hat{T}(s)=Q(s)\hat{H}_p(s)$ observăm că aceasta este echivalentă cu condiția $Q(0)-\left[\hat{H}_p(0)\right]^{-1}=0$, respectiv $\hat{T}_0=1$, adică $Q(s)-\left[\hat{H}_p(0)\right]^{-1}$ este o funcție de transfer stabilă arbitrară care are un zerou la $s=0$. O caracterizare a acestor funcții de transfer este:

$$Q(s)-\left[\hat{H}_p(0)\right]^{-1}=s\left[\overline{Q}(s)+\frac{Q_b(s)}{s}\right] \tag{6.116}$$

unde $Q_b(0)=0$.

Ecuația (6.116) arată că orice $Q(s)$ care asigură eroare staționară la referință sau/și perturbații poate fi scrisă sub forma:

$$Q(s)=s\overline{Q}(s)+\left[\hat{H}_p(0)\right]^{-1}\left[1+\hat{H}_p(s)Q_b(s)\right] \tag{6.117}$$

din care rezultă, ținând seama de (6.114), că $Q_a(s)$ are forma:

$$Q_a(s)=1+\hat{H}_p(s)Q_b(s) \tag{6.118}$$

Rezultă că cea mai simplă alegere în (6.114) este $Q_a(s)=1$.

Lema 6.4. Se consideră un model stabil $\hat{H}_p(s)$ și aproximăm că perturbația v_2 are componente la frecvențele ω_1, ω_2, ..., ω_l. Atunci, într-un SRA cu un grad de libertate se asigură erori staționare egale cu zero dacă și numai dacă regulatorul $H_R(s)$ poate fi exprimat ca în (6.100), unde $Q(s)$ satisface:

$$Q(s)=\frac{\alpha_Q(s)}{\beta_Q(s)}=\frac{N_1(s)\prod_{i=1}^{l}\left(s^2+\omega_i^2\right)+N_2(s)}{\beta_Q(s)} \tag{6.119}$$

unde $\alpha_Q(s)$, $N_1(s)$, $N_2(s)$ și $\beta_Q(s)$ sunt polinoame reale în s cu $\beta_Q(s)$ stabil și:

$$N_2(j\omega_i)=\beta_Q(j\omega_i)\left[\hat{H}_p(j\omega_i)\right]^{-1},\ \text{unde } i=1,2,\ldots l \tag{6.120}$$

Demonstrație:

Deoarece $\beta_Q(s)$ este un polinom stabil, $Q(s)$ este stabil și deci SRA este stabil. Observăm din (6.119) și (6.120) că $Q(j\omega_i)=\left[\hat{H}_p(j\omega_i)\right]^{-1}$ și astfel $H_R(\pm j\omega_i)=\infty$ pentru $i=1,2,\cdots,l$, adică se realizează inversarea perfectă a modelului la aceste frecvențe, ceea ce demonstrează *suficiența*.

Pentru a demonstra *necesitatea* se consideră un regulator care stabilizează SRA și asigură eroare staționară nulă la frecvențele $\omega=\omega_1$, ω_2, ..., ω_l. Notăm numărătorul lui $Q(s)$ cu $\alpha_Q(s)$ și numitorul cu $\beta_Q(s)$. Dacă împărțim $\alpha_Q(s)$ prin polinomul $P_2(s)\overset{\Delta}{=}\prod_{i=1}^{l}\left(s^2+\omega_i^2\right)$, obținem un polinom $\overline{N}_1(s)$ și un rest $\overline{N}_2(s)$:

$$\frac{\alpha_Q(s)}{P_2(s)}=\overline{N}_1(s)+\frac{\overline{N}_2(s)}{P_2(s)} \tag{6.121}$$

Din (6.121) și (6.119) identificăm cu ușurință $\overline{N}_1(s)$ ca fiind $N_1(s)$ și $\overline{N}_2(s)$ ca fiind $N_2(s)$.

Mai mult, condiția pentru a asigura eroare staționară egală cu zero este echivalentă cu anularea sensibilității nominale în raport cu perturbația v_2 la $s=\pm j\omega_i$ pentru $i=1,2,\cdots,l$.

Din ecuația $\hat{S}_2=\left[1-Q(s)\hat{H}_p(s)\right]\hat{H}_p(s)$ observăm că această condiție este echivalentă cu $Q(\pm j\omega_i)=\left[\hat{H}_p(j\omega_i)\right]^{-1}$, care necesită ca (6.120) să fie satisfăcută.

Observație: Notăm că în (6.119) o posibilă alegere pentru $N_2(s)$ este:

$$N_2(s)=\overline{\beta}_Q(s)\sum_{i=1}^{2l}\left(\tau j\omega_i+1\right)^{2l-1}\left[\hat{H}_p(j\omega_i)\right]^{-1}\prod_{k\in\Omega_{2l,i}}\frac{s-j\omega_k}{j\omega_i-j\omega_k} \tag{6.122}$$

unde $\tau > 0$, $\omega_{l+i} = -\omega_i$ pentru $i = 1, 2, \cdots, l$, $\Omega_{2l,i} \overset{\Delta}{=} \{1, 2, \cdots, 2l\} - \{i\}$ şi

$$\beta_Q(s) = \bar{\beta}_Q(s) \cdot (\tau s + 1)^{2l-1} \tag{6.123}$$

Putem astfel parametriza $Q(s)$ sub forma:

$$Q(s) = \bar{Q}(s) \cdot \prod_{i=1}^{l} \left(s^2 + \omega_i^2\right) + \sum_{i=1}^{2l} \left[\hat{H}_p\left(j\omega_i\right)\right]^{-1} \cdot \prod_{k \in \Omega_{2l,i}} \frac{s - j\omega_k}{j\omega_i - j\omega_k} \tag{6.124}$$

Lemele de mai sus ne permit să parametrizăm probleme de reglare satisfăcând restricţiile de regim staţionar cu prezervarea structurii afine a funcţiilor de sensibilitate în variabilele de proiectare $\bar{Q}(s)$.

6.8.4. Efortul de comandă

Din (6.99) şi (6.102) observăm că dacă $\hat{S} = 0$ la o frecvenţă dată (adică $Q\hat{H}_p = 1$), atunci avem amplificare infinită în regulatorul $H_R(s)$ la aceeaşi frecvenţă. Pentru un proces de fază minimă se poate alege $\hat{H}_p^i(s) = \left[\hat{H}_p(s)\right]^{-1}$, iar regulatorul, conform relaţiei (6.111), ar putea avea forma:

$$H_R(s) = \frac{F_Q(s) \cdot \hat{H}_p^i(s)}{1 - F_Q(s)}. \tag{6.125}$$

Pentru a ilustra acest rezultat, alegem:

$$F_Q(s) = \frac{1}{(\tau s + 1)^n}, \tag{6.126}$$

iar factorul de amplificare al regulatorului la frecvenţe înalte K_R^{if} se calculează în funcţie de factorul de amplificare al procesului la frecvenţe înalte:

$$K_R^{if} = \frac{1}{\tau^n \cdot K_p^{if}}. \tag{6.127}$$

Astfel, dacă alegem $F_Q(s)$ mai rapid (τ devine mai mic), factorul de amplificare K_R^{if} creşte şi implicit creşte nivelul comenzii. Această consecinţă poate fi apreciată din faptul că pentru $\hat{H}_p(s)$ de fază minimă şi stabilă rezultă:

$$S_2(s) = Q(s) = \frac{\left[\hat{H}_p(s)\right]^{-1}}{(\tau s + 1)^n}. \tag{6.128}$$

Pentru a asigura robusteţe, ţinând seama că erorile de modelare sunt semnificative la frecvenţe înalte, banda de frecvenţă a SRA ar putea fi astfel aleasă, încât răspunsul în frecvenţă $\left|\hat{T}(j\omega)\right|$ să se reducă puternic înainte ca efectul erorilor de modelare să devină semnificativ.

Alegem $Q(s)$ ca în (6.111) şi astfel:

$$\hat{T}(s) = F_Q(s) \cdot \hat{B}_p^-(s). \tag{6.129}$$

În cadrul parametrizării afine, cerinţa de robusteţe poate fi satisfăcută dacă $F_Q(s)$ reduce amplificarea lui $\hat{T}(j\omega)$ la frecvenţe înalte. Aceasta se realizează în mod uzual prin includerea unor poli corespunzători în $F_Q(s)$. Desigur, reducerea lui $\left|\hat{T}(j\omega)\right|$ la o valoare mult mai mică decât unitatea la o anumită frecvenţă necesită ca $\left|\hat{S}(j\omega)\right|$ să tindă spre unitate la aceeaşi frecvenţă în cazul structurilor cu un singur grad de libertate.

Se poate remarca faptul că printr-o alegere corespunzătoare a filtrului $F_Q(s)$ se poate asigura nivelul dorit al comenzii şi se asigură robusteţea procedurii de sinteză dacă $F_Q(s)$ ales asigură reducerea amplificării $\left|\hat{T}(j\omega)\right|$ la frecvenţe înalte[46].

6.8.5. Alegerea funcţiei de transfer $Q(s)$

Cea mai simplă alegere a lui $Q(s)$ este inversul funcţiei de transfer a procesului $\hat{H}_p(s)$. Totuşi, această soluţie "ideală" trebuie modificată în practică luând în calcule următoarele aspecte:

Stabilitatea internă presupune compensarea zerourilor de fază neminimă astfel că acestea trebuie să apară în $\hat{T}(s)$. Aceasta impune faptul că amplificarea lui $Q(s)$ trebuie să fie redusă la aceste frecvenţe pentru a evita apariţia unui răspuns tranzitoriu necorespunzător.

Excesul polilor modelului trebuie să fie mai redus decât gradul relativ al lui $\hat{T}(s)$, deoarece $Q(s)$ trebuie să fie propriu pentru a rezulta $H_R(s)$ propriu.

Întrucât impunem ca $\left|\hat{T}(j\omega)\right|$ să fie cât mai mic pentru a asigura rejecţia zgomotului de măsură, trebuie să creştem sensibilitatea în raport cu perturbaţiile ce acţionează la ieşire la aceeaşi frecvenţă. De asemenea, polii lenţi ai buclei deschise trebuie să apară fie ca poli ai funcţiei $\hat{S}_2(s)$ sau ca zerouri ale lui $\hat{S}(s)$ şi, evident, în fiecare caz apare o penalizare a performanţelor.

Procesele sunt în general de tip *filtru trece-jos*. Prin urmare, obținerea lui $Q(s)$ cât mai aproape de modelul invers al procesului conduce la o funcție de transfer de la $V_1(s)$ la $U(s)$ de tipul *filtrului trece-sus*. Aceasta conduce la creșterea nivelului comenzii și la saturarea regulatorului.

Erorile de modelare, în mod uzual, devin semnificative la frecvențe înalte și, prin urmare, pentru a conserva robustețea este necesar a atenua $\hat{T}(s)$ (și deci $Q(s)$) la aceste frecvențe.

6.8.6. Sinteza regulatorului PID apelând la parametrizarea afină

În acest paragraf vom ilustra aplicarea parametrizării afine la sinteza algoritmilor PI și PID în cazul în care sistemul deschis este stabil.

Vom considera modele simplificate de ordinul I și de ordinul al II-lea, cu și fără timp mort.

Pentru un model de ordinul I de forma:

$$\hat{H}_p(s)=\frac{\hat{K}_p}{\hat{T}_p s+1}.$$

se poate ușor observa că acesta este inversabil și modelul invers nu conține zerouri instabile:

$$\hat{H}_p^i(s)=\left[\hat{H}_p(s)\right]^{-1}=\frac{\hat{T}_p s+1}{\hat{K}_p} \tag{6.130}$$

Pentru a obține $Q(s)$ ca o rațională biproprie, trebuie ales $F_Q(s)$ sub forma:

$$F_Q(s)=\frac{1}{\alpha s+1}. \tag{6.131}$$

În aceste condiții, obținem:

$$Q(s)=F_Q(s)\cdot\hat{H}_p^i(s)=\frac{1}{\hat{K}_p}\cdot\frac{\hat{T}_p s+1}{\alpha s+1} \tag{6.132}$$

și

$$H_R(s)=\frac{Q(s)}{1-Q(s)\cdot\hat{H}_p(s)}=\frac{\hat{T}_p s+1}{\hat{K}_p\alpha s} \tag{6.133}$$

care reprezintă un algoritm PI cu parametrii de acord:

$$K_R=\frac{\hat{T}_p}{\hat{K}_p\alpha} \text{ și } K_I=\frac{1}{\hat{K}_p\alpha} \tag{6.134}$$

Folosind acești parametri ai regulatorului se obține funcția de transfer nominală $\hat{T}(s)$ sub forma:

$$\hat{T}(s)=Q(s)\cdot\hat{H}_p(s)=F_Q(s)=\frac{1}{\alpha s+1}. \tag{6.135}$$

unde α devine un parametru de acordare. Alegând α mic, se obține un răspuns rapid și invers.

Cu acest regulator, perturbația $V_1(s)$ care acționează la ieșirea procesului este rejectată prin funcția de sensibilitate nominală:

$$\hat{S}(s)=1-\hat{T}(s)=1-F_Q(s)=\frac{\alpha s}{\alpha s+1} \tag{6.136}$$

Astfel, o valoare mică a parametrului α asigură rejecția rapidă a perturbației $V_1(s)$.

În figura 6.23 se prezintă răspunsul SRA la perturbații de tip treaptă pentru diverse valori ale parametrului α.

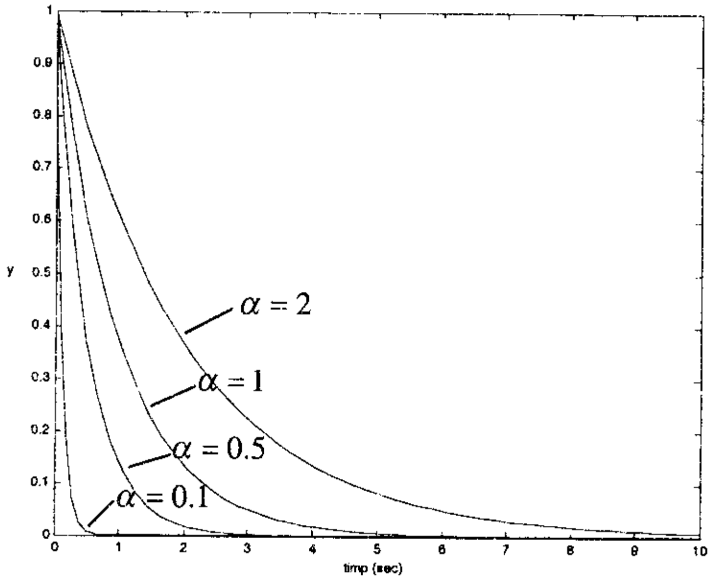


Fig. 6.23

Totuși, α nu poate fi ales arbitrar de mic, având în vedere limitările introduse de elementul de execuție și considerațiile referitoare la robustețea SRA. Procedura de proiectare a regulatorului pentru un model de ordinul întâi evidențiază o metodă simplă de acordare a unui regulator PI cu un singur parametru de acordare, α. De remarcat faptul că dacă $\hat{T}_p$ și $\hat{K}_p$ sunt variabile în timp, regulatorul poate fi ușor adaptat întrucât parametrii K_R și $K_I=\frac{K_R}{T_i}$ sunt calculați explicit, prin relații simple, în funcție de $\hat{T}_p$ și $\hat{K}_p$.

În continuare, considerăm un model de ordinul doi cu factor mediu de amortizare $\zeta_p > 0.6$:

$$\hat{H}_p(s) = \frac{\hat{K}_p}{s^2 + 2\hat{\zeta}_p\hat{\omega}_p s + \hat{\omega}_p^2} \tag{6.137}$$

Întrucât nu avem zerouri instabile, putem alege:

$$\hat{H}_p^i(s) = \left[\hat{H}_p(s)\right]^{-1} = \frac{s^2 + 2\hat{\zeta}_p\hat{\omega}_p s + \hat{\omega}_p^2}{\hat{K}_p} \tag{6.138}$$

Pentru a obține $Q(s)$ ca o rațională biproprie, ținând seama de relația de calcul, $Q(s) = F_Q(s)\cdot\hat{H}_p^i(s)$, $F_Q(s)$ trebuie să aibă un exces al polilor egal cu 2. Alegem, în aceste condiții:

$$F_Q(s) = \frac{1}{\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + 1} \tag{6.139}$$

În aceste condiții, regulatorul are forma:

$$H_R(s) = \frac{Q(s)}{1 - Q(s)\cdot\hat{H}_p(s)} = \frac{F_Q(s)\cdot\hat{H}_p^i(s)}{1 - F_Q(s)}, \tag{6.140}$$

sau, după înlocuirea lui $F_Q(s)$ și $\hat{H}_p^i(s)$:

$$H_R(s) = \frac{s^2 + 2\hat{\zeta}_p\hat{\omega}_p s + \hat{\omega}_p^2}{\hat{K}_p\left(\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + 1\right)} \equiv \frac{q_0 + q_1 s + q_2 s^2}{s(p_1 s + p_0)}$$

ceea ce evidențiază un algoritm PID echivalent cu parametrii de acord:

$$K_R = \frac{2\hat{\zeta}_p\hat{\omega}_p\alpha_1 - \alpha_2\hat{\omega}_p^2}{\hat{K}_p\alpha_1^2} \tag{6.141}$$

$$K_I = \frac{\hat{\omega}_p^2}{\hat{K}_p\alpha_1} \tag{6.142}$$

$$K_D = \frac{\alpha_1^2 - 2\hat{\zeta}_p\hat{\omega}_p\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\hat{\omega}_p^2}{\hat{K}_p\alpha_1^3} \tag{6.143}$$

și constanta de timp derivativă:

$$\tau_D = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}. \tag{6.144}$$

Cu acest regulator putem parametriza $\hat{T}(s)$ în funcție de $\hat{\omega}_n$ și $\hat{\zeta}$ ca parametri sintetici ai SRA de ordinul doi, alegând:

$$\alpha_2 = \frac{1}{\hat{\omega}_n^2} \text{ și } \alpha_1 = \frac{2\hat{\zeta}}{\hat{\omega}_n} \tag{6.145}$$

Astfel, funcția de transfer $\hat{T}(s)$ se obține sub forma:

$$\hat{T}(s) = F_Q(s) = \frac{\hat{\omega}_n^2}{s^2 + 2\hat{\zeta}\hat{\omega}_n s + \hat{\omega}_n^2} \tag{6.146}$$

Cu această alegere a lui $\hat{T}(s)$ se obțin parametrii de acord ai regulatorului:

$$K_R = \frac{4\hat{\zeta}_p\hat{\zeta}\hat{\omega}_p\hat{\omega}_n - \hat{\omega}_p}{4\hat{K}_p\hat{\zeta}^2} \tag{6.147}$$

$$K_I = \frac{\hat{\omega}_p^2\hat{\omega}_n}{2\hat{K}_p\hat{\zeta}} \tag{6.148}$$

$$K_D = \frac{4\hat{\zeta}\hat{\omega}_n^2 - 4\hat{\zeta}_p\hat{\omega}_p\hat{\zeta}\hat{\omega}_n + \hat{\omega}_p^2}{8\hat{K}_p\hat{\zeta}^3\hat{\omega}_n} \tag{6.149}$$

$$\tau_D = \frac{1}{2\hat{\zeta}\hat{\omega}_n} \tag{6.150}$$

În comparație cu algoritmul PID clasic, acest algoritm obținut prin metoda parametrizării afine prezintă mai multe avantaje.

În particular, parametrii de acord K_R, K_I, K_D și τ_D se calculează explicit în funcție de parametrii $\hat{\zeta}$ și $\hat{\omega}_n$, respectiv $\hat{K}_p$, $\hat{\zeta}_p$ și $\hat{\omega}_p$ ai modelului nominal al procesului și pot fi ajustați fără eforturi suplimentare.

Rezultate similare se pot obține și pentru modele de ordinul doi cu un zerou stabil și factor de amortizare $\hat{\zeta}_p < 0.6$.

Pentru modele de ordinul întâi cu timp mort de forma:

$$\hat{H}_p(s) = \frac{\hat{K}_p e^{-\hat{\tau}_p s}}{\hat{T}_p s + 1} \tag{6.151}$$

este evident că inversarea nu este posibilă și în acest caz folosim aproximarea Padé de ordinul întâi pentru elementul cu timp mort.

Astfel:

$$e^{-\hat{\tau}_p s} \cong \frac{2 - \hat{\tau}_p s}{2 + \hat{\tau}_p s}, \tag{6.152}$$

iar modelul procesului devine:

$$\hat{H}_p(s) \cong \frac{-\hat{\tau}_p\hat{K}_p s + 2\hat{K}_p}{\hat{\tau}_p\hat{T}_p s^2 + \left(\hat{\tau}_p + 2\hat{T}_p\right)s + 2}. \tag{6.153}$$

Acest model este stabil, însă de fază neminimă, astfel că putem folosi o inversă aproximativă:

$$\hat{H}^{i}_{p\tau}(s) \cong \frac{\hat{\tau}_p \hat{T}_p s^2 + \left(\hat{\tau}_p + 2\hat{T}_p\right)s + 2}{2\hat{K}_p} \tag{6.154}$$

O raţională biproprie $Q(s)$ se obţine dacă se alege $F_Q(s)$ sub forma:

$$F_Q(s) = \frac{1}{\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + 1}. \tag{6.155}$$

Cu această alegere rezultă algoritmul de reglare sub forma:

$$H_R(s) = \frac{Q(s)}{1 - Q(s)\cdot \hat{H}_p(s)} = \frac{F_Q(s)\hat{H}^{i}_{p\tau}(s)}{1 - F_Q(s)\cdot \hat{H}^{i}_{p\tau}(s)\cdot \hat{H}_p(s)}$$

sau

$$H_R(s) = \frac{\hat{\tau}_p \hat{T}_p s^2 + \left(\hat{\tau}_p + 2\hat{T}_p\right)s + 2}{2\hat{K}_p \alpha_2 s^2 + \left(2\hat{K}_p \alpha_1 + \hat{\tau}_p \hat{K}_p\right)s} \equiv \frac{q_0 + q_1 s + q_2 s^2}{s\left(p_1 s + p_0\right)} \tag{6.156}$$

care reprezintă un algoritm PID cu filtrare.

Parametrii de acord se obţin cu uşurinţă:

$$K_R = \frac{2\hat{\tau}_p \alpha_1 + 4\hat{T}_p \alpha_1 + \hat{\tau}_p^2 + 2\hat{\tau}_p \hat{T}_p - 4\alpha_2}{4\hat{K}_p \alpha_1^2 + 4\hat{K}_p \alpha_1 \hat{\tau}_p + \hat{\tau}_p^2 \hat{K}_p} \tag{6.157}$$

$$K_I = \frac{2}{2\hat{K}_p \alpha_1 + \hat{\tau}_p \hat{K}_p} \tag{6.158}$$

$$K_D = \frac{\left(2\hat{K}_p \alpha_1 + \hat{\tau}_p \hat{K}_p\right)^2 \hat{\tau}_p \hat{T}_p}{\left(2\hat{K}_p \alpha_1 + \hat{\tau}_p \hat{K}_p\right)^3} - \frac{2\hat{K}_p \alpha_2 \left(2\hat{K}_p \alpha_1 + \hat{\tau}_p \hat{K}_p\right)\left(\hat{\tau}_p + 2\hat{T}_p\right) + 8\hat{K}_p^2 \alpha_2^2}{\left(2\hat{K}_p \alpha_1 + \hat{\tau}_p \hat{K}_p\right)^3} \tag{6.159}$$

$$\tau_D = \frac{2\alpha_2}{2\alpha_1 + \hat{\tau}_p}. \tag{6.160}$$

Se observă, din nou, că parametrii de acord K_R, K_I, K_D şi τ_D se calculează direct în funcţie de parametrii modelului nominal şi de parametrii filtrului $F_Q(s)$. Relaţiile de calcul a parametrilor de acord sunt neliniare şi dificil de aplicat, acesta fiind unul dintre motivele pentru care se preferă

utilizarea unor metode euristice de acordare a regulatoarelor pentru procese care conţin timp mort.

Un avantaj al acestor expresii explicite pentru calculul parametrilor de acord apare evident în cazul reglării adaptive pentru modele cu parametri variabili.

O comparaţie între reglarea cu predictor Smith pentru procese cu timp mort şi reglarea bazată pe parametrizarea afină (reglarea cu model intern) este uşor de evidenţiat.

În cazul în care modelul procesului poate fi pus sub forma:

$$\hat{H}_p(s) = e^{-\hat{\tau}_p s} \cdot \overline{H}_p(s) \tag{6.161}$$

expresia funcţiei de transfer $\hat{T}(s)$ este:

$$\hat{T}(s) = e^{-\hat{\tau}_p s} \cdot \overline{H}_p(s) \cdot Q(s) \tag{6.162}$$

care sugerează că $Q(s)$ trebuie proiectat numai pe baza părţii raţionale a modelului $\overline{H}_p(s)$, deoarece timpul mort nu poate fi inversat.

În aceste condiţii, putem selecta $Q(s)$ pe baza raţionalei $\overline{H}_p(s)$:

$$Q(s) = \frac{H_R(s)}{1 + H_R(s)\cdot \overline{H}_p(s)} \tag{6.163}$$

cu observaţia că, pentru $\left|H_R(j\omega)\right|$ mare, $\left|Q(j\omega)\right| \cong \left[\overline{H}_p(j\omega)\right]^{-1}$.

În figura 6.24 se prezintă structura de reglare cu predictor Smith în forma Q.

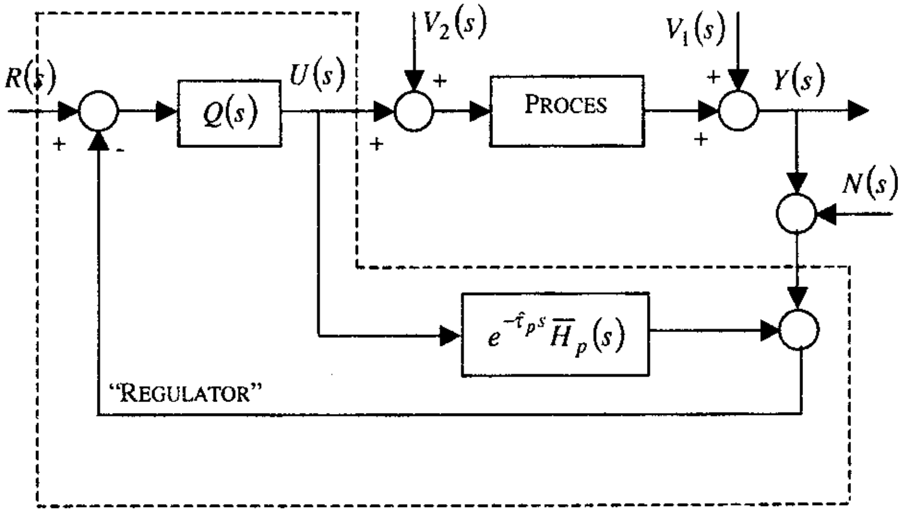


Fig. 6.24

Dacă $Q(s)$ se implementează pe baza relației (6.163) se obține structura clasică de reglare cu predictor Smith (fig. 6.25).

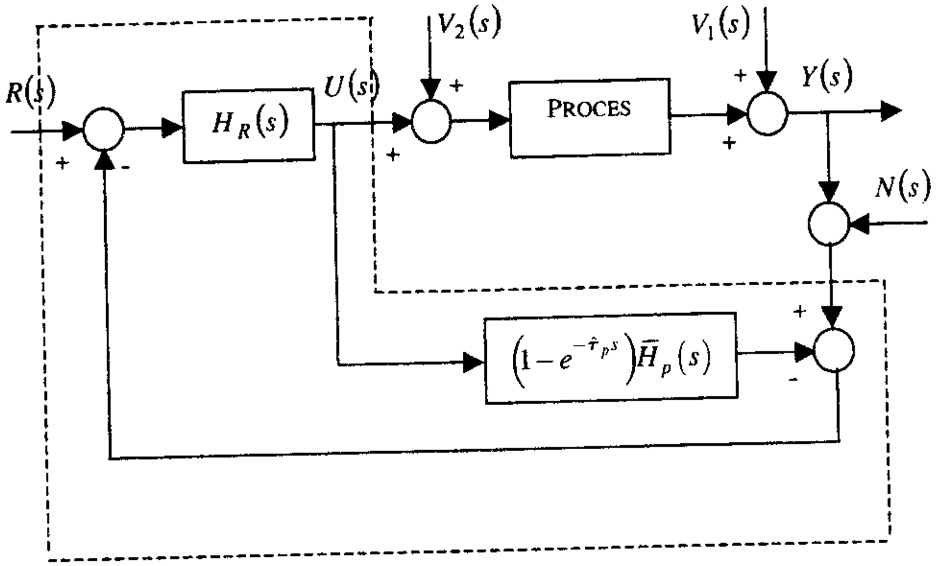


Fig. 6.25

Exemplul 6.8:

Se consideră procesul caracterizat de un model nominal:

$$\hat{H}_p(s)=\frac{e^{-s}}{4s+1}.$$

Se cere să se proiecteze un regulator care asigură o bună urmărire a referinței în banda de frecvență $\omega\in[0,\ 1]$ $[rad/s]$.

Pentru rezolvare folosim structura prezentată în figura 6.22, folosind numai partea rațională a lui $\hat{H}_p(s)$.

O alegere corespunzătoare a lui $Q(s)$ *este:*

$$Q(s)=\frac{4s+1}{s^2+1.3s+1}$$

care conduce la:

$$\hat{T}(s)=\frac{e^{-s}}{s^2+1.3s+1}.$$

Performanțele SRA cu această proiectare se pot evidenția în figura 6.26.

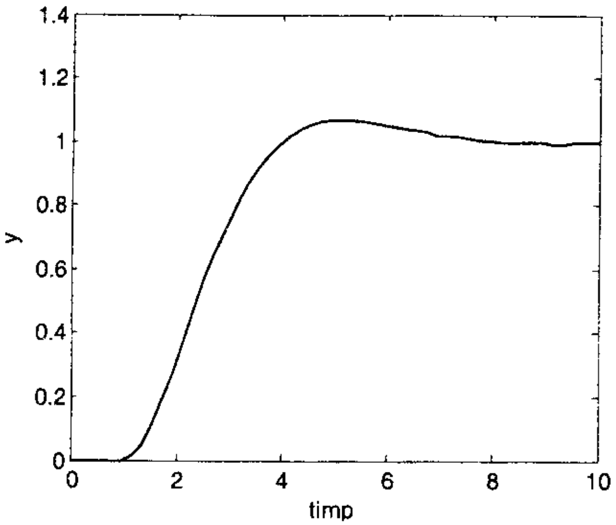


Fig. 6.26

De remarcat faptul că prin metoda de proiectare bazată pe parametrizarea afină se asigură explicit stabilitatea nominală. Relațiile de calcul pentru $T(s)$ și $S(s)$ sunt mult mai simple și sunt afine în $Q(s)$. Ca și în cazul altor metode de proiectare, metoda parametrizării afine presupune alegerea unor variante în vederea optimizării.

Acordarea algoritmilor PI și PID se realizează mai simplu cu un suport ingineresc mai consistent în cazul utilizării parametrizării afine, parametrii de acord se determină direct în funcție de parametrii modelului procesului.

PROBLEME

6.1. Se consideră un proces caracterizat prin modelul:

$$\hat{H}_P(s)=\frac{0.5}{s(s+0.1)}.$$

Se cere să se proiecteze un regulator într-o structură de SRA cu un grad de libertate astfel încât răspunsul indicial să asigure: $\sigma\le 6\%$, $t_t\le 3\,\text{sec}$ și $\varepsilon_{st}=0$.

6.2. Se consideră modelul unui proces sub forma:

$$\hat{H}_P(s)=\frac{K}{s(s+10)(s+1)}.$$

Se cere un algoritm de reglare, astfel încât, pentru $K \in (0.5 \div 2)$ să se asigure $\sigma \leq 20\%$.

6.3. Pentru un SRA cu un grad de libertate a cărui funcţie de transfer a căii directe este:

$$H_d(s)=\frac{10(s+1)}{s(s+0.1)(s+10)}$$

se cere a alege un compensator, astfel încât $M_\varphi \geq 45°$.

6.4. Se consideră un proces al cărui model este:

$$\hat{H}_p(s)=\frac{4-s}{(s+1)(s+4)}.$$

Se cere a sintetiza un algoritm de reglare care asigură următoarele:

a) eroare staţionară egală cu zero la referinţă constantă;

b) eroare staţionară egală cu zero pentru perturbaţii sinusoidale de frecvenţă $0.25[rad/\sec]$;

c) algoritmul de reglare să fie caracterizat printr-o raţională biproprie.

6.5. Se consideră un model nominal al unui proces de forma:

$$\hat{H}_p(s)=\frac{e^{-2s}}{15s+1}.$$

Se cere a proiecta un regulator într-o structură cu un grad de libertate, astfel încât răspunsul indicial al SRA să fie caracterizat printr-o durată a regimului tranzitoriu $t_t \leq 8\sec$.

6.6. Se consideră un proces caracterizat prin următorul model aproximativ:

$$H_p(s)=\frac{1}{s^2}.$$

Se cere o structură de reglare cu regulator liniar, astfel încât $M_\varphi \geq 45^0$.

6.7. Se consideră un proces lent caracterizat prin:

$$H_p(s)=\frac{s+1}{(s+2)(s+5)}.$$

Se cere a proiecta un regulator, astfel încât polinomul caracteristic al SRA să aibă rădăcinile $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=-5$ şi $\lambda_{3,4}=-10\pm j\sqrt{5}$.

6.8. Pentru un proces al cărui model nominal este:

$$\hat{H}_P(s)=2\frac{-s+10}{(s+5)(s+10)}$$

să se descrie clasa de regulatoare $Q(s)$ care asigură eroare staţionară egală cu zero pentru referinţe şi perturbaţii constante.

6.9. Se consideră un proces având modelul nominal:

$$\hat{H}_P(s)=\frac{-\alpha s+1}{(s+5)(s+10)},\ \alpha \in \Re^+.$$

Se cere:

a) un regulator PID care asigură performanţe impuse (la alegere) pentru $\alpha \in [0.1,\ 20]$;

b) comparaţi metoda de acordare prin procedura parametrizării afine cu metode clasice de acordare;

c) proiectaţi legea de reglare printr-o procedură de alocare a polilor, impunând cerinţe de performanţă identice.

6.10. Se consideră procesul caracterizat prin modelul:

$$\hat{H}_P(s)=2\frac{s+1}{(s+2)(s+10)}.$$

Se cere:

a) Proiectarea unui regulator, astfel încât polinomul caracteristic al SRA să fie $P_c(s)=s^4+3s^3+2s^2+s+1$.

b) Să se compare rezultatul obţinut prin proiectarea prin metoda alocării polilor cu rezultatul obţinut prin metoda parametrizării afine.

7. SINTEZA LEGII DE REGLARE DUPĂ STARE

Considerăm mai întâi obiecte conduse cu o intrare şi o ieşire, caracterizate prin modele de forma:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \phi x_k + \Gamma u_k \\ y_k &= c^T x_k \qquad ; \quad x_0 = x(0) \in \Re^n \end{aligned} \tag{7.1}$$

unde matricele (Φ, Γ, c^T) au dimensiunile şi semnificaţia prezentate în §2.2.

În cele ce urmează presupunem că sistemul (7.1) este complet, adică perechea (Φ, Γ) este controlabilă, iar (Φ, c^T) este observabilă.

Problema sintezei legii de reglare după stare va fi rezolvată aplicând principiul separării [46]. Astfel, în prima etapă, considerând starea x_k accesibilă măsurării, vom sintetiza matricea de comandă după stare, iar în cea de a doua etapă construim vectorul de stare prin estimare sau predicţie pe baza informaţiilor măsurabile u_k şi y_k.

În cele ce urmează vom considera modele de stare pentru care perturbaţiile sunt reprezentate prin starea iniţială. Vom extinde rezultatele obţinute pentru aceste modele şi în prezenţa unor perturbaţii mai generale, generate de sisteme dinamice ale căror intrări sunt impulsuri.

Drept cerinţă de performanţă (criteriu) în cazul problemei reglării, vom considera aducerea stării la zero după acţiunea perturbaţiei asupra stării iniţiale. În cazul procedurilor bazate pe alocarea polilor, viteza de atingere a stării de echilibru (starea egală cu zero) este indirect determinată de poziţia polilor în discul unitate. Cu cât polii sunt mai aproape de origine, viteza de răspuns a sistemului este mai mare.

7.1. Reglarea prin reacţie după stare

Pentru modelul (7.1) se consideră perturbaţii în starea iniţială a sistemului. Scopul reglării după stare este de a asigura o evoluţie dorită a stării, respectiv de a asigura sistemului în circuit închis o ecuaţie caracteristică dorită. Aceasta asigură o rejecţie a perturbaţiei cu o anumită viteză.

Cea mai simplă lege de reglare după stare este:

$$u_k = -f^T x_k = -[f_1\, f_2 \dots f_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = -\sum_{i=1}^{n} f_i x_i \tag{7.2}$$

unde variabilele de stare sunt considerate disponibile (măsurabile).

Introducând (7.2) în (7.1), se obţine modelul sistemului cu reacţie după stare :

$$x_{k+1} = \left(\Phi - \Gamma f^T\right) x_k = \Phi_0 x_k \,, \tag{7.3}$$

unde $\Phi_0 = \Phi - \Gamma f^T$ reprezintă matricea ataşată sistemului cu reacţie după stare.

Dacă se consideră şi mărimea de referinţă r_k, atunci legea de comandă poate fi de forma:

$$\begin{aligned} u_k &= w_k - f^T x_k \\ w_k &= w_{k-1} + k_i \varepsilon_k \\ \varepsilon_k &= r_k - y_k \end{aligned} \tag{7.4}$$

care, pe lângă legea de reglare după stare, include şi un integrator pe calea directă care generează semnalul w_k.

În figura 7.1 se prezintă structura SRA cu legea de reglare hibridă după stare şi eroare.

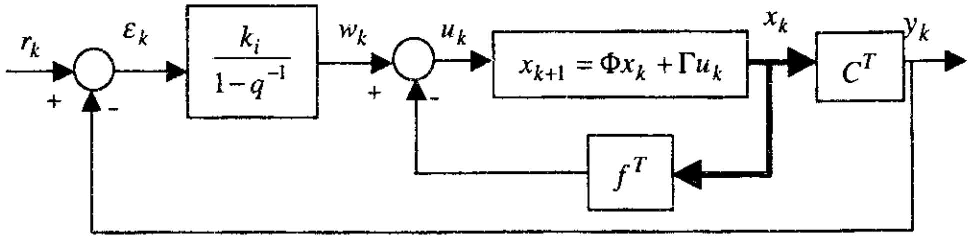


Fig. 7.1

Valorile proprii ale matricei Φ_0 determină comportarea dinamică a sistemului cu reacție. Pentru o pereche (Φ,Γ) controlabilă, există totdeauna o matrice f^T care alocă o configurație dorită a valorilor proprii ale matricei $(\Phi-\Gamma f^T)$, conform teoremei alocării [56, 62].

Ecuația caracteristică atașată sistemului cu reacție după stare este:

$$\det\left[zI-\Phi+\Gamma f^T\right]\equiv\det\left[zI-\Phi_0\right]=z^n+\alpha_1 z^{n-1}+\cdots+\alpha_n \quad (7.5)$$

Dacă alegem valorile proprii λ_i ale matricei Φ_0, astfel încât să obținem performanțele dorite, polinomul caracteristic dorit al sistemului are forma:

$$\alpha_c(z)=\prod_{i=1}^{n}\left[z-\lambda_i\right]=z^n+\alpha_1 z^{n-1}+\cdots+\alpha_n \quad (7.6)$$

Astfel, se forțează polinomul caracteristic al sistemului cu reacție după stare să fie identic cu ecuația caracteristică impusă prin performanțe.

Exemplul 7.1:

Se consideră modelul discret al unui proces caracterizat prin $H_p(s)=\frac{1}{s^2}$ *a cărui realizare este:*

$$\dot{x}_1=x_2$$
$$\dot{x}_2=u$$

sau

$$\dot{x}=Ax+bu$$
$$y=c^T x$$

unde $A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ *și* $c^T=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}$.

Echivalentul discret al acestui model continuu se obține cu ușurință pornind de la relațiile [6]:

$$\Phi=e^{At}\cong I+AT=\begin{bmatrix}1&T\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\Gamma=\int_0^T e^{As}ds\cdot b=\begin{bmatrix}\frac{T^2}{2}\\T\end{bmatrix}$$

unde T *reprezintă perioada de discretizare.*

Astfel, modelul de stare în forma discretă este:

$$x_{k+1}=\Phi x_k+\Gamma u_k$$

sau

$$x_{k+1}=\begin{bmatrix}1&T\\0&1\end{bmatrix}x_k+\begin{bmatrix}\frac{T^2}{2}\\T\end{bmatrix}u_k$$

$$y_k=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}x_k.$$

Același model de stare se obține dacă se consideră funcția de transfer în z pentru $H_p(s)=\frac{1}{s^2}$, *care este* $H_c(z)=\frac{T^2}{2}\frac{z+1}{(z-1)^2}$.

O lege de reglare după stare poate fi de forma:

$$u_k=-f_1x_1-f_2x_2.$$

Folosind o asemenea lege de reglare se obține ecuația de stare a sistemului închis:

$$x_{k+1}=\Phi_0 x_k=\begin{bmatrix}1-f_1\frac{T^2}{2} & T-f_2\frac{T^2}{2}\\ -f_1T & 1-f_2T\end{bmatrix}x_k.$$

Ecuația caracteristică a sistemului închis este:

$$\det[zI-\Phi_0]=z^2+\left(f_1\frac{T^2}{2}+f_2T-2\right)z+\left(f_1\frac{T^2}{2}-f_2T+1\right)=0.$$

Presupunând că ecuația caracteristică dorită a sistemului este:

$$z^2+\alpha_1 z+\alpha_2=0$$

rezultă, din identitatea celor două ecuații caracteristice, următoarele ecuații pentru calculul elementelor f_1 *și* f_2:

$$f_1\frac{T^2}{2}+f_2T-2=\alpha_1$$

$$f_1\frac{T^2}{2}-f_2T+1=\alpha_2$$

respectiv,

$$f_1=\frac{1}{T^2}(1+\alpha_1+\alpha_2)$$

$$f_2=\frac{1}{2T}(3+\alpha_1+\alpha_2).$$

De remarcat faptul că în acest exemplu există totdeauna soluție pentru f_1 *și* f_2, *pentru toate valorile* α_1 *și* α_2.

În cazul în care modelul procesului este în forma canonică controlabilă, matricea de comandă după stare se calculează direct în funcție de coeficienții a_i ai ecuației caracteristice a sistemului și coeficienții α_i ai ecuației caracteristice dorite a sistemului cu reacție după stare.

Într-adevăr, dacă perechea (Φ,Γ) este în forma canonică controlabilă:

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & . & . & . & -a_n \\ 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.7}$$

prin utilizarea comenzii $u_k = -f^T x_k$ se obține:

$$\Phi_0 = \Phi - \Gamma f^T = \begin{bmatrix} -a_1 - f_1 & -a_2 - f_2 & . & . & . & -a_n - f_n \\ 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.8}$$

iar ecuația caracteristică atașată sistemului este:

$$\det(zI - \Phi_0) = z^n + (a_1 + f_1)z^{n-1} + (a_2 + f_2)z^{n-2} + ... + (a_n + f_n)I_n \tag{7.9}$$

Ținând seama că ecuația caracteristică dorită a sistemului cu reacție după stare are forma (7.6), rezultă cu ușurință, din identitatea celor două ecuații (7.9) și (7.6), relațiile:

$$a_i + f_i = \alpha_i, \qquad i = 1,...n \tag{7.10}$$

respectiv $f_i = \alpha_i - a_i$.

Pentru un sistem care nu este în forma canonică controlabilă, se poate efectua o transformare liniară de forma:

$$x_k = T\tilde{x}_k$$

care transformă sistemul caracterizat prin perechea (Φ,Γ) într-un sistem caracterizat prin (Φ_c,Γ_c), $(\Phi,\Gamma) \xrightarrow{T} (\Phi_c,\Gamma_c)$:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1} &= T^{-1}\Phi T\tilde{x}_k + T^{-1}\Gamma u_k \\ y_k &= c^T T\tilde{x}_k \end{aligned} \tag{7.11}$$

sau

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1} &= \Phi_c\tilde{x}_k + \Gamma_c u_k \\ y_k &= c_c^T\tilde{x}_k \end{aligned} \tag{7.12}$$

unde $\Phi_c = T^{-1}\Phi T$, $\Gamma_c = T^{-1}\Gamma$, $c_c^T = c^T T$.

Ținând seama de această transformare liniară, legea de comandă după stare capătă forma:

$$u_k = -\tilde{f}^T\tilde{x}_k = -\tilde{f}^T T^{-1}x_k = -f^T x_k \tag{7.13}$$

unde $f^T = \tilde{f}^T T^{-1}$.

Este de menționat faptul că prin transformarea liniară se conservă controlabilitatea sistemului.

Pornind de la definiția matricelor Φ_c și Γ_c, rezultă că matricea de controlabilitate a sistemului transformat este:

$$R_c = \left[\Gamma_c \vdots \Phi_c\Gamma_c \vdots .... \vdots \Phi_c^{n-1}\Gamma_c\right]$$

sau

$$R_c = \left[T^{-1}\Gamma \vdots\ T^{-1}\Phi\ T^{-1}\Gamma \vdots ....\right] = T^{-1}R, \tag{7.14}$$

unde R este matricea de controlabilitate a sistemului inițial:

$$R = \left[\Gamma \vdots\ \ \Phi\Gamma \vdots\ \ \cdots\ \ \vdots \Phi^{n-1}\Gamma\right].$$

Astfel, matricea T se poate calcula cu relația:

$$T^{-1} = R_c R^{-1}. \tag{7.15}$$

Ținând seama de faptul că orice matrice verifică ecuația caracteristică conform teoremei Cayley-Hamilton, se poate obține o procedură rapidă de calcul a matricei de comandă după stare, cunoscută sub denumirea de procedura Ackerman [34, 56].

Pentru deducerea acestei proceduri de calcul a matricei de comandă după stare se consideră ecuația caracteristică a sistemului sub forma:

$$z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n = \alpha_c(z).$$

Conform teoremei Cayley-Hamilton:

$$\Phi_c^n + a_1\Phi_c^{n-1} + ... + a_n I_n = 0, \tag{7.16}$$

unde Φ_c este matricea în forma canonică controlabilă a sistemului controlat.

Ecuația caracteristică dorită a sistemului cu reacție după stare având forma:

$$z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} + ... + \alpha_n \equiv \alpha_c(z),$$

conduce la:

$$\Phi_c^n + \alpha_1\Phi_c^{n-1} + \alpha_2\Phi_c^{n-2} + ... + \alpha_n I_n = \alpha_c(\Phi_c). \tag{7.17}$$

Din (7.16) și (7.17) rezultă cu ușurință:

$$\alpha_c(\Phi_c) = (\alpha_1 - a_1)\Phi_c^{n-1} + (\alpha_2 - a_2)\Phi_c^{n-2} + ... + (\alpha_n - a_n)I_n \tag{7.18}$$

Deoarece Φ_c este în forma canonică controlabilă, se observă că produsul vectorului $e_n^T = [0\ \ 0\ \ .\ \ .\ \ 1]$ cu Φ_c conduce la:

$$e_n^T\Phi_c = [0\ \ 0\ \ .\ \ .\ \ 1\ \ 0] = e_{n-1}^T. \tag{7.19}$$

Dacă multiplicăm acest vector cu Φ_c, se obține:

$$\left(e_n^T\Phi_c\right)\Phi_c = [0\ \ 0\ \ .\ .\ 1\ \ 0]\Phi_c = [0\ \ 0\ \ \cdots\ \ 1\ \ 0\ \ 0] = e_{n-2}^T \qquad (7.20)$$

și așa mai departe:

$$e_n^T\Phi_c^{n-1} = [1\ \ 0\ \ 0.\ .\ .\ \ 0] = e_1^T.$$

Astfel, dacă multiplicăm (7.18) cu vectorul e_n^T se obține:

$$e_n^T\alpha_c(\Phi_c) = (\alpha_1 - a_1)e_1^T + (\alpha_2 - a_2)e_2^T + \ldots + (\alpha_n - a_n)e_n^T \qquad (7.21)$$

sau, dacă ținem seama de (7.10):

$$e_n^T\alpha_c(\Phi_c) = \bar{f}^T \qquad (7.22)$$

Pentru a obține matricea de comandă după stare f^T ținem seama că:

$$f^T = \bar{f}^T T^{-1} = e_n^T\alpha_c(\Phi_c)T^{-1} = e_n^T T^{-1}\alpha_c(\Phi) \qquad (7.23)$$

și $\Phi_c = T^{-1}\Phi T$, respectiv $\left(T^{-1}\Phi_c T\right)^n = T^{-1}\Phi^n T$.

Ținând seama de relația (7.15), se obține din (7.23):

$$f^T = e_n^T\left[R_c R^{-1}\right]\cdot\alpha_c(\Phi) \qquad (7.24)$$

sau, dacă ținem seama de forma matricei R_c, care are ultima linie identică cu vectorul e_n^T, se obține:

$$f^T = e_n^T R^{-1}\alpha_c(\Phi) \qquad (7.25)$$

întrucât $e_n^T R_c = e_n^T$.

Dacă introducem notația:

$$h^T \underset{=}{\underline{not}} [0\ \ 0\ \ .\ .\ .\ \ 1]R^{-1} \qquad (7.26)$$

se obține matricea de comandă după stare:

$$f^T = h^T\alpha_c(\Phi). \qquad (7.27)$$

Dându-se (Φ,Γ) și setul de valori proprii dorite λ_i, *procedura de calcul a matricei de comandă după stare* presupune parcurgerea următoarelor etape:

- se verifică controlabilitatea sistemului;
- se calculează coeficienții α_i ai ecuației caracteristice dorite ținând seama de relația:

  $\alpha_c(z) = \prod_1^n \left(z - \lambda_i\right) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \ldots + \alpha_n$;

- se calculează vectorul h^T ținând seama de relația:

  $h^T = e_n^T R^{-1}$;

- se calculează matricea de comandă f^T cu ajutorul relației:

  $f^T = h^T\alpha_c(\Phi)$;

- stop.

Această procedură poate fi extinsă cu ușurință și la sistemele cu mai multe intrări și mai multe ieșiri, dacă se are în vedere următorul rezultat remarcabil [34, 86] – *Dacă perechea* (Φ,Γ) *este controlabilă, atunci aproape oricare ar fi matricea* $F_0 \in \Re^{m\times n}$ *și vectorul* $g \in \Re^m$, *perechea cu o singură intrare definită prin* $(\Phi_1,\Gamma_1) \overset{\Delta}{=} (\Phi + \Gamma F_0, \Gamma g)$ *este controlabilă.* Astfel, dacă matricea f^T alocă polii perechii (Φ_1,Γ_1), adică $\lambda\left(\Phi_1 + \Gamma_1 f^T\right) = \Lambda$, atunci $\lambda\left(\Phi + \Gamma\left(F_0 + gf^T\right)\right) = \Lambda$, iar matricea de comandă $F = F_0 + gf^T$ alocă polii perechii inițiale (Φ,Γ), unde Λ reprezintă mulțimea valorilor proprii.

În acest caz, *procedura de sinteză a matricei de comandă*, în condițiile în care se dau (Φ,Γ,C) și mulțimea $\Lambda = \{\lambda_i\}$ a valorilor proprii dorite, presupune parcurgerea următoarelor etape:

- se verifică controlabilitatea perechii (Φ,Γ);
- se alege în mod aleator matricea F_0 și vectorul g și se verifică controlabilitatea perechii $\Phi_1 = \Phi + \Gamma F_0$, $\Gamma_1 = \Gamma g$;
- se determină pentru perechea (Φ_1,Γ_1) matricea de comandă f^T, conform procedurii Ackerman aplicată sistemelor cu o intrare și o ieșire;
- se construiește matricea de comandă F cu ajutorul relației $F = F_0 + gf^T$;
- stop.

Procedura expusă pentru sisteme cu mai multe intrări și mai multe ieșiri evidențiază faptul că *soluția problemei nu este unică*, matricea F_0 și vectorul g alegându-se în mod aleator.

Exemplul 7.2:

Se consideră același proces (dublu integrator) din exemplul 7.1 și se cere a determina matricea de comandă după stare folosind procedura Ackermann.

Matricea de controlabilitate a sistemului este:

$$R = [\Gamma \,\vdots\, \Phi\Gamma] = \left\{\begin{bmatrix}\dfrac{T^2}{2}\\ T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & T\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{T^2}{2}\\ T\end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix}\dfrac{T^2}{2} & 3\dfrac{T^2}{2}\\ T & T\end{bmatrix}$$

iar inversa acesteia are forma:

$$R^{-1}=\frac{1}{T^2}\begin{bmatrix}-1 & \frac{3T}{2}\\ 1 & -\frac{T}{2}\end{bmatrix};$$

2. Ecuația caracteristică dorită, a sistemului cu reacție după stare, pentru $\lambda_1=0.4$ *și* $\lambda_2=0.2$ *are forma:*

$$(z-0.4)(z-0.2)=z^2-0.6z+0.08=\alpha_c(z)$$

iar $\alpha_c(\Phi)$ *este:*

$$\alpha_c(\Phi)=\begin{bmatrix}1 & 2T\\ 0 & 1\end{bmatrix}-0.6\begin{bmatrix}1 & T\\ 0 & 1\end{bmatrix}+0.08\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.48 & 1.4T\\ 0 & 0.48\end{bmatrix};$$

Se calculează matricea de comandă:

$$f^T=\frac{1}{T^2}(0\quad 1)\begin{bmatrix}-1 & \frac{3T}{2}\\ 1 & -\frac{T}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0.48 & 1.4T\\ 0 & 0.48\end{bmatrix}$$

sau

$$f^T=\frac{1}{T^2}[0\quad 1]\cdot\begin{bmatrix}-0.48+1.4T & 0.72T-0.7T^2\\ 0.48 & -0.24T\end{bmatrix}=\frac{1}{T^2}[-048\quad -0.24T].$$

7.2. Estimarea stării

Este evident nerealistă aproximația că toate variabilele de stare ale procesului sunt accesibile măsurării. Este necesar a construi vectorul de stare din măsurări, pornind de la structura dată a modelului procesului.

Presupunem că modelul procesului are forma:

$$x_{k+1}=\Phi x_k+\Gamma u_k$$
$$y_k=c^T x_k \qquad (7.28)$$

unde u_k și y_k reprezintă informații funcționale, măsurabile. Se impune a construi un model al procesului care pe baza informațiilor u_k și y_k să genereze o ieșire $\hat{y}_k=c^T\hat{x}_k$, unde $\hat{x}_k\in\Re^n$ reprezintă starea estimată a procesului.

7.2.1. Calculul direct al variabilelor de stare

Pornind de la ecuația $y_k=c^T x_k$, obținem cu ușurință, la diferite momente discrete de timp:

$$y_{k-n+1}=c^T x_{k-n+1}$$
$$y_{k-n+2}=c^T\Phi x_{k-n+1}+c^T\Gamma u_{k-n+1} \qquad (7.29)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$y_k=c^T\Phi^{n-1}x_{k-n+1}+c^T\Phi^{n-2}\Gamma u_{k-n+1}+\ldots+c^T\Gamma u_{k-1}.$$

Dacă introducem vectorii:

$$Y_k=\begin{bmatrix}y_{k-n+1}\\ y_{k-n+2}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ y_k\end{bmatrix} \text{ și } U_k=\begin{bmatrix}u_{k-n+1}\\ u_{k-n+2}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ u_{k-1}\end{bmatrix},$$

ecuația (7.29) poate fi scrisă sub forma:

$$Y_k=W_0 x_{k-n+1}+W_u U_{k-1}$$

unde matricele W_0 și W_u au forma:

$$W_0=\begin{bmatrix}c^T\\ c^T\Phi\\ c^T\Phi^2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ c^T\Phi^{n-1}\end{bmatrix} \text{ și } W_u=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ c^T\Gamma & 0 & \cdots & 0\\ c^T\Phi\Gamma & c^T\Gamma & \cdots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ c^T\Phi^{n-2}\Gamma & c^T\Phi^{n-3}\Gamma & \cdots & c^T\Gamma\end{bmatrix}.$$

Matricea W_0 este inversabilă dacă sistemul este observabil și ca urmare:

$$x_{k-n+1}=W_0^{-1}Y_k-W_0^{-1}W_u U_{k-1}.$$

Astfel, starea se obține în funcție de Y_k și U_k.

Din ecuația de stare a sistemului se obține cu ușurință:

$$x_k=\Phi^{n-1}x_{k-n+1}+\Phi^{n-2}\Gamma u_{k-n+1}+\ldots+\Gamma u_{k-1}$$

sau

$$x_k=\Phi_y Y_k+\Gamma_u U_{k-1}, \qquad (7.30)$$

unde

$$\Phi_y = \Phi^{n-1} w_0^1, \quad \Gamma_u = \left[\Phi^{n-2}\Gamma \; \vdots \; \Phi^{n-3}\Gamma \; \vdots \; .... \vdots \; \Gamma\right] - \Phi^{n-1} w_0^{-1} w_u \qquad (7.31)$$

Vectorul de stare este astfel o combinație liniară a variabilelor $(y_k, y_{k-1}, ... y_{k-n+1})$ și $(u_{k-1}, u_{k-2}, ... u_{k-n+1})$.

Pentru a ilustra acest mod de construcție a variabilelor de stare, considerăm exemplul următor.

Exemplul 7.3:

Procesul condus este caracterizat prin modelul de stare[6]:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} u_k$$

$$y_k = [1 \quad 0] x_k.$$

Scriind ecuațiile:

$$y_k = x_k^1$$

$$y_k = x_{k-1}^1 + T x_{k-1}^2 + \frac{T^2}{2} u_{k-1}$$

se obțin cele două variabile de stare x_k^1 *și* x_k^2*:*

$$x_k^1 = y_k$$

$$x_k^2 = \frac{y_k - y_{k-1}}{T} + \frac{T}{2} u_{k-1}.$$

Astfel, variabila de stare x_k^1 *se calculează direct, fiind egală cu variabila măsurată, iar variabila* x_k^2 *se calculează în funcție de* y_k, y_{k-1} *și* u_{k-1}, *care sunt disponibile.*

7.2.2. Reconstrucția stării folosind un sistem dinamic

Cea mai simplă cale de a estima starea unui proces a cărui realizare este cunoscută (Φ, Γ, c^T) presupune a construi un model al procesului sub forma:

$$\hat{x}_{k+1} = \Phi \hat{x}_k + \Gamma u_k$$
$$\hat{y}_k = c^T \hat{x}_k \qquad ; \quad \hat{x}_0 \in \Re^n \qquad (7.32)$$

unde $\hat{x}_k$ reprezintă starea estimată a procesului.

Dacă definim eroarea de estimare $e_k := x_k - \hat{x}_k$, rezultă cu ușurință

$$e_{k+1} = \Phi e_k, \qquad (7.33)$$

ceea ce evidențiază imposibilitatea de a controla convergența stării estimate la starea reală a procesului. În cazul în care condițiile inițiale ale sistemului real (ec. 7.28) și ale sistemului (7.32), care reprezintă modelul sistemului real, convergența stării $\hat{x}_k$ la starea reală x_k a sistemului se asigură numai dacă sistemul (7.32) este asimptotic stabil.

Pentru a controla convergența stării estimate $\hat{x}_k$ la starea reală x_k, se construiește un sistem dinamic sub forma:

$$\hat{x}_{k+1} = \Phi \hat{x}_k + \Gamma u_k + L(y_k - \hat{y}_k)$$
$$\hat{y}_k = c^T \hat{x}_k \qquad ; \quad \hat{x}_k \in \Re^n \qquad (7.34)$$

unde L reprezintă matricea de ponderare a erorii $\varepsilon_k = y_k - \hat{y}_k$ dintre ieșirile procesului și predictorului (estimatorului) (7.34).

Structura predictorului de stare (7.34) este prezentată în figura 7.2*a*. Astfel, reconstrucția stării se realizează prin includerea în sistem a ieșirilor măsurate y_k și $\hat{y}_k$, obținând starea $\hat{x}_{k+1}$ pe baza informațiilor anterioare (la momentul k). Modelul (7.34) poate fi pus și sub forma:

$$\hat{x}_{k+1|k} = \Phi \hat{x}_{k|k-1} + \Gamma u_k + L\left(y_k - c^T \hat{x}_{k|k-1}\right) \qquad (7.35)$$

ceea ce evidențiază comportarea ca predictor de stare într-un pas, ce generează starea $\hat{x}_{k+1}$ pe baza măsurătorilor disponibile la momentul k.

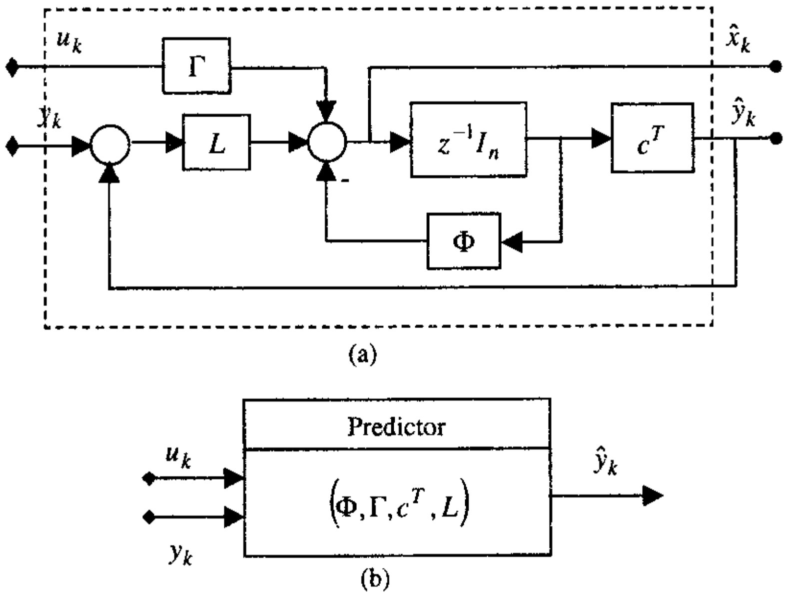


Fig. 7.2

În cazul în care cele două ieșiri sunt identice, ultimul termen în (7.34) nu are nici un efect.

Modelul (7.34) poate fi pus sub forma:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= \left(\Phi - Lc^T\right)\hat{x}_k + \Gamma u_k + L y_k \\ \hat{y}_k &= c^T \hat{x}_k \quad ; \quad \hat{x}_k \in \Re^n \end{aligned} \tag{7.36}$$

ceea ce evidenţiază că dinamica predictorului de stare cu intrările u_k şi y_k este determinată de matricea $\Phi_e = \Phi - Lc^T$.

Astfel, predictorul de stare reprezintă un sistem cu intrările măsurabile u_k şi y_k şi cu starea $\hat{x}_k$ şi ieşirea $\hat{y}_k$ (fig. 7.2*b*).

Pentru a determina matricea L scriem ecuaţia erorii de estimare (de reconstrucţie) sub forma:

$$e_{k+1} = \left(\Phi - Lc^T\right)e_k \tag{7.37}$$

sau

$$e_{k+1|k} = \left(\Phi - Lc^T\right)e_{k|k-1}. \tag{7.38}$$

Matricea L poate fi aleasă astfel încât sistemul (7.37) să fie asimptotic stabil, adică e_k va converge la zero totdeauna. Prin introducerea reacţiei de la măsurători (termenul $L(y_k - \hat{y}_k)$) în procesul de reconstrucţie a stării este posibil a face ca eroarea e_k să conveargă la zero, chiar dacă sistemul (7.28) este instabil.

Este de remarcat faptul că (7.37) reprezintă un sistem asimptotic stabil, dacă perechea $\left(\Phi, c^T\right)$ este detectabilă (observabilă).

Pentru un sistem observabil se poate găsi, conform teoremei alocării [54, 73], o matrice L care să aloce valorile proprii ale matricei $\left(\Phi - Lc^T\right)$ în alocaţii apriori fixate. Astfel, indiferent de starea iniţială $\hat{x}_0$, procesul de convergenţă a stării $\hat{x}_k$ este controlat prin alegerea matricei L a predictorului.

Determinarea matricei L este practic identică cu determinarea matricei de comandă după stare f^T prin alocarea de poli. Selecţia polilor predictorului trebuie să fie un compromis între sensibilitatea la erorile de măsurare şi rapida refacere a erorilor iniţiale. Un predictor rapid va converge repede, însă va fi sensibil la erorile de măsurare [43].

Matricea L se poate determina în mod similar ca matricea f^T printr-o procedură de alocare a polilor, dacă se consideră dualitatea proprietăţilor structurale ale sistemului, controlabilitatea şi observabilitatea.

Cea mai simplă procedură de calcul a matricei L are la bază identitatea:

$$\det\left(zI - \Phi + Lc^T\right) = z^n + \hat{\alpha}_1 z^{n-1} + \hat{\alpha}_2 z^{n-2} + \ldots + \hat{\alpha} = \prod_1^n \left(z - \hat{\lambda}_i\right), \tag{7.39}$$

unde $\hat{\lambda}_i$ reprezintă valorile proprii dorite ale predictorului.

Folosind procedura Ackermann extinsă la sistemul cu perechea $\left(\Phi, c^T\right)$ observabilă, se obţine matricea L sub forma:

$$L^T = [0 \ \ 0 \ \ . \ \ . \ \ 1]\left(W_0^T\right)^{-1} \alpha_e\left(\Phi^T\right)$$

sau

$$L = \alpha_e(\Phi) W_0^{-1} [0 \ \ 0 \ \ . \ \ . \ \ 1]^T, \tag{7.40}$$

unde W_0 reprezintă matricea de observabilitate a sistemului:

$$W_0^T = \left[c \ \ \Phi^T c \ \ldots \ \left(\Phi^{n-1}\right)^T c\right],$$

iar $\alpha_e(z)$ este polinomul caracteristic al predictorului de stare.

Dacă matricea L se alege astfel încât matricea $\left(\Phi - Lc^T\right)$ să aibă toate valorile proprii în origine, obţinem un *predictor deadbeat.* Acest predictor are proprietatea că eroarea de estimare atinge valoarea zero într-un timp finit egal cu nT.

Astfel, dacă folosim procedura Ackermann pentru calculul matricei L, aceasta se calculează în cazul predictorului deadbeat cu relaţia:

$$L = \Phi^n \cdot W_0^{-1} \cdot [0 \ \ 0 \ \ . \ \ . \ \ 1]^T. \tag{7.41}$$

Pentru a evita întârzierile ce apar în calculul stării pe baza măsurătorilor anterioare se poate utiliza un estimator de stare sub forma:

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= \hat{x}_k^0 + L\left(y_k - \hat{y}_k^0\right) \\ \hat{y}_k^0 &= c^T \hat{x}_k^0 \end{aligned} \tag{7.42}$$

unde starea estimată $\hat{x}_k^0$ se calculează cu relaţia:

$$\hat{x}_k^0 = \Phi \hat{x}_{k-1} + \Gamma u_{k-1}.$$

Astfel, estimatorul de stare este descris prin ecuaţia:

$$\hat{x}_k = \Phi \hat{x}_{k-1} + \Gamma u_{k-1} + L y_k - Lc^T\left(\Phi \hat{x}_{k-1} + \Gamma u_{k-1}\right)$$

sau

$$\hat{x}_k = \left(I - Lc^T\right)\left[\Phi \hat{x}_{k-1} + \Gamma u_{k-1}\right] + L y_k. \tag{7.43}$$

Eroarea de estimare în acest caz este:

$$e_k = x_k - \hat{x}_k = \left(\Phi - Lc^T \Phi\right)e_{k-1}. \tag{7.44}$$

Această ecuaţie este similară cu (7.37) şi, din definiţia matricei de observabilitate W_0, reiese că perechea $\left(\Phi, c^T \Phi\right)$ este observabilă dacă perechea $\left(\Phi, c^T\right)$ este observabilă. Aceasta implică faptul că valorile proprii ale matricei $\left(\Phi - Lc^T \Phi\right)$ pot fi alocate arbitrar prin alegerea matricei L.

Pentru un sistem cu p ieşiri şi m intrări, se poate cu uşurinţă observa că matricea $(I - CL)$ este o matrice $p \times p$, iar L poate fi aleasă astfel ca $CL = I$, dacă rangul matricei C este egal cu p.

Aceasta implică egalitatea $y_k = C\hat{x}_k$, ceea ce evidenţiază că ieşirea sistemului este estimată fără eroare.

Este de remarcat că *starea la tactul k se generează pe baza informaţiilor curente măsurate în cadrul unui proces iterativ.* Utilizarea unui estimator sau a unui predictor pentru furnizarea stării $\hat{x}_k$ pe baza măsurătorilor se va face ţinând seama de informaţia disponibilă, de precizia de cunoaştere a modelului, de precizia de măsurare a ieşirilor din proces. Pentru procese multivariabile cu $y_k \in \Re^p$ şi $x_k \in \Re^n$, în cazul în care cele p ieşiri sunt conţinute în vectorul de stare şi sunt măsurabile, se poate construi un estimator (predictor) minimal. Dimensiunea vectorului de stare ce trebuie estimat în acest caz este $(n-p)\left(\hat{x}_k \in \Re^{n-p}\right)$. În [15, 86] sunt prezentate problemele specifice proiectării unui estimator minimal.

În cazul prezenţei unor zgomote importante la măsurări, un estimator complet (estimarea celor n variabile de stare) asigură precizie superioară, impunându-se utilizarea acestuia, chiar dacă efortul de calcul este mai mare.

7.3. Proiectarea regulatorului cu estimator de stare

Considerăm în cele ce urmează cazul general al unui sistem cu mai multe intrări şi mai multe ieşiri:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi x_k + \Gamma u_k \\ y_k &= C x_k \quad ; \quad x_0 \in \Re^n \end{aligned} \tag{7.45}$$

unde $u_k \in \Re^m$, $y_k \in \Re^p$, iar matricele Φ, Γ, C au dimensiuni corespunzătoare.

În condiţiile cunoaşterii matricelor de comandă F şi de estimare L, regulatorul cu estimator de stare este descris prin:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= \Phi x_k + \Gamma u_k + L y_k - L\hat{y}_k \\ \hat{y}_k &= C\hat{x}_k \\ u_k &= w_k - F\hat{x}_k \end{aligned} \tag{7.46}$$

sau

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= (\Phi - LC - \Gamma F)\hat{x}_k + L y_k + \Gamma w_k \\ u_k &= w_k - F\hat{x}_k \end{aligned} \tag{7.47}$$

unde w_k este comanda ce asigură comportarea dorită în regim staţionar în raport cu referinţa.

Dacă analizăm comportarea sistemului cu reacţie după stare (fără considerarea comenzii w_k) evidenţiind eroarea de predicţie, obţinem pentru sistemul cu reacţie după stare şi cu predictor, modelul compus cu starea $\tilde{x}_k := \left[e_k^T x_k^T\right]^T$ sub forma:

$$\tilde{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} e_{k+1} \\ x_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi - LC & 0 \\ \Gamma F & \Phi - \Gamma F \end{bmatrix} \tilde{x}_k . \tag{7.48}$$

Ecuaţia caracteristică a sistemului închis (7.48) este:

$$\det[zI - \Phi + LC]\ \det[zI - \Phi + \Gamma F] = \alpha_e(z)\alpha_c(z) = \alpha_0(z) \equiv P_c(z) \tag{7.49}$$

unde $\alpha_e(z)$ este polinomul caracteristic al predictorului de stare, $\alpha_c(z)$ este polinomul caracteristic al regulatorului cu reacţie după stare, iar $\alpha_0(z)$ este polinomul caracteristic al sistemului închis (fig. 7.3) [34,43].

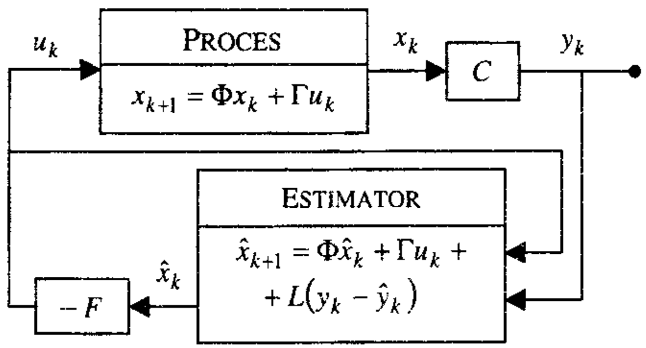


Fig. 7.3

Se poate observa că rădăcinile ecuaţiei caracteristice a sistemului cu regulator şi estimator de stare sunt compuse din rădăcinile estimatorului şi ale regulatorului, care sunt neschimbate ca urmare a principiului separării.

Regulatorul cu estimator poate fi descris şi prin ecuaţiile:

$$\hat{x}_{k+1} = [\Phi - \Gamma F - LC]\hat{x}_k + L y_k \tag{7.50}$$

$u_k = -F\hat{x}_k$, dacă nu se ia în consideraţie comanda w_k

Astfel, matricea de transfer ce caracterizează comportarea regulatorului cu estimator este:

$$H_R(z) = -F[zI - \Phi + \Gamma F + LC]^{-1} \cdot L \tag{7.51}$$

iar ecuaţia caracteristică a regulatorului este:

$$\det[zI - \Phi + \Gamma F + LC] = \alpha_R(z) \tag{7.52}$$

Pentru proiectarea regulatorului cu estimator *(compensator dinamic)* vom determina matricea de comandă F, astfel încât să fie satisfăcute cerințele de performanță și în condițiile unor restricții impuse de procesul condus *(elementul de execuție)*, iar matricea L a estimatorului se va determina astfel încât estimatorul să fie mai rapid decât regulatorul de cel puțin patru ori *[43, 46, 86]. Această cerință este impusă de restricțiile de timp la implementarea în timp real a legii de reglare după stare.*

Estimarea rapidă a stării se impune la implementarea algoritmului de reglare, însă aceasta trebuie să fie corelată cu caracteristicile zgomotului și posibilitățile de rejectare ale acestuia. Tehnicile de estimare optimală a stării permit rezolvarea problemelor privind viteza maximă de estimare [86]. Structura sistemului de reglare cu regulator și estimator este prezentată în figura 7.4.

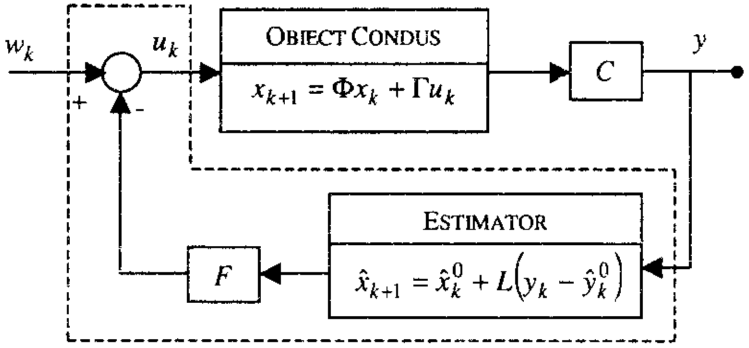


Fig. 7.4

În practică, este convenabil a selecta rădăcinile ecuației caracteristice a regulatorului, pentru a satisface cerințele de performanță și restricțiile impuse de elementele de execuție, iar rădăcinile ecuației caracteristice estimatorului (predictorului), astfel încât să se asigure o viteză ridicată de răspuns în corelație cu cerințele de rejecție a zgomotului de măsură și cu sensibilitatea la erorile de modelare.

7.4. Proiectarea regulatorului în prezența perturbațiilor

Regulatorul bazat pe reacție după stare cu estimator prezintă interes academic, însă nu este foarte util din punct de vedere practic. Acest neajuns este determinat de faptul că perturbațiile au fost luate în considerație într-un mod simplist, și anume ca variații ale stării inițiale.

În cele ce urmează considerăm procesul supus acțiunii perturbației $v(t)$, caracterizat prin modelul:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + v(t) \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \tag{7.53}$$

Perturbația $v(t)$, care uzual are mai multă energie la frecvențe joase, poate fi modelată astfel [6]:

$$\frac{dw}{dt} = A_1 w$$
$$v = C_1 w$$

unde matricea A_w are valori proprii în origine sau pe axa imaginară sau în semiplanul drept.

Dacă introducem vectorul compus $x_1(t) := [x, w]^T$ și discretizăm sistemul:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \begin{bmatrix} A & C_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} x_1 \end{aligned} \tag{7.54}$$

obținem echivalentul discret de forma:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ w_{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi & \Phi_{xw} \\ 0 & \Phi w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix} u_k \\ y_k &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{7.55}$$

Legea de comandă în acest caz este o combinație liniară a tuturor variabilelor de stare:

$$u_k = -F\hat{x}_k - F_w \hat{w}_k \tag{7.56}$$

unde $\hat{x}_k$ și $\hat{w}_k$ sunt stările estimate cu ajutorul predictorului de stare:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{k+1} \\ \hat{w}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Phi_{xw} \\ 0 & \Phi_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{w}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} L \\ L_w \end{bmatrix} (y_k - C\hat{x}_k) \tag{7.57}$$

În acest caz, starea predictorului este compusă din stările estimate ale procesului și ale generatorului de perturbații, iar comanda conține și o componentă în funcție de starea estimată $\hat{w}_k$.

Sistemul închis este astfel descris de modelul:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (\Phi - \Gamma F)x_k + (\Phi_{xw} - \Gamma F_w)w_k - \Gamma F e_k - \Gamma F_w e_k^w \\ w_{k+1} &= \Phi_w w_k \\ e_{k+1} &= (\Phi - LC)e_k + \Phi_{xw} e_k^w \\ e_{k+1}^w &= \Phi_w e_k^w - L_w C e_k \end{aligned} \tag{7.58}$$

Matricea F asigură ca starea x_k să meargă la zero cu o viteză dorită după apariția unei perturbații. O alegere corespunzătoare a matricei F_w reduce efectul perturbației v asupra sistemului prin acțiunea directă în funcție de perturbația estimată $\hat{w}_k$. Această acțiune directă în funcție de perturbație este efectivă dacă matricea $(\Phi_{xw} - \Gamma F_w)$ poate fi egalată cu zero.

Amplificările predictorului L și L_w influențează viteza cu care erorile de estimare converg la zero. Structura sistemului cu reacție după stare și perturbație este prezentată în figura 7.5.

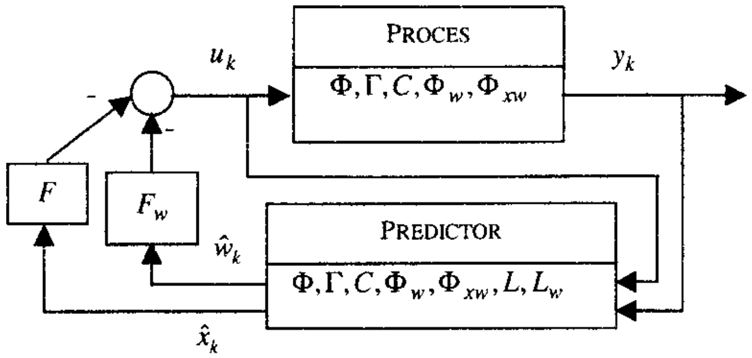


Fig. 7.5

În cazul în care la intrarea procesului se aplică o perturbație constantă, atunci $w_k = v_k$ și $\Phi_w = 1$, iar $\Phi_{xw} = \Gamma$ dacă această perturbație acționează la intrarea procesului cu o intrare și o ieșire. În aceste condiții, rezultă din (7.58) că $F_w = 1$ și efectul perturbației de tip sarcină este rejectat.

Admițând că nu există erori de măsurare, regulatorul descris prin ecuațiile (7.56) și (7.57) devine:

$$\begin{aligned} u_k &= -\hat{F}x_k - F_w\hat{v}_k = -F\hat{x}_k - \hat{v}_k \\ \hat{x}_{k+1} &= \Phi\hat{x}_k + \Gamma(\hat{v}_k + u_k) + L(y_k - C\hat{x}_k) \\ \hat{v}_{k+1} &= \hat{v}_k + L_w(y_k - C\hat{x}_k) \end{aligned} \tag{7.59}$$

Se observă că estimarea perturbației se realizează simplu prin integrarea erorii dintre cele două ieșiri ale procesului și predictorului $\hat{\varepsilon}_k = y_k - \hat{y}_k = y_k - C\hat{x}_k$.

Structura sistemului cu perturbație de tip sarcină rejectată prin reacția după stare este prezentată în figura 7.6.

Rezultă cu ușurință din figura 7.6 că efectul perturbației v este anulat prin estimația $\hat{v}_k$ care se obține prin integrarea erorii $\hat{\varepsilon}_k$. Astfel, a fost introdus un integrator în predictorul de perturbație și, în consecință, regulatorul are inclusă componenta integrală.

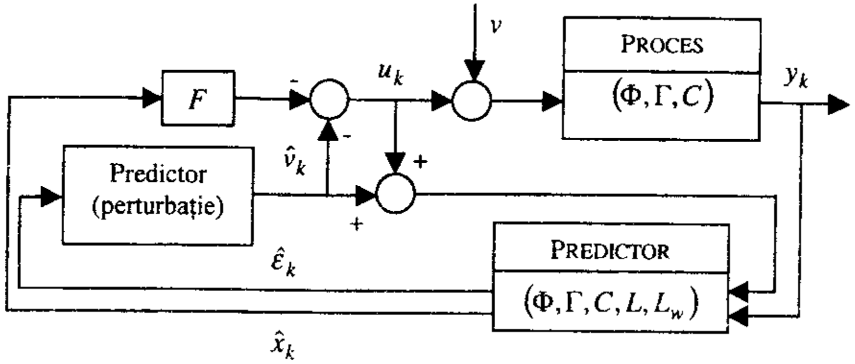


Fig. 7.6

Rescriind ecuațiile (7.59) sub forma:

$$\begin{aligned} u_k &= -F\hat{x}_k - \hat{v}_k \\ \hat{x}_{k+1} &= (\Phi - \Gamma F)\hat{x}_k + L(y_k - C\hat{x}_k) \\ \hat{v}_{k+1} &= \hat{v}_k + L_w(y_k - C\hat{x}_k) \end{aligned} \tag{7.60}$$

se evidențiază mai clar existența integratorului în structura regulatorului.

Este de observat că starea estimată $\hat{x}_k$ este aceeași ca în cazul în care nu exista perturbația v_k.

Prin aplicarea transformatei Z ecuațiilor (7.60) se obține cu ușurință:

$$\begin{aligned} U(z) &= -F\hat{X}(z) - \hat{V}(z) \\ [zI - \Phi + \Gamma F + LC]\hat{X}(z) &= LY(z) \\ \hat{V}(z) &= (z-1)^{-1}L_w\left[Y(z) - C\hat{X}(z)\right] \end{aligned}$$

sau

$$\hat{X}(z) = [zI - \Phi + \Gamma F + LC]^{-1}LY(z) = H_{yx}(z)Y(z)$$

unde

$$H_{yx}(z) \overset{not}{=} [zI - \Phi + \Gamma F + LC]^{-1}L \tag{7.61}$$

Folosind acest rezultat intermediar se obține comanda sub forma:

$$U(z) = -FH_{yx}(z)Y(z) - \hat{V}(z)$$

sau

$$U(z) = -\left[FH_{yx}(z) + \frac{1}{z-1}L_w\left(I - CH_{yx}(z)\right)\right]Y(z) \tag{7.62}$$

Această expresie arată că regulatorul conține componenta integrală. Acțiunea integrală este obținută prin estimarea perturbației constante ce acționează la intrarea procesului.

7.5. Proiectarea regulatorului pentru urmărirea referinței

Unul dintre obiectivele sistemului de reglare automată este de a asigura urmărirea referinței. Astfel, se cere unui SRA ca stările și ieșirile sistemului să răspundă la modificările referinței într-un mod apriori specificat.

Cea mai simplă abordare a acestei probleme este de a include în legea de comandă o componentă proporțională cu referința sub forma:

$$u_k = -F\hat{x}_k + Nr_k \tag{7.63}$$

unde N este un scalar, în cazul sistemelor cu o intrare și o ieșire, și o matrice, în cazul sistemelor cu mai multe intrări și mai multe ieșiri [34, 43].

Pentru a analiza comportarea SRA în prezența acestui regulator, considerăm sistemul închis caracterizat prin modelul:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi x_k + \Gamma u_k \\ y_k &= Cx_k \\ \hat{x}_{k+1} &= \Phi\hat{x}_k + \Gamma u_k + L(y_k - C\hat{x}_k) \\ u_k &= -F\hat{x}_k + Nr_k \end{aligned} \tag{7.64}$$

sau, dacă introducem eroarea de estimare e_k:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (\Phi - \Gamma F)x_k + \Gamma F e_k + \Gamma N r_k \\ e_{k+1} &= (\Phi - LC)e_k \\ y_k &= Cx_k \end{aligned} \tag{7.65}$$

De remarcat faptul că eroarea de estimare nu este controlată prin r_k. Această observație sugerează includerea semnalului de referință, astfel încât eroarea de estimare să poată fi controlată.

Ecuația predictorului de stare în acest caz poate fi pusă sub forma:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= (\Phi - \Gamma F - LC)\hat{x}_k + Ly_k + Mr_k \\ u_k &= Nr_k - F\hat{x}_k \end{aligned} \tag{7.66}$$

Astfel, prin proiectarea regulatorului, se urmărește determinarea matricei M și a scalarului N, astfel încât să se asigure o anumită configurație a zerourilor funcției de transfer $H_0(z)$.

Funcția de transfer a sistemului de reglare, ținând seama de (7.65), se obține sub forma:

$$H_0(z) = C[zI - \Phi + \Gamma F]^{-1}\Gamma N = N \cdot \frac{B(z)}{A_0(z)} \tag{7.67}$$

unde $A_0(z)$ este ecuația caracteristică a sistemului cu reacție după stare.

Dacă se compară (7.67) cu funcția de transfer a procesului:

$$H_c(z) = C[zI - \Phi]^{-1}\Gamma = \frac{B(z)}{A(z)}, \tag{7.68}$$

rezultă că zerourile sistemului nu sunt modificate prin comanda ce include referința.

Faptul că polinomul $B(z)$ apare la numărătorul ambelor funcții de transfer poate fi ușor evidențiat prin aducerea ambelor sisteme în forma canonică controlabilă.

Pentru a asigura urmărirea referinței cu anularea erorii în regim staționar pentru referințe constante, introducem componenta integrală în legea de comandă considerând la intrarea procesului o perturbație constantă v. În acest caz, legea de comandă poate fi scrisă sub forma [6]:

$$\begin{aligned} u_k &= -F\hat{x}_k - \hat{v}_k + Nr_k \\ \hat{x}_{k+1} &= \Phi\hat{x}_k + \Gamma(\hat{v}_k + u_k) + L(y_k - C\hat{x}_k) \\ \hat{v}_{k+1} &= \hat{v}_k + L_w(y_k - C\hat{x}_k) \end{aligned} \tag{7.69}$$

Aceste ecuații pot fi scrise și sub forma:

$$\begin{aligned} u_k &= -F\hat{x}_k - \hat{v}_k + Nr_k \\ \hat{x}_{k+1} &= (\Phi - \Gamma F)\hat{x}_k + \Gamma N r_k + L(y_k - C\hat{x}_k) \\ \hat{v}_{k+1} &= \hat{v}_k + L_w(y_k - C\hat{x}_k) \end{aligned} \tag{7.70}$$

Din comparația relațiilor (7.70) și (7.59) rezultă că urmărirea referinței se obține printr-o modificare simplă a rezultatului obținut în § 7.5.

Referindu-se la ecuația generală a predictorului de stare (7.66), se observă că alegerea scalarului N și a matricei M poate asigura comanda în funcție de eroarea de reglare $\varepsilon_k = r_k - y_k$ sau eroarea de estimare să fie independentă de referință.

Astfel, în acest din urmă caz, rezultă $M = \Gamma N$, iar în cazul în care comanda se calculează în funcție de ε_k, $M = -L$ [6, 43].

Într-adevăr, din ecuația erorii de estimare:

$$e_{k+1} = (\Phi - LC)e_k + [\Gamma N - M]r_k \tag{7.71}$$

pentru ca aceasta să nu fie influențată de referință, rezultă $M = \Gamma N$.

Pornind de la ecuația (7.66) și incluzând eroarea de reglare se obține:

$$\hat{x}_{k+1} = (\Phi - \Gamma F - LC)\hat{x}_k + L(y_k - r_k)$$

ceea ce permite a alege $M = -L$ și $N = 0$ pentru ca u_k să fie calculată în funcție de eroarea de reglare ε_k.

Matricea M și scalarul N trebuie alese astfel încât să se obțină flexibilitate maximă în satisfacerea restricțiilor impuse de răspunsul dorit al sistemului de reglare. Această cerință se poate realiza printr-o alegere a matricei M și a scalarului N care asigură o alocare arbitrară a zerourilor funcției de transfer $H_0(z)$.

7.6. Regulator cu două grade de libertate

Realizarea celor două obiective ale reglării: *urmărirea referinței* și *rejectarea perturbațiilor* este posibilă practic prin utilizarea unei structuri de regulator cu două grade de libertate. În figura 7.7 se prezintă structura de principiu a unui sistem de reglare cu două grade de libertate.

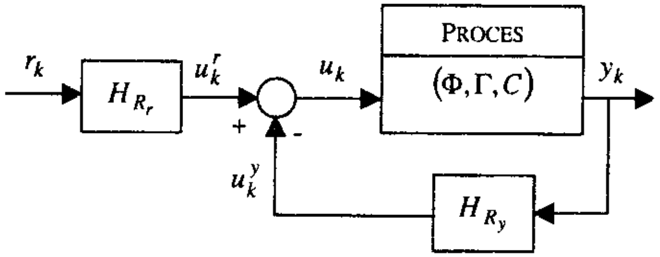


Fig. 7.7

Regulatorul H_{Ry} se proiectează astfel încât să se asigure insensibilitatea la perturbații, la zgomotul de măsură și la incertitudinile introduse prin modelare. Regulatorul H_{Rr} se proiectează pentru a obține performanțe impuse în raport cu modificarea referinței.

Pentru a proiecta regulatorul cu funcția de transfer H_{Rr}, presupunem că performanțele de urmărire sunt specificate printr-un model de stare:

$$\begin{aligned} x_{k+1}^m &= \Phi_m x_k^m + \Gamma r_k \\ y_k^m &= C_m x_k^m \end{aligned} \tag{7.72}$$

unde $x_k^m \in \Re^{n_m}$ reprezintă starea modelului de referință ce realizează o ieșire dorită (optimală) în raport cu referința r_k.

Legea de reglare în acest caz poate fi, în mod natural:

$$u_k = F\left(x_k^m - \hat{x}_k\right) + u_k^r \tag{7.73}$$

unde x_k^m este starea dorită, iar u_k^r este semnalul de comandă ce asigură ieșirea dorită [6].

Termenul $u_k^y = F\left(x_k^m - \hat{x}_k\right)$ reprezintă semnalul de reacție, iar u_k^r reprezintă semnalul de acțiune directă (feedforward) (fig. 7.8), care se aplică în buclă deschisă.

Semnalul u_k^r va produce variația dorită a stării procesului. Dacă starea estimată a procesului $\hat{x}_k$ egalează starea modelului x_k^m, semnalul de

reacție $F\left(x_k^m - \hat{x}_k\right)$ este egal cu zero. Dacă există diferență între $\hat{x}_k$ și x_k^m, reacția va genera acțiuni de corecție.

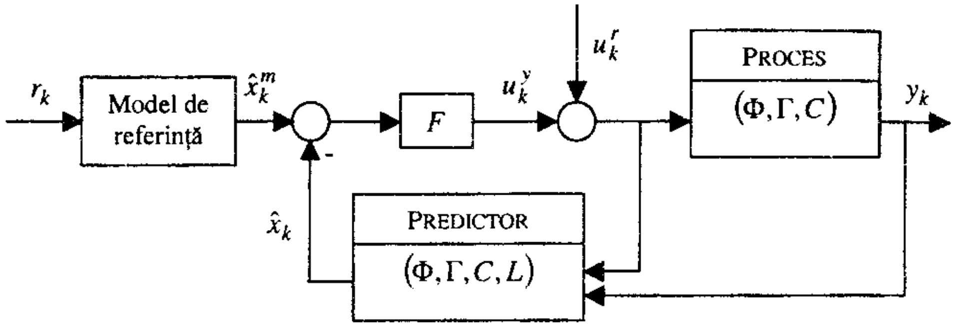


Fig. 7.8

Pentru a genera semnalul de acțiune directă în funcție de referință, să observăm că dacă prin $H_c(z)$ am notat funcția de transfer a procesului, iar prin $H_m(z)$ funcția de transfer a modelului de referință, semnalul de comandă directă în funcție de referință, u_k^r, poate fi calculat cu ajutorul relației:

$$u_k^r = \frac{H_m\left(q^{-1}\right)}{H_c\left(q^{-1}\right)} r_k \tag{7.74}$$

Pentru a utiliza această relație se impun câteva condiții:

– modelul $H_m(z)$ să fie stabil;

– excesul polilor modelului trebuie să nu fie mai mic decât excesul polilor procesului;

– zerourile instabile ale procesului trebuie să fie zerouri ale modelului $H_m(z)$.

În cazul proceselor cu o intrare și o ieșire, rezultă:

$$u_k^r = K_m \frac{A(q)}{A_m(q)} r_k = K_m \left[1 + \frac{\left(a_1 - \alpha_1^m\right)q^{n-1} + \ldots + \left(a_n - \alpha_n^m\right)}{q^n + \alpha_1^m q^{n-1} + \ldots + \alpha_n^m}\right] r_k, \tag{7.75}$$

întrucât $H_c(z) = \dfrac{B(z)}{A(z)}$ și $H_m(z) = K_m \dfrac{B(z)}{A_m(z)}$.

Semnalul u_k^r poate fi generat din stările modelului de referință, în cazul în care se construiește perechea (Φ_m, Γ_m) în forma canonică controlabilă:

$$\Phi_m = \begin{bmatrix} -\alpha_1^m & -\alpha_2^m & . & . & . & -\alpha_{n-1}^m & -\alpha_n^m \\ 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \Gamma_m = \begin{bmatrix} K_m \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (7.76)$$

Astfel, ţinând seama de (7.75), rezultă:

$$u_k^r = K_m r_k + f_r^T \cdot x_k^m \qquad (7.77)$$

unde

$$f_r^T = \left[a_1 - \alpha_1^m \quad a_2 - \alpha_2^m \quad . \; . \; . \; . \quad a_n - \alpha_n^m\right]. \qquad (7.78)$$

Prin transformări corespunzătoare se pot obţine diferite reprezentări ale legii de comandă după starea x_k^m.

Uneori pot fi introduse neliniarităţi în comanda directă în funcţie de referinţă pentru a atenua efectul dur al acestuia. Având în vedere că această comandă urmăreşte creşterea vitezei de răspuns a sistemului, poate fi utilizat chiar un model simplificat al procesului, micile deviaţii pot fi compensate prin reacţie.

Prin combinarea soluţiilor pentru urmărirea referinţei şi rejecţia perturbaţiilor se obţine un regulator performant, care poate fi descris prin:

$$\begin{aligned} & u_k = u_k^r + u_k^y \\ & u_k^r = K_m\left(r_k + F_r x_k^m\right) \\ & u_k^y = F\left(x_k^m - \hat{x}_k\right) - F_w \hat{w}_k \\ & \hat{x}_{k+1} = \Phi \hat{x}_k + \Phi_{xw} \hat{w}_k + \Gamma u_k + L(y_k - \hat{y}_k) \\ & \hat{y}_k = C\hat{x}_k \\ & \hat{w}_{k+1} = \Phi_w \hat{w}_k + L_w(y_k - \hat{y}_k) \\ & x_{k+1}^m = \Phi_m x_k^m + \Gamma_m r_k \end{aligned} \qquad (7.79)$$

Acest regulator asigură rejectarea perturbaţiei de tip sarcină, reducerea efectelor zgomotului de măsură şi urmărirea referinţei. Răspunsurile la perturbaţiile de tip sarcină, la referinţe şi zgomotul de măsură sunt complet separate. Răspunsul la referinţă este determinat de modelul de referinţă. Răspunsul la perturbaţii de tip sarcină şi la zgomotul de măsură este influenţat de predictorul de stare şi de reacţia după stare ce poate fi ajustat prin intermediul matricelor F, F_w, L şi L_w.

Faptul că toate stările estimate sunt comparate cu comportările lor dorite asigură o reglare de precizie. În figura 7.9 se prezintă structura completă a SRA cu două grade de libertate cu reacţie după stare.

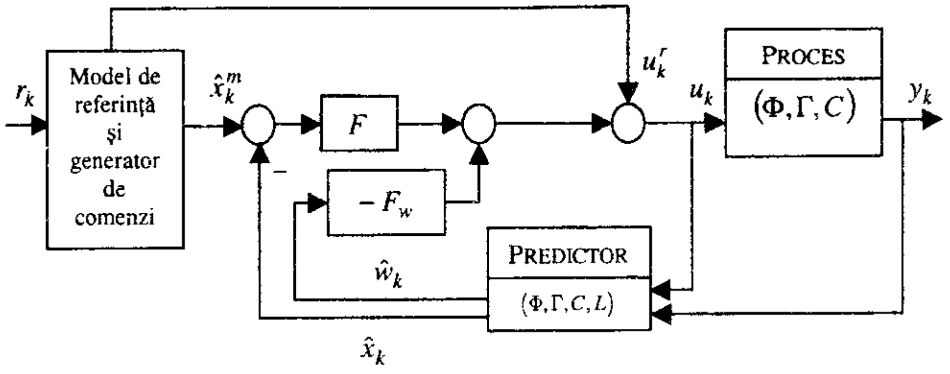


Fig. 7.9

Regulatorul dat de (7.79) poate fi reprezentat în diferite forme echivalente, deoarece sistemul este liniar şi invariant în timp. În practică este util a folosi modele de referinţă neliniare, elementele de execuţie şi convertoarele pot fi neliniare şi astfel pot fi introduse efecte neliniare, ca urmare a procesului de rotunjire în procesul de calcul.

7.7. Sinteza legii de conducere optimală

7.7.1. Formularea problemei de conducere optimal ă

Pentru un proces multivariabil neliniar de forma:

$$(\Sigma): \begin{array}{l} x_{k+1} = f(x_k, u_k, v_k, k) \\ y_k = g(x_k, u_k, v_k, k) \quad ; \; x_0 \in \Re^n \end{array} \qquad (7.80)$$

unde $f = col(f_1, f_2, ..., f_n)$ este o funcţie vectorială, în general neliniară, continuă şi cu derivate parţiale continue în raport cu argumentele vectoriale x_k şi u_k, se poate defini un proces de conducere dacă se precizează comenzile u_k la momente discrete de timp, fie explicit prin intermediul unei **funcţii de comandă** *în circuit deschis*, sub forma:

$$u_k = u_k^0, \qquad (7.81)$$

fie implicit, prin intermediul unei **legi de conducere** *în circuit închis*, de forma:

$$u_k = h^0(k, x_k) \quad (7.82)$$

unde $h^0 = col(h_1, h_2, ..., h_n)$.

Ţinând seama că în general starea iniţială x_0 şi timpul iniţial sunt arbitrare, legea de comandă (7.81) determină pentru fiecare pereche (k_0, x_0) câte o funcţie de comandă „adaptată" stării iniţiale considerate. Pentru a rezolva o problemă de conducere, respectiv a sintetiza o lege de comandă, vom defini *procesul de conducere admisibil* prin perechea formată dintr-o *funcţie de comandă admisibilă* şi *traiectoria de stare corespunzătoare*. Funcţiile de comandă admisibile sunt definite sub forma:

$$u_k \in U_a \quad \text{sau} \quad u_k \in \gamma_a(k, x_k) \quad (7.83)$$

unde U_a şi $\gamma_a(k, x_k)$ reprezintă submulţimi precizate în spaţiul vectorial $\Re^m$ al comenzilor u_k, $(u_k \in \Re^m)$.

Forma generală a indicelui de performanţă asociat problemei de sinteză este:

$$I = I_f[x_N] + \sum_{k=0}^{N-1} L(x_k, u_k), \quad (7.84)$$

a cărui valoare permite a aprecia comparativ calitatea proceselor admisibile de conducere. Funcţiile I_f (costul final) şi L (costul pe parcurs) sunt reale şi continue, cu derivate parţiale de ordinul unu şi doi, continue în raport cu argumentele x_k şi u_k.

Fiecărui proces de conducere admisibil al sistemului condus îi corespunde o valoare precizată I_0 a indicelui de performanţă, o valoare a costului. Cu cât această valoare este mai mică, cu atât procesul de conducere este mai bun. *Valoarea minimă a indicelui I este obţinută dacă procesul de conducere este optimal.*

Astfel, se poate formula **problema conducerii optimale discrete:** *Dându-se sistemul (Σ), să se determine funcţia de comandă admisibilă care minimizează indicele de calitate ataşat sistemului (Σ).*

Soluţia problemei de conducere formulată într-o asemenea manieră reprezintă *funcţia de comandă optimală*. Procesul de conducere format din funcţia de comandă optimală şi traiectoria de stare asociată acestuia se numeşte proces de *conducere optimală*.

Pentru sinteza legii de conducere optimală, vom considera modele liniare de forma (7.1), unde (Φ, Γ) este o pereche controlabilă şi perechea (Φ, C) este o pereche observabilă:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi x_k + \Gamma u_k; \qquad x_0 \in \Re^n \\ y_k &= C x_k \end{aligned} \quad (7.85)$$

şi criterii de performanţă sub forma pătratică:

$$\begin{aligned} I_f[x_N] &= \frac{1}{2} x_N^T S x_N \\ L[x_k, u_k] &= \left[\frac{1}{2} x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k\right] \end{aligned} \quad (7.86)$$

unde: $S \geq 0$; $Q \geq 0$; $R > 0$ sunt matrice de ponderare pătrate simetrice, a căror alegere se face de către proiectant, în funcţie de ponderile ce trebuie asociate variabilelor de stare şi comenzilor.

Pentru rezolvarea problemei de sinteză a legii de comandă optimală, se pot utiliza mai multe metode [6, 43, 46, 78].

Problema optimizării criteriului (7.86) pentru procese caracterizate de modele liniare poartă denumirea de *problema liniar-pătratică.*

7.7.2. Sinteza legii de comandă optimală prin metoda programării dinamice

Metoda programării dinamice discrete are la bază **principiul optimalităţii** al lui Bellman [34, 46].

Dacă şirul u_s, $k_0 \leq s \leq N-1$, constituie funcţia de comandă optimală asociată stării iniţiale $x_{k_0} = x_0$, iar $x_s^0, s \in [k_0, N]$ este traiectoria *optimală corespunzătoare, atunci oricare ar fi momentul curent k, şirul trunchiat u_k, constituie funcţia de comandă optimală asociată stării curente x_k.* Altfel spus, *fiecare segment final al unui proces de conducere optimal reprezintă el însuşi un proces optimal.*

Dacă notăm cu $I(k, x_k^0)$ funcţia de cost minim, conform principiului optimalităţii, această funcţie satisface ecuaţia funcţională de tip recurent:

$$\begin{aligned} L[k, x_k^0] &= \min_{u_k \in K_a} \{L(k, x_k, u_k) + I[k+1, x_{k+1}]\} \\ k &\in [k_0, N-1], \; I(N, x_N) = I_f(x_N) \end{aligned} \quad (7.87)$$

Ecuaţia (7.87) se numeşte *ecuaţia lui Bellman* sau a programării dinamice discrete şi reprezintă un mijloc de determinare a funcţiei de cost minim şi al legii de comandă optimale, la fiecare pas al intervalului de conducere $[k_0, N]$.

Pentru a ilustra principiul optimalităţii, considerăm traseul din figura 7.10. Se cere a determina traseul optim de deplasare între punctele A şi L, astfel încât costul deplasării să fie minim.

Când polinomul $C(z)$ are toate zerourile în interiorul discului unitate, spunem că avem o *reprezentare a inovației*, deoarece variabilele aleatoare v_k reprezintă inovații ale procesului aleator. Dacă variabilele v_k și u_k sunt cunoscute până la momentul k, atunci y_k poate fi calculată ca și v_k, dacă se cunosc variabilele y_k și u_k până la momentul k.

Modelul stocastic de stare în care se includ perturbațiile stocastice v_k și w_k are forma generală:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi x_k + \Gamma u_k + v_k \\ y_k &= C x_k + w_k \end{aligned} ; \; x_0 \in \Re^n \tag{9.2}$$

unde v_k și w_k sunt secvențe de vectori independenți identic distribuiți cu valori medii egale cu zero și matrice de covarianță R_1 și R_2, iar matricele Φ, Γ, C au semnificație cunoscută și dimensiuni corespunzătoare pentru $u_k \in \Re^m$, $y_k \in \Re^p$.

Starea inițială x_0 a sistemului (9.2) este o variabilă aleatoare necorelată cu zgomotele albe discrete v_k și w_k, având media egală cu $\bar{x}_0$, $E\{x_0\} = \bar{x}_0$, și matricea de covarianță R_0:

$$E\left\{ [x_0 - \bar{x}_0] \cdot [x_0 - \bar{x}_0]^T \right\} = R_0 \tag{9.3}$$

Matricele R_0 și R_1 presupunem că sunt semipozitiv definite, iar R_2 este o matrice pozitiv definită, unde R_1 și R_2 se calculează cu relațiile:

$$\begin{aligned} E\{v_k v_k^T\} &= R_1 \\ E\{w_k w_k^T\} &= R_2 \end{aligned} \tag{9.4}$$

Modelul (9.2) poate fi utilizat pentru a reprezenta sisteme liniare finit dimensionale cu perturbații procese stocastice cu densități spectrale raționale.

Pentru sinteza legii de reglare în prezența perturbațiilor stocastice pot fi folosite atât modele intrare-ieșire (9.1), cât și modele de stare (9.2).

Criteriile de performanță utilizate frecvent în proiectarea legii de reglare pentru procese stocastice au forma:

$$I_1 = E\{y_k^2\} \tag{9.5}$$

în cazul în care se consideră că $y_{st} = 0$, deci referința este egală cu zero sau:

$$I_2 = E\left\{ y_k^2 + \rho u_k^2 \right\} \} \tag{9.6}$$

care, în aceleași condiții, include și varianța comenzii ponderată cu scalarul ρ, pentru procese cu o intrare și o ieșire.

Minimizarea acestor criterii asigură dispersia minimă a ieșirii sau varianța minimă a ieșirii în prezența perturbațiilor stocastice.

Un criteriu de performanță care asigură comportarea dorită atât în raport cu referința, cât și în raport cu perturbațiile stocastice are forma:

$$I_3 = E\left\{ [y_{k+1} - r_k]^2 + \rho [u_k - U_s]^2 \right\} \tag{9.7}$$

unde r_k reprezintă referința sistemului de reglare, iar U_s reprezintă valoarea de regim staționar a comenzii. Minimizarea acestui criteriu de performanță asigură eroare staționară nulă pentru referință treaptă.

Legea de reglare obținută prin minimizarea criteriilor (9.5)÷(9.7) se cunoaște și sub denumirea de *lege de reglare de minimă varianță*.

În cazul utilizării modelelor de stare stocastice (9.2), forma generală a unui criteriu pătratic are forma:

$$I_4 = E\left\{ x_N^T S x_N + \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k) \right\} \tag{9.8}$$

unde matricele S, Q și R au semnificația dată în capitolul 7.

Minimizarea acestui criteriu de performanță permite determinarea legii de conducere optimală pentru un proces ale cărui variabile de stare și perturbațiile sunt stocastice. Această lege de conducere este cunoscută și sub denumirea de *lege de conducere liniar pătratic-gaussiană* (LQG).

În funcție de criteriul de performanță selectat și de modelul matematic al procesului, în prezența mărimilor exogene stocastice se pot utiliza diferite metode de proiectare a legii de reglare/conducere.

9.2. Sinteza legii de reglare de minimă varianță

Presupunem că legea de reglare u_k reprezintă o combinație liniară a variabilelor y_k, y_{k-1}, ..., y_{k-n}, u_{k-1}, u_{k-2}, ..., u_{k-n}, ceea ce asigură cauzalitatea acestuia. Pentru a obține o asemenea lege de reglare, admitem că perturbațiile v_i și v_j sunt necorelate pentru $i \neq j$. În aceste condiții, se poate sintetiza o lege de reglare optimală liniară.

În cazul proceselor descrise de modele de forma:

$$y_k = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u_{k-d} + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} v_k \tag{9.9}$$

sinteza legii de reglare ce minimizează un criteriu pătratic de forma:

$$I = E\{y_{k+d}^2\} \tag{9.10}$$

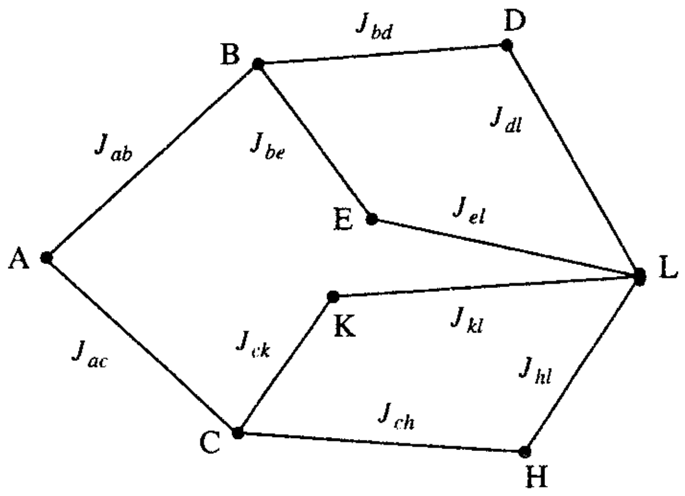


Fig. 7.10

Dacă notăm cu J_{ab} costul între nodurile *A* şi *B*, iar prin J_{ac} costul corespunzător minim între nodurile *A* şi *C* etc., costul minim se obţine prin găsirea minimului sumei:

$$I_{\min} = \min[J_{ab} + J_{bd} + J_{dl}, J_{ab} + J_{be} + J_{el}, J_{ac} + J_{ck} + J_{kl}, J_{ac} + J_{ch} + J_{hl}].$$

Dacă starea iniţială este *A* şi decizia iniţială este de a merge spre nodul *B*, atunci traseul de la *B* la *L* trebuie să fie optimal dacă întregul traseu între *A* şi *L* este optim. Dacă decizia iniţială este de a merge la *C* (nodul *C*), atunci traseul de la nodul *C* la *L* trebuie să fie ales ca optimal.

Notând cu g_B şi g_C costurile minime între *B* şi *L*, respectiv între *C* şi *L*:

$$g_B = \min[J_{bd} + J_{dl}, J_{be} + J_{el}]$$

$$g_C = \min[J_{ch} + J_{hl}, J_{ck} + J_{kl}]$$

principiul optimalităţii pentru acest exemplu capătă forma:

$$g_A = \min I = \min[J_{ab} + g_B, J_{ac} + g_C].$$

Cantitatea ce trebuie minimizată este alcătuită din două părţi: o parte legată direct de decizia curentă, constantele J_{ab} şi J_{ac}, şi a doua parte reprezentând valoarea minimă a tuturor costurilor viitoare, începând cu starea care rezultă din prima decizie, costuri care se consideră optimale în raport cu această stare.

Pentru un sistem liniar (Φ, Γ, C), căruia i se ataşează un indice de performanţă de forma:

$$I = x_N^T S x_N + \sum_{k=0}^{N-1}\left[x_N^T Q x_N + u_N^T R u_k\right]$$

unde matricele S, Q şi R au semnificaţia cunoscută, conform principiului optimalităţii, valoarea minimă a funcţiei de cost I se obţine sub forma:

$$I_{\min} = I[x_k^0] = \min_{u_k}\{u_k^T R u_k + x_k^T Q x_k + J(x_{k+1}^0)\} \qquad (7.88)$$

unde $J[x_{k+1}^0]$ reprezintă valoarea minimă a lui $I[x_{k+1}]$.

Admitem că $J[x_{k+1}^0]$ este o formă pătratică:

$$J[x_{k+1}^0] = x_{k+1}^T P_{k+1} x_{k+1} \qquad (7.89)$$

unde P_{k+1} este o matrice simetrică, pozitiv definită.

Dacă ţinem seama de modelul procesului condus, atunci $J[x_{k+1}^0]$ capătă forma:

$$I[x_{k+1}] = [\Phi x_k + \Gamma u_k]^T P_{k+1}[\Phi x_k + \Gamma u_k] \qquad (7.90)$$

iar (7.88) devine:

$$I_{\min} = \min_{u_k}\{u_k^T R u_k + x_k^T Q x_k + [\Phi x_k + \Gamma u_k]^T P_{k+1}[\Phi x_k + \Gamma u_k]\} \qquad (7.91)$$

Admiţând că nu există restricţii asupra comenzii, minimul expresiei (7.91) în raport cu u_k se obţine prin anularea gradientului în raport cu u_k al expresiei din acoladă:

$$R u_k + \Gamma^T P_{k+1} \Gamma u_k + \Gamma^T P_{k+1} \Phi x_k = 0 \qquad (7.92)$$

sau

$$[R + \Gamma^T P_{k+1} \Gamma] u_k = -\Gamma^T P_{k+1} \Phi x_k,$$

respectiv

$$u_k^0 = -[R + \Gamma^T P_{k+1} \Gamma]^{-1} \Gamma^T P_{k+1} \Phi x_k. \qquad (7.93)$$

Expresia (7.93) evidenţiază forma comenzii optimale obţinută apelând la metoda programării dinamice. Dacă se notează:

$$F_k \overset{\Delta}{=} [R + \Gamma^T P_{k+1} \Gamma]^{-1} \Gamma^T P_{k+1} \Phi, \qquad (7.94)$$

rezultă comanda optimală sub forma:

$$u_k^0 = -F_k x_k. \qquad (7.95)$$

Pentru determinarea matricei de comandă după stare F_k, se impune cunoaşterea matricei P_{k+1}, celelalte elemente fiind date, iar sistemul condus se consideră complet.

Valoarea optimă a funcţiei de cost se obţine pentru u_k^0 introdusă în (7.91):

$$I_{opt} = [-F_k x_k]^T R[-F_k x_k] + x_k^T Q x_k + \{(\Phi - \Gamma F_k) x_k\}^T P_{k+1} (\Phi - \Gamma F_k) x_k$$

sau

$$I_{opt} = x_k^T F_k^T R F_k x_k + x_k^T Q x_k + x_k^T (\Phi - \Gamma F_k)^T P_{k+1} (\Phi - \Gamma F_k) x_k \qquad (7.96)$$

Admițând că I_{opt} este tot o formă pătratică:

$$I_{opt} = x_k^T P_k x_k,$$

rezultă, prin identificare următoarea ecuație recurentă:

$$P_k = Q + F_k^T R F_k + (\Phi - \Gamma F_k)^T P_{k+1} (\Phi - \Gamma F_k) \qquad (7.97)$$

Pentru determinarea comenzii optimale se impune rezolvarea ecuației matriceale recurente (7.97) în timp invers. Un proces cu stare finală liberă evidențiază necesitatea considerării valorii minime a lui $J(x_{k+1}^0) = J[x(N)] = 0$, ceea ce permite alegerea matricei $P(N) = 0$ $(N = k+1)$ și inițializarea ecuației (7.97) cu această valoare. Astfel, soluția problemei liniar-pătratice apelând la principiul optimalității se obține prin rezolvarea sistemului de ecuații matriceale:

$$P_k = Q + F_k^T R F_k + (\Phi - \Gamma F_k)^T P_{k+1} (\Phi - \Gamma F_k)$$

$$F_k = \left[R + \Gamma^T P_{k+1} \Gamma\right]^{-1} \Gamma^T P_{k+1} \Phi \qquad (7.98)$$

$$u_k^0 = -F_k x_k$$

cu inițializarea $P(N) = 0$.

De remarcat faptul că u_k^0 reprezintă o comandă optimală în sensul minimizării indicelui de calitate I, întrucât semnul derivatei parțiale de ordinul doi în raport cu u_k este pozitiv:

$$\left[R + \Gamma^T P_{k+1} \Gamma\right] > 0.$$

Elaborarea comenzii optimale presupune calculul la fiecare pas de discretizare a matricei de comandă F_k și estimarea stării procesului, întrucât starea x_k nu este accesibilă măsurării. Dacă se extinde $N \to \infty$ alegându-se un indice de performanță de forma:

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} \left[u_k^T R u_k + x_k^T Q x_k\right], \qquad (7.99)$$

soluția problemei de conducere optimală este:

$$u_k^0 = -F_a x_k \qquad (7.100)$$

unde

$$F_a = \left[R + \Gamma^T P_a \Gamma\right]^{-1} \Gamma^T P_a \Phi$$

iar P_a reprezintă soluția asimptotică a ecuației recurente (7.97).

În figura 7.11 se prezintă schema sistemului de conducere optimală cu estimator de stare.

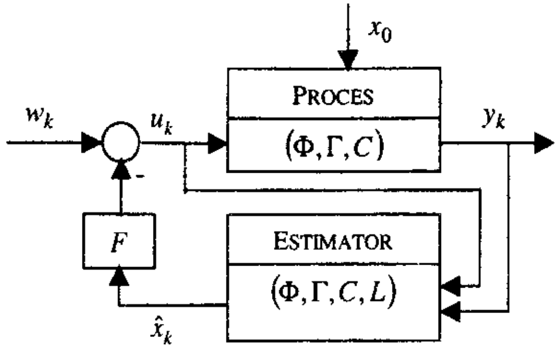


Fig. 7.11

7.7.3. Sinteza legii de reglare optimală pentru modele extinse

Considerăm modelul procesului:

$$x_{k=1} = \Phi x_k + \Gamma u_k \qquad (7.101)$$

cu $x_k \in \Re^n, u_k \in \Re^m, y_k \in \Re^p$ și modelul integratoarelor numerice incluse pe calea directă a SRA pentru anularea erorii staționare (permanente):

$$w_{k+1} = w_k + \varepsilon_k$$

$$\varepsilon_k = r_k - y_k \qquad (7.102)$$

$$w_k = w_k$$

unde $w_k \in \Re^p$ reprezintă ieșirea celor p integratoare incluse în sistem pentru a obține comportarea dorită în raport cu semnalele exogene de tip treaptă.

Dacă introducem $x_k^1 := \left[x_k^T, w_k^T\right]^T$, $y_k^1 := \left[x_k^T, w_k^T\right]^T$ *și* $f_1 := \left[0 \;\; r_k^T\right]^T$, se obține modelul extins:

$$x_{k+1}^1 = \Phi_1 x_k^1 + \Gamma_1 u_k + f_1$$

$$y_k^1 = C_1 x_k^1 \qquad (7.103)$$

unde $x_k^1 \in \Re^{n+p}$; $y_k^1 \in \Re^{2p}$, $f_1 \in \Re^{2p}$

$$\Phi_1 := \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ C & I \end{bmatrix} \in \Re^{(n+p)*(n+p)};\; \Gamma_1 := \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix} \in \Re^{(n+p)*m};\; C_1 := \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \in \Re^{2p*(n+p)}.$$

Indicele de performanță atașat acestui sistem extins are forma:

$$I_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\varepsilon_k^T Q_1 \varepsilon_k + u_k^T R u_k\right] \qquad (7.104)$$

unde Q_1 este o matrice de ponderare simetrică semipozitiv definită de dimensiuni $(2p \times 2p)$ şi ε_k vectorul de eroare al sistemului extins $\left(\varepsilon_k \in \Re^{2p}\right)$.

Dacă matricea Q_1 are forma:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q_w \end{bmatrix},$$

atunci I_1 poate fi scris sub forma:

$$I_1 = \sum_{0}^{N}\left[\varepsilon_k^T Q \varepsilon_k + w_k^T Q_w w_k + u_k^T R u_k\right]. \tag{7.105}$$

Pentru obţinerea comenzii optimale vom proceda într-o manieră similară cu cazul anterior, admiţând pentru $I_1\left[x_{k+1}^1\right]$ o formă pătratică sau:

$$I_1\left[x_{k+1}^1\right] = x_{k+1}^{1T} P_{k+1}^1 x_{k+1}^1 . \tag{7.106}$$

Valoarea optimă a indicelui I_1 va fi:

$$I_{opt} = \min_{u_k}\left\{\begin{matrix}(r_k - Cx_k)^T Q (r_k - Cx_k) + w_k^T Q_w w_k + u_k^T R u_k + \\ + \left(\Phi_1 x_k^1 + \Gamma_1 u_k + f_1\right)^T P_{k+1}^1 \left(\Phi_1 x_k^1 + \Gamma_1 u_k + f_1\right)\end{matrix}\right\} \tag{7.107}$$

Prin anularea gradientului funcţiei dintre acolade în raport cu u_k, se obţine:

$$R u_k + \Gamma_1^T P_{k+1}^1 \Gamma_1 u_k + \Gamma_1^T P_{k+1}^1 \left(\Phi_1 x_k^1 + f_1\right) = 0 \tag{7.108}$$

iar comanda optimală are forma:

$$u_k^0 = -\left[R + \Gamma_1^T P_{k+1}^1 \Gamma_1\right]^{-1}\left[\Gamma_1^T P_{k+1}^1 \Phi_1 x_k^1 + f_1\right] \tag{7.109}$$

sau

$$u_k^0 = -F_k^1 x_k^1 + \mu_k^1 \tag{7.110}$$

unde s-au notat:

$$F_k^1 = \left[R + \Gamma_1^T P_{k+1}^1 \Gamma_1\right]^{-1} \Gamma_1^T P_{k+1}^1 \Phi_1 \tag{7.111}$$

$$\mu_k^1 = -\left[R + \Gamma_1^T P_{k+1}^1 \Gamma_1\right]^{-1} \Gamma_1^T P_{k+1}^1 f_1 . \tag{7.112}$$

Prin introducerea comenzii optimale în expresia indicelui de performanţă (7.107), se obţine:

$$\begin{aligned} I_{1opt} = x_k^{1T} P_k^1 x_k^1 \equiv & \left(r_k - Cx_k^1\right)^T Q \left(r_k - Cx_k^1\right) + w_k^T Q_w w_k + \\ & + \left(\mu_k^1 - F_k^1 x_k^1\right)^T R \left(\mu_k^1 - F_k^1 x_k^1\right) + \\ & + \left[\left(\Phi_1 - \Gamma_1 F_k^1\right)x_k^1 + \left(f_1 - \Gamma_1 \mu_k^1\right)\right]^T P_{k+1}^1 \left[\left(\Phi_1 - \Gamma_1 F_k^1\right)x_k^1 + \left(f_1 - \Gamma_1 \mu_k^1\right)\right] \end{aligned} \tag{7.113}$$

Din identitatea (7.113) se obţine ecuaţia recurentă:

$$P_k^1 = C^T Q C + F_k^{1T} R F_k^1 + \left(\Phi_1 - \Gamma_1 F_k^1\right)^T P_{k+1}^1 \left(\Phi_1 - \Gamma_1 F_k^1\right) \tag{7.114}$$

a cărei rezolvare în timp invers permite a determina matricea P_k^1.

Astfel, în acest caz, soluţia problemei de conducere optimală se obţine prin rezolvarea sistemului de ecuaţii matriceale:

$$\begin{aligned} P_k^1 &= C^T Q C + F_k^{1T} R F_k^1 + \left(\Phi_1 - \Gamma_1 F_k^1\right)^T P_{k+1}^1 \left(\Phi_1 - \Gamma_1 F_k^1\right) \\ F_k^1 &= \left[R + \Gamma_1^T P_{k+1}^1 \Gamma_1\right]^{-1} \Gamma_1^T P_{k+1}^1 \Phi_1 \\ \mu_k^1 &= -\left[R + \Gamma_1^T P_{k+1}^1 \Gamma_1\right]^{-1} \Gamma_1^T P_{k+1}^1 f_1 \end{aligned} \tag{7.115}$$

Dacă matricea de comandă F_k^1 poate fi partiţionată astfel:

$$F_k^1 := \left[F_{11} \vdots F_{12}\right]$$

unde $F_{11} \in \Re^{m \times n}$ şi $F_{12} \in \Re^{n \times p}$, comanda optimală poate fi scrisa sub forma:

$$u_k^0 = -F_{11} x_k - F_{12} w_k + \mu_k^1 \tag{7.116}$$

Ca şi în cazul anterior pentru $N \to \infty$, se obţine o soluţie staţionară (asimptotică) pentru matricea de comandă F_k^1 şi, evident, o matrice P_a^1 [34, 46].

Comanda optimală este generată sub forma:

$$u_k^0 = -F_{11} x_k - F_{12} w_k + \mu^1 \tag{7.117}$$

$$\mu^1 = -\left[R + \Gamma_1^T P_a^1 \Gamma_1\right]^{-1} \Gamma_1^T P_a^1 f_1 \tag{7.118}$$

$$F^1 = \left[R + \Gamma_1^T P_a^1 \Gamma_1\right]^{-1} \Gamma_1^T P_a^1 \Phi_1 \tag{7.119}$$

Dacă ţinem seama de definiţia vectorului f_1, rezultă cu uşurinţă că vectorul de anticipaţie μ^1 este determinat de modificarea referinţei r_k.

Astfel, comanda optimală devine:

$$u_k^0 = -F_{11} x_k^1 - F_{12} w_k + N r_k \tag{7.120}$$

unde matricea N se obţine cu uşurinţă din (7.118).

În figura 7.12 se prezintă structura sistemului de conducere optimală cu estimator de stare.

În cadrul acestei structuri este inclusă şi comanda de anticipaţie în funcţie de referinţă.

Această structură asigură eroarea staţionară nulă pentru referinţe de tip treaptă şi o evoluţie optimală de-a lungul unei traiectorii optimale generată de comanda u_k^0, care minimizează criteriul de performanţă pătratic selectat.

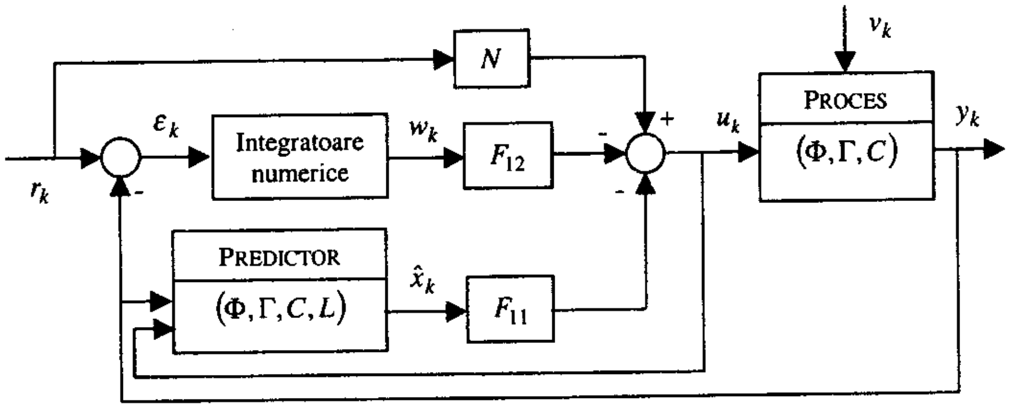


Fig. 7.12

O extensie a structurii sistemului de conducere optimală cu estimarea perturbaţiilor se poate obţine cu uşurinţă.

Regulatorul optimal obţinut prin minimizarea criteriului pătratic, prin alegerea matricelor de ponderare R şi Q poate realiza un bun compromis între viteza de răspuns şi amplitudinea semnalelor de comandă.

Prin alegerea matricelor de ponderare Q şi R, pot fi influenţate performanţele sistemului închis. Variabilele de stare x_i care corespund unor variabile fizice semnificative se aleg la început. Funcţia cost se alege ca o sumă ponderată a variabilelor x_i. Ponderi mari corespund la răspunsuri de amplitudine mică. Răspunsurile sistemului închis la perturbaţii tipice sunt astfel evaluate. O reală dificultate este de a găsi ponderi relative între variabilele de stare şi variabilele de comandă, lucru care se realizează prin încercări.

Uneori specificaţiile de performanţă sunt date în funcţie de deviaţiile maxime admise ale variabilelor de stare şi ale comenzilor pentru o perturbaţie dată. O regulă empirică de a decide ponderile în criteriul pătratic de performanţă este a alege elemente diagonale ca fiind valoarea inversă a pătratelor deviaţiilor admise. O altă cale este de a considera numai penalităţi asupra variabilelor de stare şi restricţii asupra deviaţiilor comenzilor.

PROBLEME

7.1. Se consideră sistemul:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0.5 & 0.2 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k .$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x_k$$

Se cere a determina legea de comandă după stare, astfel încât polii sistemului închis să fie $p_1 = 0.15$ şi $p_2 = 0.2$.

7.2. Se consideră sistemul continuu:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u .$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Pentru $T = 0.2\,\text{sec}$, se cere:

a) modelul discret al sistemului continuu;

b) legea de reglare după stare, astfel încât polinomul caracteristic al sistemului închis să fie $\alpha_c(z) = z^2 - 0.6z + 0.2$;

c) polinomul caracteristic al sistemului continuu.

7.3. Se consideră sistemul:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ 0.3 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.02 \end{bmatrix} u_k .$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x_k$$

Se cere proiectarea unui observer de stare:

a) prin calculul direct al stării pe baza ieşirii;

b) prin construcţia unui sistem dinamic care permite obţinerea stării $\hat{x}_{k+1} \mid k$;

c) prin considerarea unei variabile de stare măsurabile.

7.4. Se consideră procesul caracterizat prin modelul discret:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.3 & 1 \\ 0.5 & 0.8 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.1 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v_k ,$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_k$$

unde v_k este o perturbaţie constantă.

Se cere a determina regulatoarele care rejectează efectul perturbaţiei în cazurile:

a) starea x_k şi v_k pot fi măsurate;

b) starea poate fi măsurată;

c) numai ieşirea este măsurabilă.

7.5. Se consideră sistemul:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} u_k .$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_k$$

Se cere:

a) proiectarea legii de reglare după stare şi urmărirea referinţei, astfel încât răspunsul indicial al sistemului să fie aperiodic cu o constantă de timp egală cu $2\sec$;

b) proiectarea estimatorului de stare, astfel încât răspunsul acestuia să fie aperiodic cu o constantă de timp egală cu $0.5\sec$;

c) structura regulatorului cu reacţie după stare, urmărirea referinţei şi estimator de stare.

7.6. Se consideră procesul caracterizat prin modelul:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} u_k .$$
$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_k$$

Se cere:

a) legea de reglare după stare astfel încât stările să fie aduse în origine în intervale de eşantionare;

b) legea de reglare după stare care duce procesul din origine la starea $x_k^f = \begin{bmatrix} 2 & 6 \end{bmatrix}^T$. Este posibil?

c) estimatorul de stare care asigură o evoluţie exponenţială dată a erorii de estimare.

7.7. Se consideră modelul discret ataşat unui proces:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.1 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v_k$$
$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_k$$

unde v_k este o perturbaţie constantă.

Se cere proiectarea regulatoarelor care asigură rejecţia perturbaţiei v_k în următoarele cazuri:

a) starea procesului şi perturbaţia sunt măsurate;

b) numai ieşirea este măsurată.

7.8. Se consideră procesul caracterizat prin modelul de stare:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k .$$
$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_k$$

Se cere:

a) regulatorul liniar pătratic în cazul în care se alege $Q = c^T c$ şi $R = \rho$;

b) polii sistemului cu reacţie după stare şi efectul coeficientului de penalizare ρ asupra poziţiei acestora.

7.9. Se consideră procesul a cărui funcţie de transfer este:

$$H_c\left(z^{-1}\right) = \frac{z^{-1} + 0.8z^{-2}}{1 - 1.4z^{-1} + 0.48z^{-2}} .$$

Se cere:

a) modelul de stare al acestuia în forma canonică controlabilă;

b) estimatorul de stare care asigură convergenţa erorii de estimare în trei intervale de discretizare.

7.10. Se consideră un proces caracterizat prin modelul:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) .$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Se cere:

a) modelul de stare în forma discretă alegând $T = 0.1\sec$;

b) legea de reglare după stare cu urmărirea referinţei, astfel încât viteza de răspuns a SRA la referinţă treaptă unitară să fie maximă.

8. PROIECTAREA SISTEMELOR NUMERICE DE REGLARE PE BAZA MODELELOR INTRARE – IEŞIRE

În acest capitol se prezintă proceduri de sinteză a algoritmilor numerici apelând la modele matematice discrete ale proceselor. Se admite că modelele matematice sunt furnizate proiectantului pe baza unor proceduri de identificare experimentală sau sunt obţinute prin discretizarea unor modele continue disponibile.

Considerăm că obiectul condus este caracterizat prin modele de forma:

$$H_c(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \cdot z^{-d} \tag{8.1}$$

unde polinoamele $A(z^{-1})$ şi $B(z^{-1})$ sunt definite ca:

$$\begin{aligned} A(z^{-1}) &= 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_m z^{-m} \\ B(z^{-1}) &= b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_m z^{-m} \end{aligned} \tag{8.2}$$

iar $d \geq 0$, $d \in N$ reprezintă timpul mort al procesului, sau, în cazul includerii mărimilor perturbatoare stocastice, de forma:

$$y_k = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u_{k-d} + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})} \cdot v_k \tag{8.3}$$

unde polinoamele $C(q^{-1})$ şi $D(q^{-1})$ în operatorul de întârziere q^{-1} au semnificaţia :

$$\begin{aligned} C(q^{-1}) &= c_0 + c_1 q^{-1} + \cdots + c_{n_c} q^{-n_c} \\ D(q^{-1}) &= d_0 + d_1 q^{-1} + \cdots + d_{n_d} q^{-n} \end{aligned} \tag{8.4}$$

şi definesc natura perturbaţiilor ce acţionează asupra procesului în cazul în care v_k este zgomot alb discret. Printr-o alegere corespunzătoare a polinoamelor $C(q^{-1})$ şi $D(q^{-1})$, ţinând seama de teorema de reprezentare în

condiţiile în care proprietăţile zgomotului alb discret sunt cunoscute, se pot modela diferite categorii de perturbaţii stocastice (v. § 2.6).

În figura 8.1 se prezintă structura unui SRA cu regulator numeric şi procesul caracterizat printr-un model discret.

Pentru un model matematic al procesului dat se cere regulatorul numeric cu funcţia de transfer $H_R(z^{-1})$, care asigură satisfacerea cerinţelor de performanţă impuse în raport cu referinţa r_k şi perturbaţiile v_k, în prezenţa unor restricţii impuse comenzii de tipul $u_k \in U_a$, unde U_a reprezintă clasa comenzilor admisibile.

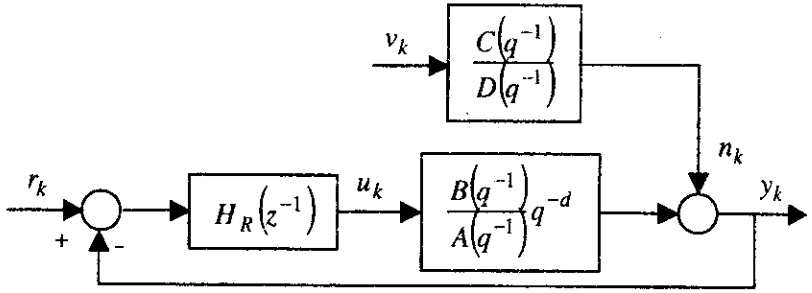


Fig. 8.1

În acest capitol se sintetizează regulatorul numeric pe baza modelului discret al procesului, apelând la diferite metode.

Presupunem că polinoamele $A(z)$ şi $B(z)$ au zerourile situate în interiorul cercului de rază unitară. În aceste condiţii, procesul este caracterizat printr-un model stabil, de fază minimă.

8.1. Metoda răspunsului impus

Considerăm că este cunoscut modelul procesului, obţinut printr-o procedură de identificare experimentală.

Metoda răspunsului impus presupune că pentru o referinţă precizată, răspunsul SRA trebuie să aibă o formă impusă. În acest caz rezultă că, spre exemplu, pentru referinţă treaptă unitară, răspunsul indicial al SRA are o forma definită $Y_d(z^{-1})$:

$$Y_d(z^{-1}) = y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + \cdots + y_k z^{-k} + \cdots \tag{8.6}$$

unde coeficienţii $y_k \equiv y(kT)$ reprezintă valorile ieşirii la momente discrete de timp.

Numărul de termeni în (8.6) este infinit, însă pentru cazul în care se impune atingerea regimului staționar după un număr impus de perioade $k = m$, valoarea coeficienților y_k, $k \geq m$, este egală cu 1 sau egală cu valoarea staționară dorită a ieșirii. În cazul răspunsului indicial, $y_m = y_{m+1} = \cdots = y_{m+n} = \cdots = 1$, având în vedere cerința ca eroarea în regim staționar a SRA să fie egală cu zero după un număr m de perioade de discretizare.

Astfel, prin impunerea răspunsului la o referință dată, impunem cerințele de performanță ale SRA, atât în regim staționar, cât și în regim tranzitoriu.

Pentru proiectarea regulatorului, care asigură un răspuns impus, sunt date:

- modelul procesului $H_c(z^{-1})$;
- cerințele de performanță prin forma impusă a răspunsului;
- restricțiile asupra comenzii $u_k \in U_a$ ținând seama de particularitățile elementului de execuție și de cerințele de implementare ale regulatorului.

În cazul în care modelul procesului este de fază minimă ($H_c(z^{-1})$ este inversabilă), se poate obține regulatorul cu un singur grad de libertate, pornind de la expresia funcției de transfer dorite $H_{0d}(s)$, funcție ce poate fi cu ușurință determinată, dacă $R(z^{-1}) = \frac{1}{1-z^{-1}}$, iar $Y_d(z^{-1})$ este precizat prin valorile coeficienților y_k.

Astfel:

$$H_{0d}(z^{-1}) = (1-z^{-1})Y_d(z^{-1}) = \\ = y_1 z^{-1} + (y_2 - y_1)z^{-1} + \cdots + (y_k - y_{k-1})z^{-k} + \cdots \tag{8.7}$$

În cazul în care se impune ca durata regimului tranzitoriu să fie egală cu m perioade de discretizare, se poate scrie $H_{0d}(z^{-1})$ sub forma:

$$H_{0d}(z^{-1}) = y_1 z^{-1} + (y_2 - y_1)z^{-2} + \cdots + \\ + (y_{m-1} - y_{m-2})z^{-m+1} + (1 - y_{m-1})z^{-m} \tag{8.8}$$

sau:

$$H_{0d}(z^{-1}) = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \cdots + p_{m-1} z^{m-1} + p_m z^{-m} \tag{8.9}$$

unde:

$$p_1 = y_1,\ p_2 = y_2 - y_1,\ \ldots,\ p_m = 1 - y_{m-1}. \tag{8.10}$$

Din (8.10) se observă că $\sum_{j=1}^{m} p_j = 1$.

Ținând seama că funcția de transfer a SRA cu un singur grad de libertate (fig. 8.1.) are forma:

$$H_0(z^{-1}) = \frac{H_R(z^{-1})H_C(z^{-1})}{1+H_R(z^{-1})H_C(z^{-1})}, \tag{8.11}$$

rezultă:

$$H_0(z^{-1}) = \frac{1}{H_C(z^{-1})}\left[\frac{H_{od}(z^{-1})}{1-H_{od}(z^{-1})}\right] = H_c^{-1}(z^{-1}) \cdot H_{d_d}(z^{-1}) \tag{8.12}$$

unde $H_{d_d}(z^{-1}) = \frac{H_{od}(z^{-1})}{1-H_{od}(z^{-1})}$ reprezintă funcția de transfer dorită pentru sistemul deschis (calea directă).

Prin înlocuirea în (8.12) a modelului invers al procesului și funcția $H_{0d}(z^{-1})$, care în acest caz reprezintă o serie finită în z^{-1} cu coeficienți bine determinați, se obține algoritmul de reglare minim sub forma:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{A(z^{-1})}{B(z^{-1})} \cdot \frac{P(z^{-1})}{1-P(z^{-1})} \tag{8.13}$$

sau:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{S(z^{-1})}{R(z^{-1})} = \frac{s_o + s_1 z^{-1} + s_2 z^{-2} + \cdots + s_n z^{-n}}{1 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2} + \cdots + r_n z^{-n}} \tag{8.14}$$

unde coeficienții (r_i, s_j) se pot calcula cu ușurință în funcție de parametrii modelului (a_i, b_j) și de coeficienții p_j determinați din cerințele de performanță impuse pentru referința treaptă unitară selectată în acest caz.

Este de remarcat faptul că dimensiunea polinoamelor $S(z^{-1})$ și $R(z^{-1})$ rezultă în funcție de dimensiunea modelului procesului și de durata regimului tranzitoriu impusă prin numărul m de perioade de discretizare. În cazul în care polinomul $B(z^{-1})$ are factori comuni cu $P(z^{-1})$ se poate reduce dimensiunea algoritmului de reglare. Această dimensiune poate fi redusă și prin reducerea duratei regimului tranzitoriu, însă în acest caz se impune o analiză atentă a efectului asupra amplitudinii comenzii.

Algoritmul rezultat prin această procedură de sinteză este un algoritm recurent, cauzal, ce poate fi pus cu ușurință sub forma:

$$u_k = s_0 \varepsilon_k + \sum_{i=1}^{n} s_i \varepsilon_{k-i} - \sum_{j=1}^{n} r_j u_{k-j} \tag{8.15}$$

Din (8.15) rezultă cu uşurinţă că valoarea iniţială a comenzii pentru referinţa treaptă unitară este $u_0 = s_0$. Această valoare iniţială se poate calcula din (8.13) sub forma:

$$u_0 = \frac{p_1}{b_1}, \tag{8.16}$$

ceea ce evidenţiază efectul pe care îl au valorile p_1, respectiv y_1, asupra comenzii iniţiale. De observat că valoarea lui p_1 caracterizează viteza de răspuns a SRA. Cu cât se impune o viteză mai mare de răspuns (timp de creştere mare), cu atât comanda iniţială este mai mare pentru un coeficient b_1 dat.

În anumite situaţii, comanda iniţială poate depăşi limitele admisibile pentru elementul de execuţie şi, în consecinţă, regulatorul atinge nivelul de saturaţie al comenzii. Pentru a atenua acest efect negativ asupra reglării cu răspuns impus, se poate relaxa cerinţa de performanţă prin alegerea unei valori $y_1' < y_1$ sau se poate modifica perioada de discretizare T. În acest din urmă caz, coeficientul b_1, care se obţine în funcţie de T, poate fi crescut prin creşterea acestei perioade de discretizare. Acest lucru este evident dacă modelul procesului se obţine prin discretizarea directă a modelului continuu al procesului (§ 2).

Proiectarea regulatoarelor numerice prin metoda răspunsului impus, deşi conduce la un rezultat imediat, prezintă neajunsul major că amplitudinea comenzii poate ieşi din domeniul admisibil şi, în consecinţă, poate conduce la saturarea elementului de execuţie. Prin încercări succesive, se poate alege un răspuns (neoptimal) care să asigure şi satisfacerea cerinţelor impuse de încadrarea comenzii în limite admisibile [16, 57].

Exemplul 8.1:

Se consideră un proces caracterizat printr-o funcţie de transfer

$$H_p(s) = \frac{K_p}{T_p s + 1}.$$

Se cere a se sintetiza un algoritm de reglare numeric, astfel încât, pentru referinţă treaptă unitară să se obţină un răspuns caracterizat prin valorile:

$$y_1 = y(T) = 0.8,\ y(2T) = y(3T) = \cdots = y(nT) = 1.$$

Astfel, răspunsul sistemului atinge regimul staţionar după două intervale de timp egale cu T.

Se impune ca $u_0 \le u_a$, *unde* u_a *este precizat pentru această aplicaţie* $u_a = 2$.

Rezolvare:

Structura SRA cu regulator numeric pentru un proces continuu, caracterizat prin $H_p(s)$ *este dată în figura 8.2.*

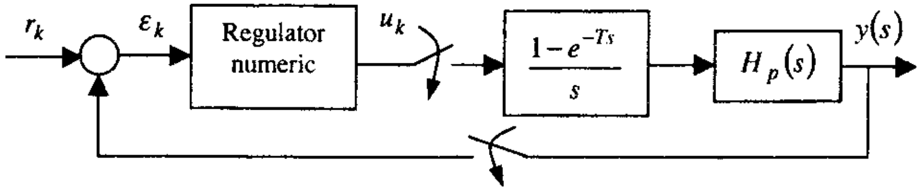


Fig. 8.2

Modelul discret al părţii continue în acest caz se obţine folosind relaţia:

$$H_c\left(z^{-1}\right) = \left(1 - z^{-1}\right) \cdot Z\left[\frac{H_p(s)}{s}\right]$$

sau

$$H_c\left(z^{-1}\right) = \left(1 - z^{-1}\right) K_p \cdot Z\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T_p}}\right] = (1 - z^{-1}) K_p \left[\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-z^{-1} e^{-T/T_p}}\right]$$

respectiv:

$$H_c\left(z^{-1}\right) = \frac{K_p (1-e^{-T/T_p}) z^{-1}}{1-z^{-1} e^{-T/T_p}}.$$

Pentru $K_p = 1$, $T_p = 10\sec$ *şi* $T = 1\sec$, *se obţine modelul discret sub forma:*

$$H_c\left(z^{-1}\right) = \frac{b_1 z^{-1}}{1+a_1 z^{-1}} = \frac{0.5 z^{-1}}{1+0.3 z^{-1}}.$$

Se observă că pentru valori mai mari ale lui T, *coeficientul* b_1 *are, de asemenea, valori mai mari.*

Funcţia de transfer $H_{0d}\left(z^{-1}\right)$ *se obţine sub forma:*

$$H_{0d}\left(z^{-1}\right) = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} = 0.8 z^{-1} + 0.2 z^{-2}.$$

Cu aceste elemente calculate se obţine algoritmul de reglare sub forma:

$$H_R\left(z^{-1}\right) = \frac{1+0.3z^{-1}}{0.5z^{-1}} \cdot \frac{z^{-1}(0.8+0.2z^{-1})}{1-0.8z^{-1}-0.2z^{-2}} = \frac{(1+0.3z^{-1})(0.8+0.2z^{-1})}{0.5(1-0.8z^{-1}-0.2z^{-2})}$$

sau

$$H_R\left(z^{-1}\right)=\frac{0.8+0.44z^{-1}+0.06z^{-2}}{0.5(1-0.8z^{-1}-0.2z^{-2})}=\frac{1.6+0.83z^{-1}+0.0012z^{-2}}{1-0.8z^{-1}-0.2z^{-2}}.$$

Comanda inițială rezultă:

$u_0=1.6<u_a=2$.

Astfel, s-a obținut un algoritm recurent de ordinul doi cauzal, cu o valoare inițială a comenzii în domeniul admisibil.

Răspunsul indicial al SRA cu regulatorul proiectat are forma dată în figura 8.3.

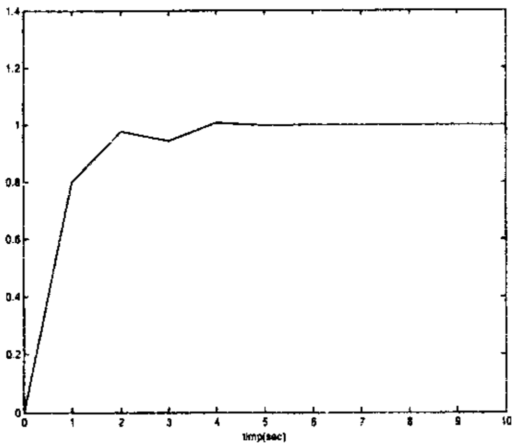


Fig. 8.3

Obținerea unui algoritm de dimensiune redusă presupune a construi $H_{0d}\left(z^{-1}\right)$ de dimensiuni reduse. Forma minimală a acestei funcții de transfer poate fi definită pentru semnale de tip treaptă și rampă astfel:

$$H_{0d}\left(z^{-1}\right)=z^{-1} \text{ pentru treaptă unitară} \tag{8.17}$$

ceea ce evidențiază că regimul staționar se atinge într-o singură perioadă de discretizare, respectiv:

$$H_{0d}\left(z^{-1}\right)=2z^{-1}-z^{-2} \text{ pentru rampă unitară.} \tag{8.18}$$

Aceste rezultate se obțin ținând seama că pentru semnale polinomiale aplicate la intrare de forma:

$$R\left(z^{-1}\right)=\frac{\alpha(z^{-1})}{(1-z^{-1})^n},$$

eroarea se anulează, conform teoremei valorii finale, după un număr finit de perioade de discretizare egal cu n:

$$\varepsilon_{st}=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})[1-H_0(z^{-1})]\frac{\alpha(z^{-1})}{(1-z^{-1})^n} \tag{8.19}$$

Pentru treaptă unitară $\alpha\left(z^{-1}\right)=1$, $n=1$, iar pentru rampă unitară $\alpha\left(z^{-1}\right)=Tz^{-1}$ și $n=2$.

În aceste condiții, rezultă pentru cele două tipuri de semnale forma minimală a răspunsului.

Este evident că utilizarea unor modele de forma (8.17) și (8.18) pentru sinteza algoritmului numeric, deși se obține o formă minimală, poate conduce la algoritmi necauzali, cu valori ale comenzii inițiale necontrolate.

Eroarea în regim staționar se poate calcula, conform teoremei valorii finale, cu relația:

$$\varepsilon_{st}=\lim_{z\to 1}(z-1)\left[1-H_0\left(z^{-1}\right)\right]\cdot\frac{\alpha\left(z^{-1}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)^n}. \tag{8.20}$$

Pentru a obține eroare egală cu zero, se impune ca $\left[1-H_0\left(z^{-1}\right)\right]$ să conțină termenul $\left(1-z^{-1}\right)^n$:

$$\left[1-H_0\left(z^{-1}\right)\right]=\left(1-z^{-1}\right)F(z)$$

unde $F(z)$ este un polinom ce nu are zerouri la $z=1$. Pentru un răspuns minimal, se alege:

$$F(z)=1 \text{ și } 1-H_0\left(z^{-1}\right)=\left(1-z^{-1}\right)$$

pentru $n=1$ (treaptă unitară) și

$$1-H_0\left(z^{-1}\right)=\left(1-z^{-1}\right)^2$$

pentru rampă unitară ($n=2$). Astfel, se obțin funcțiile de transfer:

$$H_0\left(z^{-1}\right)=z^{-1}$$

pentru $n=1$ și

$$H_0\left(z^{-1}\right)=1+2z^{-1}-z^{-2}$$

pentru $n=2$.

Pentru procese asimptotic stabile, de fază minimă, se poate obține un algoritm recurent cauzal de dimensiune minimă, dacă se compensează toate zerourile polinomului $A(z)$.

Întrucât algoritmul de reglare conține modelul invers al procesului se impune precauție la compensarea singularităților instabile și la prezența unor zerouri situate în afara discului unitar.

8.2. Algoritmul Dead-Beat (DB)

8.2.1. Algoritmul Dead-Beat normal DBn

Presupunem că modelul procesului este dat, coeficienţii (a_i, b_j) sunt determinaţi cu precizie, zerourile polinoamelor $B(z)$ şi $A(z)$ sunt în interiorul discului unitar.

Pentru o referinţă dată se poate construi polinomul $P(z^{-1})$ sub forma:

$$P(z^{-1}) = H_{0d}(z^{-1}) = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \cdots + p_m z^{-m} \quad (8.21)$$

dacă admitem că pentru referinţă treaptă unitară răspunsul atinge valoarea de regim staţionar după m perioade de discretizare.

Cunoaştem $p_1 \equiv y_1$ şi faptul că $\sum_{j=1}^{m} p_j = 1$, restul coeficienţilor p_j sunt necunoscuţi.

Introducem seria infinită:

$$u(z^{-1}) = u_0 + u_1 z^{-1} + u_2 z^{-2} + \cdots + u_m z^{-m} + u_{m+1} z^{-m-1} + \cdots \quad (8.22)$$

care reprezintă forma comenzii pentru cazul în care se obţine un răspuns sub forma:

$$Y(z^{-1}) = y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + \cdots + y_m z^{-m} + y_{m+1} z^{-m-1} + \cdots \quad (8.23)$$

În relaţia (8.22) nu se cunosc valorile u_k până la u_m, care se poate determina din condiţia ca sistemul să atingă în regim staţionar o valoare a ieşirii $y_{st} = 1 = y_m$.

Ţinând seama că

$$y_k = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u_k,$$

rezultă:

$$u_m = y_m \cdot \frac{A(1)}{B(1)} = \frac{1 + \sum_{1}^{m} a_i}{\sum_{1}^{m} b_j} = \frac{1}{K_c} \quad (8.24)$$

unde $K_c = \lim_{z \to 1} H_c(z^{-1})$ reprezintă factorul de amplificare al procesului.

Definim raportul:

$$\frac{U(z)}{R(z)} = Q(z^{-1}) = (1 - z^{-1})\left[u_o + u_1 z^{-1} + u_2 z^{-2} + \cdots + u_m z^{-m} + u_{m+1} z^{-m-1} + \cdots\right]$$

sau:

$$Q(z^{-1}) = q_0 + q_1 z^{-1} + \cdots + q_m z^{-m} \quad (8.25)$$

unde coeficienţii q_i se pot calcula cu relaţiile:

$$q_0 = u_0,\ q_1 = u_1 - u_0,\ \ldots,\ q_m = u_m - u_{m-1} \quad (8.26)$$

De observat că funcţia de transfer $H_R(z^{-1})$ se poate obţine sub forma:

$$H_R(z^{-1}) = H_c^{-1}(z^{-1}) \frac{P(z^{-1})}{1 - P(z^{-1})} = \frac{Q(z^{-1})}{1 - P(z^{-1})} \quad (8.27)$$

întrucât raportul

$$\frac{Y(z^{-1}) / R(z^{-1})}{U(z^{-1}) / R(z^{-1})} = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = H_c(z^{-1}). \quad (8.28)$$

Acest rezultat se obţine în condiţiile în care se aleg coeficienţii q_i şi p_j sub forma [36, 57]:

$$q_i = a_i q_0,\ p_j = b_j q_0. \quad (8.29)$$

Într-adevăr, dacă se aleg coeficienţii q_i şi p_j în funcţie de a_i şi b_j conform relaţiilor (8.29), se obţine identitatea (8.28). În aceste condiţii, polinoamele $Q(z^{-1})$ şi $P(z^{-1})$ se obţin sub forma:

$$Q(z^{-1}) = q_0 A(z^{-1}), \quad P(z^{-1}) = q_0 B(z^{-1}) \quad (8.30)$$

Funcţia de transfer a căii directe în acest caz are forma:

$$H_d(z^{-1}) = \frac{Q(z^{-1})}{1 - P(z^{-1})} \cdot \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{q_0 B(z^{-1})}{1 - q_0 B(z^{-1})}, \quad (8.31)$$

iar funcţia $H_0(z^{-1})$ devine:

$$H_0(z^{-1}) = \frac{H_d(z^{-1})}{1 + H_d(z^{-1})} = q_0 B(z^{-1}) = P(z^{-1}). \quad (8.32)$$

Parametrii algoritmului de reglare se obţin în acest caz în funcţie de q_0 şi coeficienţii (a_i, b_j) ai modelului procesului. Valoarea coeficientului q_0 se obţine cu uşurinţă din condiţia ca regulatorul să conţină componenta integrală:

$$\sum_{j=1}^{m} p_j = 1,\ q_0 = \frac{1}{b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_m} \quad (8.33)$$

şi, în consecinţă, rezultă:

$$q_i = \frac{a_i}{\sum_{j=1}^{m} b_j},\quad i = 1, \ldots\ldots, m$$
$$p_j = \frac{b_j}{\sum_{j=1}^{m} b_j},\quad j = 1, \ldots\ldots, m \quad (8.34)$$

Câteva observații cu referire la această metodă rapidă și simplă de sinteză a algoritmului numeric de reglare se impun:

a) algoritmul de reglare obținut are o formă similară ca și în cazul utilizării metodei răspunsului impus:

$$H_R\left(z^{-1}\right)=\frac{S\left(z^{-1}\right)}{R\left(z^{-1}\right)}=\frac{q_0 A\left(z^{-1}\right)}{1-q_0 B\left(z^{-1}\right)}=\frac{s_0+s_1 z^{-1}+\cdots+s_m z^{-m}}{1+r_1 z^{-1}+\cdots+r_m z^{-m}}, \qquad (8.35)$$

însă dimensiunea acestuia este redusă substanțial, fiind egală cu dimensiunea modelului procesului;

b) algoritmul sintetizat presupune compensarea totală a polilor modelului procesului, ceea ce impune o precizie ridicată în cunoașterea coeficienților polinomului $A(z)$;

c) valoarea inițială a comenzii $u_0 = s_0 \equiv q_0$ este în acest caz determinată numai de coeficienții b_j. În cazul în care suma acestor coeficienți este redusă, se poate obține o comandă inițială care să conducă sistemul în saturație. De asemenea, prin utilizarea acestei metode se pot obține salturi de comandă de la un tact la alt tact, ce pot determina o funcționare total necorespunzătoare a regulatorului (dead-beat);

d) relațiile de calcul ale parametrilor de acord ai regulatorului sunt simple și pot fi implementate în cadrul proiectării on-line în structuri de reglare adaptivă;

e) pentru a relaxa cerința de încadrare în limitele admisibile se poate alege o perioadă de discretizare mai mare, astfel încât $\sum_{j=1}^{m} b_j$ să fie mai mare. O valoare prea mare a perioadei T duce la pierderea de informație în procesul de achiziție, efectul unor perturbații asupra ieșirii nu este inclus în luarea deciziei și în consecință pot apărea fenomene necontrolate, inclusiv instabilitate;

f) pentru a controla nivelul comenzii inițiale se poate adopta o metodă de proiectare ce are la bază o extindere a dimensiunii algoritmului de reglare.

În cazul în care procesul conține timp mort, extensia metodei de proiectare este imediată (exercițiu pentru cititor) și se obține:

$$H_R\left(z^{-1}\right)=\frac{q_0 A\left(z^{-1}\right)}{1-q_0 B\left(z^{-1}\right)z^{-d}} \qquad (8.36)$$

Exemplul 8.2:

Se consideră procesul caracterizat prin funcția de transfer:

$$H_C\left(z^{-1}\right)=\frac{z^{-1}+0.8z^{-2}}{1+1.2z^{-1}+0.35z^{-2}}.$$

Se cere algoritmul Dead-Beat pentru acest proces:

$$H_R\left(z^{-1}\right)=\frac{q_0 A\left(z^{-1}\right)}{1-q_0 B\left(z^{-1}\right)}=\frac{s_0+s_1 z^{-1}+s_2 z^{-2}}{1+r_1 z^{-1}+r_2 z^{-2}}$$

$$q_0=\frac{1}{1+0.8}=\frac{1}{1.8}$$

$$s_0=q_0=\frac{1}{1.8} \qquad r_1=\frac{1}{1.8}$$

$$s_1=\frac{1}{1.8}1.2=\frac{1.2}{1.8} \qquad r_2=\frac{0.8}{1.8}$$

$$s_2=\frac{1}{1.8}0.35=\frac{0.35}{1.8}$$

Astfel, se obține algoritmul recurent de ordinul doi:

$$H_R\left(z^{-1}\right)=\frac{1+1.2z^{-1}+0.35z^{-2}}{1.8+z^{-1}+0.8z^{-2}}.$$

8.2.2. Algoritmul Dead-Beat extins (DBe)

Comanda inițială în cadrul algoritmului DBn este fixată prin valorile coeficienților b_j. Pentru a relaxa această restricție în aplicarea algoritmului DBn se poate extinde dimensiunea algoritmului și, în consecință, se pot obține unul sau mai multe grade de libertate de a controla comanda inițială s_0.

În cadrul acestui algoritm se consideră algoritmul de reglare sub forma:

$$H_R\left(z^{-1}\right)=\frac{s_0+s_1 z^{-1}+s_2 z^{-2}+\cdots+s_m z^{-m}+s_{m+1}z^{-m-1}}{1+r_1 z^{-1}+r_2 z^{-2}+\cdots+r_m z^{-m}+r_{m+1}z^{-m-1}}, \qquad (8.37)$$

în condițiile în care procesul este caracterizat prin modelul:

$$H_C\left(z^{-1}\right)=\frac{B\left(z^{-1}\right)}{A\left(z^{-1}\right)}.$$

Dacă se notează cu:

$$P'\left(z^{-1}\right)=p_1' z^{-1}+p_2' z^{-2}+\cdots+p_m' z^{-m}$$

și respectiv:

$$Q'\left(z^{-1}\right)=q_0'+q_1' z^{-1}+\cdots+q_m' z^{-m}$$

cele două polinoame construite pentru algoritmul DBn, rezultă că extensia algoritmului de reglare presupune satisfacerea următoarelor identități:

$$\begin{aligned} Q\left(z^{-1}\right)&=Q'\left(z^{-1}\right)\left(\alpha-z^{-1}\right)\equiv q_0+q_1 z^{-1}+\cdots q_{m+1}z^{-m-1}\\ P\left(z^{-1}\right)&=P'\left(z^{-1}\right)\left(\alpha-z^{-1}\right)\equiv p_1 z^{-1}+\cdots+p_{m+1}z^{-m-1}\end{aligned} \qquad (8.38)$$

Relațiile între coeficienții q_i' și q_i, respectiv între p_j' și p_j, în condițiile în care α este constantă arbitrară pozitivă, sunt de forma:

$$\begin{aligned} &q_0 = \alpha q_0' \\ &q_1 = \alpha q_1' - q_0' \\ &q_2 = \alpha q_2' - q_1' \\ &\ldots\ldots \\ &q_m = \alpha q_m' - q_{m-1}' \\ &q_{m+1} = -q_m' \end{aligned} \tag{8.39}$$

$$\begin{aligned} &p_1 = \alpha p_1' \\ &p_2 = \alpha p_2' - p_1' \\ &p_3 = \alpha p_3' - p_2' \\ &\ldots\ldots \\ &p_m = \alpha p_m' - p_{m-1}' \\ &p_{m+1} = -p_m' \end{aligned} \tag{8.40}$$

Între parametrii (q_i', p_j') și coeficienții (a_i, b_j) ai modelului procesului sunt stabilite relațiile conform (8.34) sub forma:

$$q_i' = a_i q_0', \quad i = 1,2,\cdots,m \tag{8.41}$$
$$p_j' = b_j q_0', \; j = 1,2,\cdots,m$$

Din (8.40) rezultă:

$$1 = \alpha \sum_{j=1}^{m} p_j' - \sum_{j=1}^{m} p_j' \tag{8.42}$$

având în vedere cerința ca eroarea în regim staționar pentru referință treaptă unitară să fie egală cu zero.

Dacă ținem seama de (8.41), atunci relația (8.42) se scrie sub forma:

$$1 = q_0 \sum_{j=1}^{m} b_j - q_0' \sum_{j=1}^{m} b_j \tag{8.43}$$

Din (8.43) se obține:

$$q_0' = q_0 - \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} b_j} \tag{8.44}$$

ceea ce evidențiază posibilitatea de a alege comanda inițială în mod arbitrar în funcție de α.

Folosind relația (8.44) și ținând seama de (8.39) și (8.40), se obțin parametrii de acord ai regulatorului DBe sub forma:

$$\begin{aligned} &q_1 = \alpha a_1 q_0' - q_0' = a_1 q_0 - q_0 + \frac{1}{\sum b_j} = q_o(a_1 - 1) + \frac{1}{\sum b_j} \\ &q_2 = \alpha a_2 q_0' - a_1 q_0' = a_2 q_0 - a_1\left(q_0 - \frac{1}{\sum b_j}\right) = (a_2 - a_1) q_0 + \frac{a_1}{\sum b_j} \\ &\ldots\ldots \\ &q_m = \alpha a_m q_0' - a_{m-1} q_0' = a_m q_0 - a_{m-1}\left(q_0 - \frac{1}{\sum b_j}\right) = (a_m - a_{m-1}) q_0 + \frac{a_{m-1}}{\sum b_j} \\ &q_{m+1} = -a_m q_0' = -a_m\left(q_0 - \frac{1}{\sum b_j}\right) = -a_m q_0 + \frac{a_m}{\sum b_j} \end{aligned} \tag{8.45}$$

respectiv:

$$\begin{aligned} &p_1 = \alpha b_1 q_0' = b_1 q_0 \\ &p_2 = \alpha b_2 q_0' - b_1 q_0' = b_2 q_0 - b_1\left(q_0 - \frac{1}{\sum b_j}\right) = (b_2 - b_1) q_0 + \frac{b_1}{\sum b_j} \\ &\ldots\ldots \\ &p_m = \alpha b_m q_0' - b_{m-1} q_0' = (b_m - b_{m-1}) q_0 + \frac{b_{m-1}}{\sum b_j} \\ &p_{m+1} = -b_m q_0' = -b_m\left(q_0 - \frac{1}{\sum b_j}\right) \end{aligned} \tag{8.46}$$

Astfel, se obține algoritmul de reglare extins sub forma:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{Q(z^{-1})}{1 - P(z^{-1})} = \frac{S(z^{-1})}{R(z^{-1})} = \frac{s_0 + s_1 z^{-1} + \ldots + s_{m+1} z^{-m-1}}{1 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2} + \ldots + r_{m+1} z^{-m-1}} \tag{8.47}$$

unde $s_i \equiv q_i$ și $r_j \equiv -p_j$.

Algoritmul DBe, ca și algoritmul DBn, se impune a fi calculat cu precauție, având în vedere că polii procesului sunt compensați de regulator.

Ținând seama că regulatorul sintetizat poate fi pus sub forma:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{q_0' A(z^{-1})(\alpha - z^{-1})}{1 - q_0' B(z^{-1})(\alpha - z^{-1})}, \tag{8.48}$$

rezultă funcția de transfer a căii directe sub forma:

$$H_d(z^{-1}) = \frac{q_0'(\alpha - z^{-1}) B(z^{-1})}{1 - q_0' B(z^{-1})(\alpha - z^{-1})}, \tag{8.49}$$

ceea ce asigură o comportare a sistemului caracterizată prin funcţia de transfer $H_0\left(z^{-1}\right)$ sub forma:

$$H_0\left(z^{-1}\right)=q_0^{'}(\alpha-z^{-1})B(z^{-1}). \quad (8.50)$$

Aceasta ilustrează existenţa unui grad de libertate în realizarea comportării dorite prin alegerea parametrului α.

Ca şi în cazul algoritmului DBn, se impun câteva observaţii referitoare la algoritmul DBe şi anume:

a) algoritmul de reglare obţinut este cauzal şi are dimensiunea $(m+1)$, ceea ce necesită un efort suplimentar la implementare;

b) valoarea comenzii iniţiale poate fi aleasă de proiectant, astfel încât să se evite intrarea în saturaţie a regulatorului în primul tact şi să se asigure performanţe dorite pentru SRA;

c) algoritmul de reglare conţine, ca şi în cazul precedent, un număr de $(m+1)$ poli în origine. Aceasta asigură răspuns rapid, însă prezintă o ridicată sensibilitate în raport cu variaţiile parametrilor (a_i, b_j);

d) faptul că valoarea iniţială a comenzii este la alegerea proiectantului face posibilă alegerea unei perioade de discretizare T mai mică decât în cazul DBn şi, în consecinţă, se reduce riscul apariţiei unor fenomene necontrolate între momentele de eşantionare;

e) metoda de proiectare presupune

f) ca modelul procesului să nu conţină incertitudini parametrice, iar polinomul $B(z)$ să aibă zerourile plasate în discul unitar.

Pentru procese cu timp mort, structura algoritmului de reglare se obţine direct sub forma:

$$H_R\left(z^{-1}\right)=\frac{q_0A(z^{-1})(\alpha-z^{-1})}{1-q_0B(z^{-1})z^{-d}(\alpha-z^{-1})}, \quad (8.51)$$

ceea ce evidenţiază că prezenţa timpului mort în modelul procesului determină creşterea necesarului de memorie pentru implementare.

8.3. Proiectarea sistemelor de reglare prin proceduri de alocare a polilor

8.3.1. Formulare generală

Considerăm modelul determinist cu o intrare şi o ieşire:

$$y_k=\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u_{k-d} \quad (8.52)$$

unde polinoamele $A\left(q^{-1}\right)$ şi $B\left(q^{-1}\right)$ au forma şi semnificaţia din (8.1.). Cele două polinoame sunt relativ prime (nu au factori comuni, iar $d\geq 0$).

Pentru proiectarea SRA vom considera o structură cu două grade de libertate de forma :

$$u_k=\frac{T(q^{-1})}{R(q^{-1})}r_k-\frac{S(q^{-1})}{R(q^{-1})}y_k \quad (8.53)$$

unde regulatorul este în formă canonică, iar SRA are structura prezentată în figura 8.4.

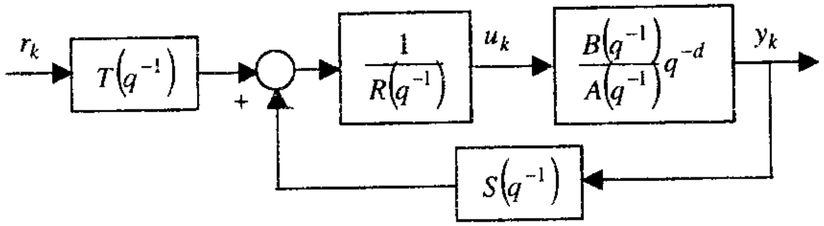


Fig. 8.4

Considerăm comportarea dorită a sistemului descrisă cu ajutorul modelului:

$$A_m\left(q^{-1}\right)y_k=q^{-d}B_m\left(q^{-1}\right)r_k \quad (8.54)$$

unde $A_m\left(q^{-1}\right)$ este polinom monic, stabil şi nu are factori comuni cu polinomul $B_m\left(q^{-1}\right)$.

Dacă utilizăm legea de comandă (8.53) pentru procesul descris prin (8.52), obţinem:

$$y_k=\frac{q^{-d}T(q^{-1})B(q^{-1})}{A(q^{-1})R(q^{-1})+q^{-d}B(q^{-1})S(q^{-1})} \quad (8.55)$$

Cele două ieşiri obţinute pentru aceeaşi intrare, conform relaţiilor (8.54) şi (8.55) trebuie să fie identice:

$$\frac{q^{-d}T(q^{-1})B(q^{-1})}{A(q^{-1})R(q^{-1})+q^{-d}B(q^{-1})S(q^{-1})}\equiv\frac{q^{-d}B_m(q^{-d})}{A_m(q^{-d})}. \quad (8.56)$$

Astfel, problema proiectării se reduce la determinarea polinoamelor $R\left(q^{-1}\right)$, $S\left(q^{-1}\right)$ şi $T\left(q^{-1}\right)$, care asigură satisfacerea identităţii (8.56).

Din (8.56) rezultă că zerourile procesului trebuie, de asemenea, să se găsească printre zerourile sistemului în circuit închis, chiar dacă acestea sunt compensate de polii corespunzători ai SRA. De notat că zerourile instabile sau slab amortizate nu pot fi compensate de regulator, deoarece pot conduce la instabilitate.

În acest caz, considerăm factorizarea polinomului $B(q^{-1})$ sub forma:

$$B(q^{-1}) = B^+(q^{-1})B^-(q^{-1}) \tag{8.57}$$

unde $B^+(q^{-1})$ conține zerourile stabile (care pot fi compensate) și $B^-(q^{-1})$ conține zerourile instabile sau slab amortizate (care nu pot fi compensate). Pentru a obține o factorizare unică, vom alege $B^+(q^{-1})$ sub forma unui polinom monic.

Din (8.56) rezultă că ecuația caracteristică a SRA este:

$$A(q^{-1})R(q^{-1}) + q^{-d}B(q^{-1})S(q^{-1}) = P_c(q^{-1}) \tag{8.58}$$

Printre rădăcinile acestei ecuații caracteristice se vor regăsi polii modelului de referință (zerourile polinomului $A_m(q^{-1})$) și zerourile stabile ale procesului. Deoarece, în general, modelul de referință are un ordin mai mic decât al SRA, adică:

$$grad[A_m(q^{-1})] < grad[A(q^{-1})R(q^{-1}) + q^{-d}B(q^{-1})S(q^{-1})], \tag{8.59}$$

există factori în partea stângă a relației (8.56) care se compensează. Acești factori sunt incluși în polinomul $\alpha_e(q^{-1})$ care este denumit polinomul observerului și care se alege a avea rădăcinile bine amortizate.

Polinomul observerului apare în mod evident în ecuația caracteristică, așa cum s-a arătat în §7.4.

Prin urmare polinomul caracteristic al sistemului închis poate avea următoarea formă:

$$A(q^{-1})R(q^{-1}) + q^{-d}B(q^{-1})S(q^{-1}) = B^+(q^{-1})A_m(q^{-1})\alpha_e(q^{-1}). \tag{8.60}$$

Deoarece $B^+(q^{-1})$ este un factor al polinomului $B(q^{-1})$ și polinoamele $A(q^{-1})$ și $B(q^{-1})$ sunt coprime, rezultă din (8.60) că $B^+(q^-)$ ar putea să fie un divizor al polinomului $R(q^{-1})$, adică:

$$R(q^{-1}) = B^+(q^{-1})R_1(q^{-1}) \tag{8.61}$$

În aceste condiții, ecuația (8.60) poate fi pusă sub forma:

$$A(q^{-1})R_1(q^{-1}) + q^{-d}B^-(q^{-1})S(q^{-1}) = A_m(q^{-1})\alpha_e(q^{-1}), \tag{8.62}$$

iar ecuația (8.56) este astfel echivalentă cu:

$$\frac{q^{-d}B^+(q^{-1})B^-(q^{-1})T(q^{-1})}{B^+(q^{-1})A_m(q^{-1})\alpha_e(q^{-1})} = \frac{q^{-d}B_m(q^{-1})}{A_m(q^{-1})}. \tag{8.63}$$

Pentru ca ecuația (8.63) să se mențină, ținând seama că polinomul $B^-(q^{-1})$ nu poate fi compensat, este clar că $B^-(q^{-1})$ trebuie să fie un factor al polinomului $B_m(q^{-1})$, adică:

$$B_m(q^{-1}) = B^-(q^{-1}) \cdot B_m^1(q^{-1}) \tag{8.64}$$

și, de asemenea, că:

$$T(q^{-1}) = \alpha_e(q^{-1}).B_m^1(q^{-1}). \tag{8.65}$$

Astfel, rezultă că $B_m(q^{-1})$ nu poate fi ales liber. Putem alege liber numai parțial polinomul $B_m(q^{-1})$, prin alegerea polinomului $B_m^1(q^{-1})$.

Ecuația (8.62) este o ecuație diofantică, ale cărei soluții sunt polinoamele $R(q^{-1})$ și $S(q^{-1})$.

Ecuația (8.62) poate fi pusă sub forma clasică de ecuație diofantică:

$$\bar{A}(q^{-1})\bar{R}(q^{-1}) + \bar{B}(q^{-1})\bar{S}(q^{-1}) = \bar{C}(q^{-1}) \tag{8.66}$$

pentru care se poate demonstra că există totdeauna o soluție pentru $\bar{R}(q^{-1})$ și $\bar{S}(q^{-1})$, dacă cel mai mare factor comun al polinoamelor $\bar{A}(q^{-1})$ și $\bar{B}(q^{-1})$ este un divizor al polinomului $\bar{C}(q^{-1})$. Prin urmare, (8.62) va avea totdeauna o soluție pentru $\bar{R}(q^{-1})$ și $\bar{S}(q^{-1})$, deoarece am aproximat că $A(q^{-1})$ și $B(q^{-1})$ sunt coprime și, în consecință, $A(q^{-1})$ și $q^{-d}\bar{B}(q^{-1})$ sunt de asemenea coprime.

De notat că dacă o soluție există, atunci (8.66) are, în general, o infinitate de soluții. Într-adevăr, dacă $R^0(q^{-1})$ și $S^0(q^{-1})$ sunt soluțiile ecuației (8.66), atunci poate fi ușor verificat că $R^0(q^{-1}) + \bar{B}(q^{-1})Q(q^{-1})$ și $S^0(q^{-1}) - \bar{A}(q^{-1})Q(q^{-1})$, cu $Q(q^{-1})$ un polinom arbitrar, sunt, de asemenea, soluții ale ecuației diofantice (8.66).

Acest rezultat este datorat parametrizării Youla-Kuceia [46], care se prezintă sub forma următoarei teoreme.

TEOREMA 8.1: Pentru un proces descris prin modelul $H_c(z) = \dfrac{B(z)}{A(z)}$ și un regulator stabilizator $H_R(z) = \dfrac{S^0(z)}{R^0(z)}$, există clasa tuturor regulatoarelor stabilizatoare descrisă prin [6]:

$$\frac{S(z)}{R(z)} = \frac{S^0(z) + Q(z)A(z)}{R^0(z) - Q(z)B(z)} \tag{8.67}$$

unde $Q(z)$ este stabil.

Se cere a determina algoritmul de reglare printr-o procedură de alocare a polilor, astfel încât să fie satisfăcute cerinţele:

a) amplificarea în regim staţionar egală cu unitatea;
b) polinomul caracteristic al estimatorului să aibă gradul minim;
c) să se compenseze zerourile;
d) polinomul caracteristic dorit să fie de forma:
$P_c(z^{-1}) = 1 - 0.7z^{-1} + 0.3z^{-2}$;
e) regulatorul conţine (nu conţine) integrator.

8.8. Se consideră procesul caracterizat printr-un model discret:

$$H_c(z^{-1}) = \frac{z^{-2}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}.$$

Se cere algoritmul de reglare ce plasează ambii poli ai SRA în origine, iar forma acestuia este dată de ecuaţia generală $Ru_k = Tr_k - Sy_k$ cu $S \equiv T$.

Comparaţi rezultatele obţinute prin metoda de proiectare bazată pe alocarea polilor şi prin metoda DBn.

9. SISTEME STOCASTICE DE REGLARE

9.1. Introducere

În cele ce urmează, considerăm că perturbaţiile ce acţionează asupra procesului sunt de natură stocastică şi pot fi generate de un sistem liniar, la intrarea căruia se aplică zgomot alb discret.

Ieşirea procesului poate fi calculată în acest caz sub forma:

$$y_k = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u_{k-d} + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} v_k \tag{9.1}$$

unde v_k reprezintă o secvenţă de variabile aleatoare necorelate, de medie zero şi deviaţie standard egală cu σ.

În cazul în care nu există perturbaţii, modelul procesului se reduce la o raţională $H_c(z^{-1})$. Când nu există semnal de comandă, modelul este un proces stocastic cu o densitate spectrală raţională sau un proces ARMA.

Modelul (9.1) reprezintă un sistem liniar perturbat de zgomot. Un asemenea sistem poate fi reprezentat că în figura 9.1, cu una sau două surse de zgomot.

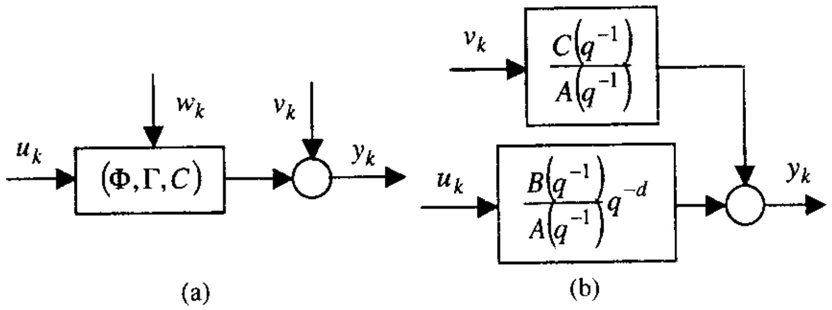


Fig. 9.1

În acest caz, considerăm factorizarea polinomului $B(q^{-1})$ sub forma:

$$B(q^{-1}) = B^+(q^{-1})B^-(q^{-1}) \tag{8.57}$$

unde $B^+(q^{-1})$ conține zerourile stabile (care pot fi compensate) și $B^-(q^{-1})$ conține zerourile instabile sau slab amortizate (care nu pot fi compensate). Pentru a obține o factorizare unică, vom alege $B^+(q^{-1})$ sub forma unui polinom monic.

Din (8.56) rezultă că ecuația caracteristică a SRA este:

$$A(q^{-1})R(q^{-1}) + q^{-d}B(q^{-1})S(q^{-1}) = P_c(q^{-1}) \tag{8.58}$$

Printre rădăcinile acestei ecuații caracteristice se vor regăsi polii modelului de referință (zerourile polinomului $A_m(q^{-1})$) și zerourile stabile ale procesului. Deoarece, în general, modelul de referință are un ordin mai mic decât al SRA, adică:

$$grad\left[A_m(q^{-1})\right] < grad\left[A(q^{-1})R(q^{-1}) + q^{-d}B(q^{-1})S(q^{-1})\right], \tag{8.59}$$

există factori în partea stângă a relației (8.56) care se compensează. Acești factori sunt incluși în polinomul $\alpha_e(q^{-1})$ care este denumit polinomul observerului și care se alege a avea rădăcinile bine amortizate.

Polinomul observerului apare în mod evident în ecuația caracteristică, așa cum s-a arătat în §7.4.

Prin urmare polinomul caracteristic al sistemului închis poate avea următoarea formă:

$$A(q^{-1})R(q^{-1}) + q^{-d}B(q^{-1})S(q^{-1}) = B^+(q^{-1})A_m(q^{-1})\alpha_e(q^{-1}). \tag{8.60}$$

Deoarece $B^+(q^{-1})$ este un factor al polinomului $B(q^{-1})$ și polinoamele $A(q^{-1})$ și $B(q^{-1})$ sunt coprime, rezultă din (8.60) că $B^+(q^-)$ ar putea să fie un divizor al polinomului $R(q^{-1})$, adică:

$$R(q^{-1}) = B^+(q^{-1})R_1(q^{-1}) \tag{8.61}$$

În aceste condiții, ecuația (8.60) poate fi pusă sub forma:

$$A(q^{-1})R_1(q^{-1}) + q^{-d}B^-(q^{-1})S(q^{-1}) = A_m(q^{-1})\alpha_e(q^{-1}), \tag{8.62}$$

iar ecuația (8.56) este astfel echivalentă cu:

$$\frac{q^{-d}B^+(q^{-1})B^-(q^{-1})T(q^{-1})}{B^+(q^{-1})A_m(q^{-1})\alpha_e(q^{-1})} = \frac{q^{-d}B_m(q^{-1})}{A_m(q^{-1})}. \tag{8.63}$$

Pentru ca ecuația (8.63) să se mențină, ținând seama că polinomul $B^-(q^{-1})$ nu poate fi compensat, este clar că $B^-(q^{-1})$ trebuie să fie un factor al polinomului $B_m(q^{-1})$, adică:

$$B_m(q^{-1}) = B^-(q^{-1}) \cdot B_m^1(q^{-1}) \tag{8.64}$$

și, de asemenea, că:

$$T(q^{-1}) = \alpha_e(q^{-1}).B_m^1(q^{-1}). \tag{8.65}$$

Astfel, rezultă că $B_m(q^{-1})$ nu poate fi ales liber. Putem alege liber numai parțial polinomul $B_m(q^{-1})$, prin alegerea polinomului $B_m^1(q^{-1})$.

Ecuația (8.62) este o ecuație diofantică, ale cărei soluții sunt polinoamele $R(q^{-1})$ și $S(q^{-1})$.

Ecuația (8.62) poate fi pusă sub forma clasică de ecuație diofantică:

$$\bar{A}(q^{-1})\bar{R}(q^{-1}) + \bar{B}(q^{-1})\bar{S}(q^{-1}) = \bar{C}(q^{-1}) \tag{8.66}$$

pentru care se poate demonstra că există totdeauna o soluție pentru $\bar{R}(q^{-1})$ și $\bar{S}(q^{-1})$, dacă cel mai mare factor comun al polinoamelor $\bar{A}(q^{-1})$ și $\bar{B}(q^{-1})$ este un divizor al polinomului $\bar{C}(q^{-1})$. Prin urmare, (8.62) va avea totdeauna o soluție pentru $\bar{R}(q^{-1})$ și $\bar{S}(q^{-1})$, deoarece am aproximat că $A(q^{-1})$ și $B(q^{-1})$ sunt coprime și, în consecință, $A(q^{-1})$ și $q^{-d}\bar{B}(q^{-1})$ sunt de asemenea coprime.

De notat că dacă o soluție există, atunci (8.66) are, în general, o infinitate de soluții. Într-adevăr, dacă $R^0(q^{-1})$ și $S^0(q^{-1})$ sunt soluțiile ecuației (8.66), atunci poate fi ușor verificat că $R^0(q^{-1}) + \bar{B}(q^{-1})Q(q^{-1})$ și $S^0(q^{-1}) - \bar{A}(q^{-1})Q(q^{-1})$, cu $Q(q^{-1})$ un polinom arbitrar, sunt, de asemenea, soluții ale ecuației diofantice (8.66).

Acest rezultat este datorat parametrizării Youla-Kuceia [46], care se prezintă sub forma următoarei teoreme.

TEOREMA 8.1: Pentru un proces descris prin modelul $H_c(z) = \dfrac{B(z)}{A(z)}$ și un regulator stabilizator $H_R(z) = \dfrac{S^0(z)}{R^0(z)}$, există clasa tuturor regulatoarelor stabilizatoare descrisă prin [6]:

$$\frac{S(z)}{R(z)} = \frac{S^0(z) + Q(z)A(z)}{R^0(z) - Q(z)B(z)} \tag{8.67}$$

unde $Q(z)$ este stabil.

Demonstrație: Arătăm că $\frac{S(z)}{R(z)}$ este stabil, introducând $Q(z)=\frac{L(z)}{M(z)}$, unde $L(z)$ și $M(z)$ sunt polinoame.

Astfel, relația (8.67) poate fi pusă sub forma:

$$\frac{S}{R}=\frac{MS^0+LA}{MR^0-LB}$$

unde am omis argumentul z, pentru simplificarea scrierii. Utilizarea acestui regulator asigură un polinom caracteristic al SRA de forma:

$$P_c=AR+BS=A\left(MR^0-LB\right)+B\left(MS^0+LA\right)=M\left(AR^0+BS^0\right). \qquad (8.68)$$

Acest polinom are toate rădăcinile în interiorul discului unitate, deoarece $M(z)$ este stabil și AR^0+BS^0 este stabil.

Pentru a demonstra că toate regulatoarele stabilizatoare pot fi scrise ca (8.67) cu Q stabil, considerăm un regulator stabilizator S/R, care conduce la un polinom caracteristic al SRA de forma:

$$AR+BS=P_c.$$

Din (8.67) rezultă:

$$SR^0-QSB=RS^0+QRA$$

iar

$$Q=\frac{SR^0-RS^0}{AR+BS}=\frac{SR^0-RS^0}{P_c}$$

care este stabil, deoarece polinomul P_c are toate zerourile în interiorul cercului unitate.

Se poate demonstra existența unei singure soluții pentru ecuația (8.66) dacă impunem următoarele restricții asupra gradelor polinoamelor:

$$grad\overline{R}(q^{-1})< grad\overline{B}\left(q^{-1}\right)$$

sau:

$$grad\overline{S}(q^{-1})< grad\overline{A}\left(q^{-1}\right).$$

Mai mult, ținând seama că algoritmul pe care-l proiectăm trebuie să fie cauzal, adică $gradS(q^{-1})< gradR\left(q^{-1}\right)$, și alegem la limită, pentru a elimina apariția unor întârzieri în legea de comandă:

$$grad\left[S(q^{-1})\right]=grad\left[R(q^{-1}\right]=grad\left[T(q^{-1})\right], \qquad (8.69)$$

rezultă următoarea condiție:

$$gradR(q^{-1})=grad\,A_m(q^{-1})+grad\alpha_e(q^{-1})+grad\,B^+(q^{-1})-grad\,A(q^{-1}) \qquad (8.70)$$

sau:

$$grad\left[S(q^{-1})\right]=grad\,A_m(q^{-1})+grad\alpha_e(q^{-1})-grad\,\overline{B}(q^{-1})-d \qquad (8.71)$$

Gradele polinoamelor $R\left(q^{-1}\right)$ și $S\left(q^{-1}\right)$ sunt, astfel, impuse de structura sistemului și structura funcției de transfer dorite pentru SRA.

Pentru a fi siguri că se obține o soluție unică, vom alege:

$$gradS(q^{-1})\leq grad\,A(q^{-1})-1 \text{ sau } gradR(q^{-1})\leq grad\,B(q^{-1})+d-1$$

așa cum rezultă din (8.67) sau (8.68) [6, 46].

Prin selectarea condițiilor (8.70) sau (8.71) rezultă condițiile pentru obținerea unei soluții unice pentru $R_1\left(q^{-1}\right)$ și $S\left(q^{-1}\right)$ sub forma:

$$gradR_1\left(q^{-1}\right)=gradA_m\left(q^{-1}\right)+grad\alpha_e\left(q^{-1}\right)-gradA\left(q^{-1}\right) \qquad (8.72)$$

$$gradS\left(q^{-1}\right)=gradA\left(q^{-1}\right)-1 \qquad (8.73)$$

sau:

$$gradR_1\left(q^{-1}\right)=gradB^-(q^{-1})+d-1 \qquad (8.74)$$

$$gradS\left(q^{-1}\right)=gradA_m\left(q^{-1}\right)+grad\alpha_e\left(q^{-1}\right)-gradB^-(q^{-1})-d \qquad (8.75)$$

Alegând condițiile (8.72) și (8.73) și punând condiția ca legea de reglare să fie cauzală ($gradS\left(q^{-1}\right)=gradA\left(q^{-1}\right)-1\leq gradR\left(q^{-1}\right)$) se obțin:

$$grad\alpha_e\left(q^{-1}\right)\geq 2gradA\left(q^{-1}\right)-gradA_m\left(q^{-1}\right)-gradB^+\left(q^{-1}\right)-1. \qquad (8.76)$$

În cazul în care se cere ca $gradT\left(q^{-1}\right)\leq gradR\left(q^{-1}\right)$ și ținem seama de (8.65), obținem:

$$grad\alpha_e\left(q^{-1}\right)+gradB^+\left(q^{-1}\right)=gradT\left(q^{-1}\right)\leq gradR\left(q^{-1}\right)$$

și

$$gradR\left(q^{-1}\right)=gradA_m\left(q^{-1}\right)+grad\alpha_e\left(q^{-1}\right)+gradB^+\left(q^{-1}\right)-gradA\left(q^{-1}\right) \qquad (8.77)$$

sau

$$gradA\left(q^{-1}\right)-gradB^+\left(q^{-1}\right)\leq gradA_m\left(q^{-1}\right)-gradB_m\left(q^{-1}\right). \qquad (8.78)$$

Excesul de poli ai sistemului poate fi astfel mai mic decât excesul de poli al modelului de referință.

Condiția (8.76), în combinație cu (8.78), garantează că reacția va fi cauzală când (8.72) și (8.73) sunt alese. Aceasta implică cauzalitatea funcțiilor de transfer:

$$H_{Ry}=\frac{S(z^{-1})}{R(z^{-1})} \text{ și } H_{Rr}=\frac{T(z^{-1})}{R(z^{-1})}.$$

În aceste condiții, etapele proiectării sistemelor de reglare numerice cu două grade de libertate, prin alocarea polilor, sunt următoarele:

- – Factorizează $B\left(q^{-1}\right)=B^+\left(q^{-1}\right)B^-\left(q^{-1}\right)$, cu $B^+\left(q^{-1}\right)$ monic;

Procesul de proiectare este o procedură tipic iterativă, care presupune alegerea polinomului caracteristic şi restricţiile impuse polinoamelor R şi S, ţinând seama de particularităţile procesului.

Prin proiectare, se urmăreşte reducerea la minimum a „fragilităţii" regulatorului, având în vedere faptul că modelele sunt determinate cu precizie limitată.

PROBLEME

8.1. Se consideră un proces caracterizat prin modelul:

$$H_P(s)=\frac{0.5e^{-4s}}{(5s+1)(15s+1)}.$$

Se cere:

a) structura SRA cu regulator numeric cu un singur grad de libertate;

b) modelul discret al procesului, alegând în mod corespunzător perioada de discretizare;

c) algoritmul de reglare care asigură un răspuns indicial de forma:

$$Y(0)=Y(T)=Y(2T)=0$$
$$Y(3T)=0.7, Y(4T)=Y(5T)=\cdots=Y(kT)=1$$

8.2. Se consideră un proces caracterizat prin modelul:

$$H_c\left(z^{-1}\right)=\frac{z^{-1}+0.5z^{-2}}{1+0.7z^{-1}+z^{-2}}.$$

Se cere:

a) un algoritm DB care să asigure o comandă iniţială $u_0 \le 0.5$;

b) să se compare algoritmul DB cu algoritmul obţinut printr-o procedură de tip răspuns impus, care asigură:

$$Y(0)=0,\ Y(T)=0.8,\ Y(2T)=Y(3T)=\cdots=1.$$

8.3. Pentru un proces caracterizat prin:

$$H_c(z)=\frac{T^2}{2}\cdot\frac{z+1}{(z-1)^2}$$

se cere:

a) structura de SRA cu regulator numeric cu două grade de libertate;

b) polinoamele $S(z)$, $R(z)$ şi $T(z)$, astfel încât polinomul caracteristic să fie de gradul doi cu $\zeta=0.7$ şi $\omega_n=0.2$, cu $T=1\text{sec}$.

8.4. Se consideră procesul caracterizat prin modelul:

$$H_c\left(z^{-1}\right)=\frac{\left(1-1.5z^{-1}\right)\left(1+0.5z^{-1}+z^{-2}\right)}{1+0.5z^{-1}+z^{-2}+0.8z^{-3}}.$$

Se cere:

a) structura SRA numeric cu două grade de libertate;

b) polinoamele $S(z)$, $R(z)$ şi $T(z)$, astfel încât funcţia de transfer dorită pentru SRA să fie de forma:

$$H_m\left(z^{-1}\right)=\frac{\beta_0+\beta_1z^{-1}+\beta_2z^{-2}+\beta_3z^{-3}}{1+\alpha_1z^{-1}+\alpha_2z^{-2}+\alpha_3z^{-3}+\alpha_4z^{-4}},$$

cu α_i şi β_j specificaţi.

8.5. Se consideră procesul caracterizat prin funcţia de transfer:

$$H_c\left(z^{-1}\right)=\frac{z^{-1}}{1+a_1z^{-1}}$$

şi impunem o comportare dorită a SRA, descrisă prin:

$$H_m\left(z^{-1}\right)=\frac{z^{-1}(1+\alpha_1)}{1+\alpha_1z^{-1}}.$$

Se cere:

a) algoritmul de reglare cu două grade de libertate cu parametrii r_i, s_j şi t_k în funcţie de α_1 şi a_1;

b) polinomul caracteristic al sistemului închis.

8.6. Se consideră procesul caracterizat prin funcţia de transfer:

$$H_c\left(z^{-1}\right)=\frac{z^{-1}+0.7z^{-2}}{1-1.8z^{-1}+0.8z^{-2}}.$$

Se cere algoritmul de reglare care asigură polinomul caracteristic al SRA de forma:

$$P_c\left(z^{-1}\right)=1-1.5z^{-1}+0.7z^{-2}$$

cu un estimator de dimensiune minimală de tip dead-beat (polii plasaţi în origine).

Se vor considera cele două cazuri posibile, în care se compensează sau nu se compensează zeroul procesului.

8.7. Se consideră procesul caracterizat prin funcţia de transfer:

$$H_c\left(z^{-1}\right)=\frac{0.4z^{-1}+0.3z^{-2}}{1-1.6z^{-1}+0.7z^{-2}}.$$

– Alege $A_m(q^{-1})$, $B_m(q^{-1}) = B^-(q^{-1})B_m^1(q^{-1})$ şi $\alpha_e(q^{-1})$, astfel încât să fie îndeplinite condiţiile (8.76) şi (8.78);

- – Selectează gradele polinoamelor $R_1(q^{-1})$ şi $S(q^{-1})$, astfel încât să fie satisfăcute condiţiile (8.72) şi (8.73) sau (8.74) şi (8.75);

– Rezolvă ecuaţia diofantică:

$A(q^{-1})R_1(q^{-1}) + q^{-d}B^-(q^{-1})S(q^{-1}) = A_m(q^{-1})\alpha_e(q^{-1})$, pentru $R_1(q^{-1})$ şi $S(q^{-1})$;

- – Calculează:

$$R(q^{-1}) = B^+(q^{-1})R_1(q^{-1}) \text{ şi}$$
$$T(q^{-1}) = \alpha_e(q^{-1})B_m^1(q^{-1});$$

- – Generează comanda:

$$u_k = \frac{T(q^{-1})}{R(q^{-1})}r_k - \frac{S(q^{-1})}{R(q^{-1})}y_k.$$

Polinoamele $A(q^{-1})$ şi $B(q^{-1})$ sunt coprime, iar $A(q^{-1})$ este monic.

Exemplul 8.3:

Se consideră procesul caracterizat prin modelul:

$$A(q^{-1})y_k = B(q^{-1})u_k \text{ cu } y_0 = 1$$

unde:

$$A(q^{-1}) = 1 + 2q^{-1} + q^{-2} \text{ şi } B(q^{-1}) = 2q^{-1} + q^{-2} + q^{-3} = q^{-1}(2 + q^{-1} + q^{-2}).$$

Polinomul $B(q^{-1})$ poate fi factorizat astfel:

$$B(q^{-1}) = 2(1 + 0.5q^{-1} + 0.5q^{-2}) = B^-(q^{-1})\cdot B^+(q^{-1})$$

cu $B^+(q^{-1})$ monic.

Modelul de referinţă care defineşte comportarea dorită a sistemului de reglare este de forma:

$$A_m(q^{-1})y_k = q^{-1}B_m(q^{-1})$$

cu

$$A_m(q^{-1}) = 1 - q^{-1} + 0.25q^{-2}$$

şi

$$B_m(q^{-1}) = 1 + 0.3q^{-1} = 2(0.5 + 0.15q^{-1}) = B^-(q^{-1})B_m'(q^{-1}).$$

Soluţie:

Pentru a satisface (8.72), (8.73) şi (8.76), alegem $grad\alpha_e(q^{-1}) = 0$, $gradR_1(q^{-1}) = 0$ *şi* $gradS(q^{-1}) = 1$. *Astfel,* $\alpha_e(q^{-1}) = 1$, $R_1(q^{-1}) = r_0$ *şi* $S(q^{-1}) = s_0 + s_1q^{-1}$.

Rezolvăm în acest caz următoarea ecuaţie diofantică pentru obţinerea coeficienţilor r_0, s_0 şi s_1:

$$A(q^{-1})R_1(q^{-1}) + q^{-1}B^-(q^{-1})S(q^{-1}) = A_m(q^{-1})\alpha_e(q^{-1})$$

sau

$$(1 + 2q^{-1} + q^{-2})r_0 + 2q^{-1}(s_0 + s_1q^{-1}) = 1 - q^{-1} + 0.25q^{-2}.$$

Din această identitate se obţine $r_0 = 1$, $s_0 = -1.5$ şi $s_1 = -0.375$ şi, în consecinţă:

$$R_1(q^{-1}) = 1,\ S(q^{-1}) = -1.5 - 0.375q^{-1}.$$

De observat din (8.62) că atunci când $\alpha_e(q^{-1})$ este un polinom monic, atunci $R_1(q^{-1})$ şi $R(q^{-1})$ trebuie să fie polinoame monice.

Cunoscând $R_1(q^{-1})$ şi $B^+(q^{-1})$, se obţine:

$$R(q^{-1}) = B^+(q^{-1})R_1(q^{-1}) = 1 + 0.5q^{-1} + 0.5q^{-2}$$

şi

$$T(q^{-1}) = B_m'(q^{-1})\alpha_e(q^{-1}) = 0.5 + 015q^{-1}.$$

În aceste condiţii, legea de comandă se calculează astfel:

$$u_k = \frac{T(q^{-1})}{R(q^{-1})}r_k - \frac{S(q^{-1})}{R(q^{-1})}y_k$$

sau

$$u_k = \frac{0.5+0.15q^{-1}}{1+0.5q^{-1}+0.5q^{-2}}r_k - \frac{1.5+0.375q^{-1}}{1+0.5q^{-1}+0.5q^{-2}}y_k.$$

Rezultă astfel un algoritm cauzal de dimensiune egală cu doi.

8.3.2. Proiectarea regulatoarelor cu două grade de libertate cu compensarea polilor şi a zerourilor procesului

Considerăm că polinoamele $A(z)$ şi $B(z)$ conţin zerouri stabile şi/sau instabile (în afara discului unitar). Astfel, presupunem că polinoamele $A(z)$ şi $B(z)$ pot fi factorizate sub forma:

$$A(z) = A^+(z)A^-(z) \tag{8.79}$$
$$B(z) = B^+(z)B^-(z)$$

unde $A^+(z)$ şi $B^+(z)$ sunt factori ce pot fi compensaţi (conţin zerouri în interiorul discului unitar). Pentru a obţine factorizări unice, polinoamele $A^+(z)$ şi $B^+(z)$ se aleg a fi monice.

Pentru compensarea singularităţilor procesului, rezultă că cele trei polinoame ce definesc regulatorul cu două grade de libertate pot fi puse sub forma:

$$R = B^+ R_1 \\ S = A^+ S_1 \\ T = A^+ T_1 \tag{8.80}$$

Cu această reprezentare, polinomul caracteristic P_c al sistemului închis capătă forma:

$$P_c = AR + BS = A^+ B^+ (A^- R_1 + B^- S_1) = A^+ B^+ \overline{P_c}. \tag{8.81}$$

Ţinând seama că polinomul caracteristic al sistemului închis este alcătuit din polinomul caracteristic al regulatorului şi al estimatorului (observerului), putem factoriza polinomul caracteristic astfel:

$$P_c = \alpha_e \cdot \alpha_c. \tag{8.82}$$

Această factorizare corespunde principiului separării utilizat la proiectarea legii de reglare după stare.

Polinoamele A^+ şi B^+, care sunt compensate, sunt astfel factori ai polinomului caracteristic sistemului închis:

$$\alpha_e = A^+ \alpha_{e_1} \\ \alpha_c = B^+ \alpha_{c_1} \tag{8.83}$$

Cu aceste notaţii, rezultă din (8.81) că polinoamele R_1 şi S_1 satisfac identitatea:

$$A^- R_1 + B^- S_1 = \alpha_{e_1} \alpha_{c_1}. \tag{8.84}$$

Regulatorul cauzal de ordin minim se obţine alegând soluţia unică cu $gradS_1 < gradA^-$.

Legea de reglare poate fi scrisa ca:

$$B^+ R_1 u_k = A^+ T_1 r_k - A^+ S_1 y_k,$$

respectiv

$$u_k = \frac{A^+}{B^+}\left[\frac{T_1}{R_1} r_k - \frac{S_1}{R_1} y_k\right] \tag{8.85}$$

Această relaţie arată că polii şi zerourile stabile ale procesului se compensează şi, astfel, se proiectează regulatorul pentru un model de ordin

redus al procesului. Factorii compensaţi trebuie să corespundă modurilor stabile de funcţionare ale sistemului.

În practică, pentru a se asigura o funcţionare stabilă în cazul proiectării regulatorului cu compensare de zerouri şi poli ai procesului, se impun precauţii speciale, asigurându-se o delimitare a zonei de poziţionare a zerourilor pentru care se obţine o amortizare suficient de bună [6, 46].

În cazul în care se urmăreşte realizarea unui răspuns dorit, definit prin:

$$y_m = \frac{B_m}{A_m} r_k,$$

rezultă cu uşurinţă că polinomul B^- trebuie să fie un factor al polinomului B_m, deoarece B^- nu poate fi compensat, şi, prin urmare, $B_m = B^- B_m^1$.

Prin alegerea polinoamelor R, S şi T sub forma:

$$R = A_m B^+ R_1 \\ S = A_m A^+ S_1 \\ T = B_m^1 \alpha_{e_1} \alpha_{c_1} A^+, \tag{8.86}$$

legea de reglare poate fi scrisă astfel [6]:

$$u_k = \frac{A^+}{B^+}\left[\frac{B_m^1 \alpha_{e_1} \alpha_{c_1}}{A_m R_1} r_k - \frac{S_1}{R_1} y_k\right]. \tag{8.87}$$

Din ecuaţia diofantică (8.84) rezultă:

$$\alpha_{e_1} \alpha_{c_1} = A^- R_1 + B^- S_1 \tag{8.88}$$

şi, prin urmare,

$$\frac{B_m^1 \alpha_{e_1} \alpha_{c_1}}{A_m R_1} = \frac{B_m^1 (A^- R_1 + B^- S_1)}{A_m R_1} = \frac{B_m^1 A^-}{A_m} + \frac{B_m^1 B^- S_1}{A_m R_1}$$

sau

$$\frac{B_m^1 \alpha_{e_1} \alpha_{c_1}}{A_m R_1} = \frac{B_m}{A_m} \cdot \frac{A^-}{B^-} + \frac{B_m}{A_m} \cdot \frac{S_1}{R_1}.$$

În acest caz, legea de reglare (8.87) capătă forma:

$$u_k = \frac{B_m}{A_m} \cdot \frac{A}{B} r_k + \frac{A^+}{B^+} \cdot \frac{S_1}{R_1} (y_m - y). \tag{8.89}$$

Astfel, regulatorul are două componente: componenta directă, (feedforward) cu funcţia de transfer:

$$H_{R1}(z) = \frac{B_m(z) A(z)}{A_m(z) B(z)} = \frac{B_m^1(z) A(z)}{A_m(z) B^+(z)} \tag{8.90}$$

şi componenta în reacţie, cu funcţia de transfer:

$$H_{R2}(z)=\frac{A^{+}(z)}{B^{+}(z)}\cdot\frac{S_1(z)}{R_1(z)}. \tag{8.91}$$

Polinoamele $R_1(z)$ şi $S_1(z)$ se obţin prin rezolvarea ecuaţiei diofantice (8.83).

Regulatorul corespunde structurii generale cu două grade de libertate prezentată în figura 8.5.

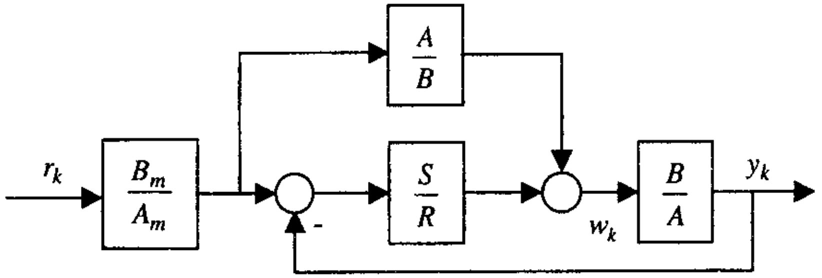


Fig. 8.5

Răspunsul la perturbaţii este generat de polinoamele α_{e_1} şi α_{c_1}, iar răspunsul la referinţă este dat prin funcţia de transfer B_m / A_m.

De notat că regulatorul nu poate fi implementat prin blocuri separate, aşa cum este arătat în figura 8.5, deoarece fiecare bloc separat nu este cauzal.

Comportarea în raport cu perturbaţiile v_1 şi v_2 (figura 8.6) se poate obţine, dacă se calculează mărimile de calitate u_k, y_p şi y_k, sub forma:

$$\begin{aligned}
y_p&=\frac{BT}{AR+BS}r_k+\frac{BR}{AR+BS}v_1-\frac{BS}{AR+BS}v_2\\
y_k&=\frac{BT}{AR+BS}r_k+\frac{BR}{AR+BS}v_1+\frac{AR}{AR+BS}v_2\\
u_k&=\frac{AT}{AR+BS}r_k+\frac{BS}{AR+BS}v_1+\frac{AS}{AR+BS}v_2
\end{aligned} \tag{8.92}$$

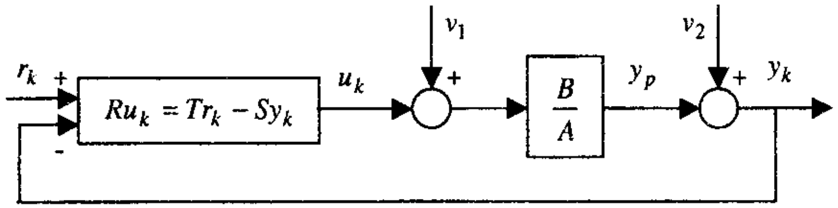


Fig. 8.6

Proiectarea regulatorului are ca obiectiv minimal stabilirea sistemului închis. Aceasta înseamnă că polinomul caracteristic

$$P_c(z)=A(z)R(z)+B(z)S(z)$$

are toate rădăcinile în interiorul cercului de rază unitară.

Pentru ca efectul asupra variabilei y_p a unei perturbaţii v_1 de tip treaptă să fie nul în regim staţionar, se impune ca regulatorul să conţină un integrator ($R(z)=(z-1)R'(z)$).

În mod similar, pot fi analizate condiţii specifice impuse polinoamelor R şi S pentru a fi satisfăcute cerinţe de performanţă în raport cu perturbaţiile v_1 şi v_2.

Exemplul 8.4:

Se consideră procesul caracterizat printr-un model de ordinul doi sub forma[6]:

$$H_c(z)=\frac{K(z-b)}{(z-1)(z-a)}=\frac{B(z)}{A(z)}$$

unde $b<0$, $a>0$, $K>0$.

Se cere legea de reglare astfel încât comportarea SRA să fie descrisă de modelul:

$$H_m(z)=\frac{K_0 z}{z^2+p_1 z+p_2}\equiv\frac{B_m(z)}{A_m(z)}.$$

Soluţie:

Modelul procesului conţine un zero, $z=b$, *care nu este inclus în* $B_m(z)$. *Polinomul* $B(z)$ *poate fi descompus sub forma:*

$$B(z)=(z-b)\cdot K=B^{+}(z)\cdot B^{-}(z)$$

$$B_m(z)=B_m'(z)\cdot\alpha_e(z)$$

cu $B_m^1(z)=\dfrac{B_m(z)}{B^{-}(z)}=\dfrac{K_0}{K}=\dfrac{1+p_1+p_2}{K}$.

Întrucât $H_m(1)\equiv 1$, *şi* $\alpha_e(z)$ *poate fi ales* $\alpha_e(z)=1$.

Gradele polinoamelor R_1 *şi* S *sunt date:*

$$gradR_1=grad\alpha_e+gradA_m-gradA$$

$$gradS=gradA-1=2$$

Alegând:

$$R_1(z)=r_0 \text{ şi } S(z)=s_0 z+s_1$$

se obține identitatea polinomială:

$$(z-1)(z-a)r_0 + K(s_0 z + s_1) = z^2 + p_1 z + p_2.$$

Din egalarea coeficienților ce multiplică operatorul z la diferite puteri, se obțin relațiile:

$$r_0 = 1$$
$$-(1+a)r_0 + Ks_0 = p_1$$
$$ar_0 + Ks_1 = p_2$$

și, după rezolvarea acestui sistem de ecuații algebrice, obținem:

$$r_0 = 1,\ s_0 = \frac{1+a+p_1}{K},\ s_1 = \frac{p_2 - a}{K}.$$

Polinomul $T(z)$ se obține cu ușurință:

$$T(z) = \alpha_e(z)\cdot B_m^{'}(z) = z\frac{1+p_1+p_2}{K} = t_0 z.$$

Legea de reglare în aceste condiții are forma:

$$u_k = t_0 r_k - s_0 y_k - s_1 y_{k-1} + b u_{k-1}.$$

8.4. Probleme ale robusteței regulatoarelor numerice

Este evident faptul că nivelul de adecvanță al modelului discret al procesului condus joacă un rol esențial în obținerea, prin proiectare, a unui regulator care să asigure robustețea stabilității și a performanțelor. Erorile de modelare pot influența dramatic performanțele sistemelor numerice proiectate prin metode bazate pe *răspuns impus* sau prin proceduri de alocare a polilor.

De remarcat faptul că ecuația caracteristică a SRA cu regulator proiectat prin metoda răspunsului impus sau prin metode de tip dead-beat este:

$$A_0(z) = z^n, \tag{8.93}$$

întrucât funcția de transfer a sistemului închis are forma:

$$H_0(z) = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots + p_n z^{-n}. \tag{8.94}$$

În aceste condiții, analiza sensibilității SRA la erorile de modelare și determinarea preciziei modelului pentru a obține o proiectare cu rezultate cât mai bune reprezintă cerințe pentru validarea soluției proiectate.

Pentru analiza sensibilității SRA la erorile de modelare, considerăm polinomul caracteristic în forma generală:

$$P(z,\alpha) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} + \dots + \alpha_n \tag{8.95}$$

unde coeficienții α_i sunt determinați de poziția polilor în interiorul discului unitate. Pentru simplitate, considerăm poli reali, distincți λ_i, și în consecință polinomul caracteristic se obține sub forma:

$$P(z,\alpha) \equiv \prod_{1}^{n}(z-\lambda_i). \tag{8.96}$$

Admițând că prin erorile de modelare sau de reprezentare numerică a parametrilor regulatorului se modifică coeficientul α_k cu $\delta\alpha_k$, atunci o rădăcină λ_j a polinomului caracteristic se poate modifica cu $\delta\lambda_j$. În aceste condiții, polinomul caracteristic satisface egalitatea:

$$P(\lambda_j + \delta\lambda_j,\ \alpha_k + \delta\alpha_k) = P(\lambda_j, \alpha_k) + \left.\frac{\partial P}{\partial z}\right|_{z=\lambda_j}\cdot\delta\lambda_j + \left.\frac{\partial P}{\partial \alpha_k}\right|_{z=\lambda_j}\cdot\delta\alpha_k + \dots = 0 \tag{8.97}$$

Ținând seama că $P(\lambda_j, \alpha_k) = 0$, rezultă:

$$\delta\lambda_j = -\frac{\left.\dfrac{\partial P}{\partial \alpha_k}\right|_{z=\lambda_j}}{\left.\dfrac{\partial P}{\partial z}\right|_{z=\lambda_j}}\cdot\delta\alpha_k \tag{8.98}$$

Dacă ținem seama de (8.95) și (8.96), rezultă:

$$\delta\lambda_j = -\frac{\lambda_j^{n-k}}{\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}(\lambda_j - \lambda_i)}\cdot\delta\alpha_k. \tag{8.99}$$

Relația (8.99) evidențiază efectul pe care îl are eroarea de modelare sau reprezentarea numerică a parametrilor modelului procesului sau/și și regulatorului asupra performanțelor SRA.

Cu cât rădăcinile polinomului caracteristic sunt mai apropiate și mai aproape de origine, sistemul închis are o mai mare sensibilitate la erorile de modelare sau reprezentare a parametrilor.

Din (8.99) se poate observa și faptul că sensibilitatea performanțelor la erorile de modelare (reprezentare) este cu atât mai mare, cu cât k este mai mic.

În cazul în care polii SRA cu regulator cu două grade de libertate (fig. 8.7) reprezintă zerourile funcției $F(z)$:

$$F(z) = 1 + H_{Ry}(z)H_c(z) = \\ = 1 + H_{Ry}(z)\hat{H}_c(z) + H_{Ry}(z)H_c(z) - H_{Ry}(z)\hat{H}_c(z) \tag{8.100}$$

unde $\hat{H}_c(z)$ reprezintă modelul nominal al procesului pe baza căruia se proiectează regulatorul, iar $H_c(z)$ reprezintă modelul real, se poate deduce cu uşurinţă condiţia de robusteţe a stabilităţii.

Dacă:

$$\left|H_{Ry}(z)\left(H_c(z)-\hat{H}_c(z)\right)\right| < \left|1+\hat{H}_d(z)\right| = \left|\frac{\hat{H}_c(z)}{H_0(z)}\right|\cdot\left|H_{Rr}(z)\right| \qquad (8.101)$$

pe cercul unitate, atunci urmează, din principiul variaţiei argumentului, că diferenţele între numărul de poli şi numărul de zerouri în afara discului unitate pentru funcţiile $[1+H_d(z)]$ şi $\left[1+\hat{H}_d(z)\right]$ sunt aceleaşi.

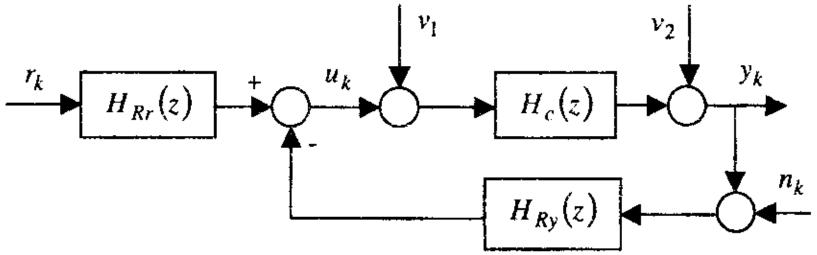


Fig. 8.7

Precizia relativă cerută pentru robusteţea stabilităţii este obţinută prin împărţirea relaţiei (8.101) la $\hat{H}_d(z)$:

$$\left|\frac{H_c(z)-\hat{H}_c(z)}{\hat{H}_c(z)}\right| \le \left|\frac{1+\hat{H}_d(z)}{\hat{H}_d(z)}\right| = \left|\frac{1}{\hat{H}_0(z)}\right|. \qquad (8.102)$$

Dacă scriem incertitudinea multiplicativă sub forma:

$$L_M(z)=\frac{H_c(z)-\hat{H}_c(z)}{\hat{H}_c(z)} \qquad (8.103)$$

cu

$$\left|L_M(z)\right| \le l_a(\omega) \quad (z=e^{Tj\omega}),$$

atunci condiţia pentru asigurarea robusteţei stabilităţii rezultă sub forma:

$$\left\|\hat{H}_0(z)L_M(z)\right\|_\infty < 1 \qquad (8.104)$$

sau

$$\left|\hat{H}_0(z)\right| \le \frac{1}{l_a(\omega)}. \qquad (8.105)$$

Un rezultat similar obţinem dacă ţinem seama că cele două blocuri de reglare $H_{Rr}(z)$ şi $H_{Ry}(z)$ au semnificaţiile:

$$H_{Rr}(z)=\frac{T(z)}{R(z)}$$

şi

$$H_{Ry}(z)=\frac{S(z)}{R(z)},$$

iar în cazul utilizării procedurii de alocare a polilor rezultă relaţia [6]:

$$\left|L_M(z)\right| \le \frac{1}{\left|H_m(z)\right|}\cdot\left|\frac{H_{Rr}(z)}{H_{Ry}(z)}\right| \qquad (8.106)$$

care defineşte nivelul de precizie relativă a modelului cerut pentru asigurarea stabilităţii SRA, unde $H_m(z)=\frac{B_m(z)}{A_m(z)}$ are semnificaţia dată în (8.54).

Pentru a analiza efectul erorilor de modelare (reprezentare) asupra performanţelor, vom determina funcţia de transfer $H_0(z)$ în prezenţa incertitudinilor şi apelăm la o procedură de alocare a polilor pentru proiectarea regulatorului.

Funcţia de transfer a SRA în prezenţa incertitudinilor se poate calcula în funcţie de $H_m(z)$ sub forma:

$$H_0 = H_m \frac{H_c}{\hat{H}_c}\,\frac{1+\hat{H}_c\frac{S}{R}}{1+H_c\frac{S}{R}} \qquad (8.107)$$

Această expresie arată cum erorile de modelare se reflectă în expresia funcţiei de transfer $H_0(z)$ şi, implicit, în performanţele SRA.

Analiza sensibilităţii şi a robusteţei SRA numerice trebuie să evidenţieze limitele erorilor de modelare (reprezentare) care pot fi admise pentru proiectarea regulatorului, ţinând seama de particularităţile metodelor de proiectare pe baza modelelor discrete.

Proiectarea algoritmilor numerici prin proceduri de alocare a polilor sau pe baza răspunsului impus presupune considerarea unor precauţii speciale la alegerea polinomului caracteristic dorit şi a răspunsului impus. Sensibilitatea ridicată a performanţelor la erorile de modelare impune o alegere a zerourilor polinomului caracteristic într-o zonă admisibilă, evitându-se originea şi zona apropiată de cercul unitar ($0<|\lambda_i|<1$).

Procesul de proiectare este o procedură tipic iterativă, care presupune alegerea polinomului caracteristic şi restricţiile impuse polinoamelor R şi S, ţinând seama de particularităţile procesului.

Prin proiectare, se urmăreşte reducerea la minimum a „fragilităţii" regulatorului, având în vedere faptul că modelele sunt determinate cu precizie limitată.

PROBLEME

8.1. Se consideră un proces caracterizat prin modelul:

$$H_P(s)=\frac{0.5e^{-4s}}{(5s+1)(15s+1)}.$$

Se cere:

a) structura SRA cu regulator numeric cu un singur grad de libertate;

b) modelul discret al procesului, alegând în mod corespunzător perioada de discretizare;

c) algoritmul de reglare care asigură un răspuns indicial de forma:

$$Y(0)=Y(T)=Y(2T)=0$$
$$Y(3T)=0.7, Y(4T)=Y(5T)=\dots=Y(kT)=1$$

8.2. Se consideră un proces caracterizat prin modelul:

$$H_c\left(z^{-1}\right)=\frac{z^{-1}+0.5z^{-2}}{1+0.7z^{-1}+z^{-2}}.$$

Se cere:

a) un algoritm DB care să asigure o comandă iniţială $u_0 \le 0.5$;

b) să se compare algoritmul DB cu algoritmul obţinut printr-o procedură de tip răspuns impus, care asigură:

$$Y(0)=0,\ Y(T)=0.8,\ Y(2T)=Y(3T)=\dots=1.$$

8.3. Pentru un proces caracterizat prin:

$$H_c(z)=\frac{T^2}{2}\cdot\frac{z+1}{(z-1)^2}$$

se cere:

a) structura de SRA cu regulator numeric cu două grade de libertate;

b) polinoamele $S(z)$, $R(z)$ şi $T(z)$, astfel încât polinomul caracteristic să fie de gradul doi cu $\zeta=0.7$ şi $\omega_n=0.2$, cu $T=1\text{sec}$.

8.4. Se consideră procesul caracterizat prin modelul:

$$H_c\left(z^{-1}\right)=\frac{\left(1-1.5z^{-1}\right)\left(1+0.5z^{-1}+z^{-2}\right)}{1+0.5z^{-1}+z^{-2}+0.8z^{-3}}.$$

Se cere:

a) structura SRA numeric cu două grade de libertate;

b) polinoamele $S(z)$, $R(z)$ şi $T(z)$, astfel încât funcţia de transfer dorită pentru SRA să fie de forma:

$$H_m\left(z^{-1}\right)=\frac{\beta_0+\beta_1 z^{-1}+\beta_2 z^{-2}+\beta_3 z^{-3}}{1+\alpha_1 z^{-1}+\alpha_2 z^{-2}+\alpha_3 z^{-3}+\alpha_4 z^{-4}},$$

cu α_i şi β_j specificaţi.

8.5. Se consideră procesul caracterizat prin funcţia de transfer:

$$H_c\left(z^{-1}\right)=\frac{z^{-1}}{1+a_1 z^{-1}}$$

şi impunem o comportare dorită a SRA, descrisă prin:

$$H_m\left(z^{-1}\right)=\frac{z^{-1}(1+\alpha_1)}{1+\alpha_1 z^{-1}}.$$

Se cere:

a) algoritmul de reglare cu două grade de libertate cu parametrii r_i, s_j şi t_k în funcţie de α_1 şi a_1;

b) polinomul caracteristic al sistemului închis.

8.6. Se consideră procesul caracterizat prin funcţia de transfer:

$$H_c\left(z^{-1}\right)=\frac{z^{-1}+0.7z^{-2}}{1-1.8z^{-1}+0.8z^{-2}}.$$

Se cere algoritmul de reglare care asigură polinomul caracteristic al SRA de forma:

$$P_c\left(z^{-1}\right)=1-1.5z^{-1}+0.7z^{-2}$$

cu un estimator de dimensiune minimală de tip dead-beat (polii plasaţi în origine).

Se vor considera cele două cazuri posibile, în care se compensează sau nu se compensează zeroul procesului.

8.7. Se consideră procesul caracterizat prin funcţia de transfer:

$$H_c\left(z^{-1}\right)=\frac{0.4z^{-1}+0.3z^{-2}}{1-1.6z^{-1}+0.7z^{-2}}.$$

Se cere a determina algoritmul de reglare printr-o procedură de alocare a polilor, astfel încât să fie satisfăcute cerinţele:

a) amplificarea în regim staţionar egală cu unitatea;
b) polinomul caracteristic al estimatorului să aibă gradul minim;
c) să se compenseze zerourile;
d) polinomul caracteristic dorit să fie de forma:
$P_c\left(z^{-1}\right)=1-0.7z^{-1}+0.3z^{-2}$;
e) regulatorul conţine (nu conţine) integrator.

8.8. Se consideră procesul caracterizat printr-un model discret:

$$H_c\left(z^{-1}\right)=\frac{z^{-2}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}.$$

Se cere algoritmul de reglare ce plasează ambii poli ai SRA în origine, iar forma acestuia este dată de ecuaţia generală $Ru_k=Tr_k-Sy_k$ cu $S\equiv T$.

Comparaţi rezultatele obţinute prin metoda de proiectare bazată pe alocarea polilor şi prin metoda DBn.

9. SISTEME STOCASTICE DE REGLARE

9.1. Introducere

În cele ce urmează, considerăm că perturbaţiile ce acţionează asupra procesului sunt de natură stocastică şi pot fi generate de un sistem liniar, la intrarea căruia se aplică zgomot alb discret.

Ieşirea procesului poate fi calculată în acest caz sub forma:

$$y_k=\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u_{k-d}+\frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}v_k \tag{9.1}$$

unde v_k reprezintă o secvenţă de variabile aleatoare necorelate, de medie zero şi deviaţie standard egală cu σ.

În cazul în care nu există perturbaţii, modelul procesului se reduce la o raţională $H_c\left(z^{-1}\right)$. Când nu există semnal de comandă, modelul este un proces stocastic cu o densitate spectrală raţională sau un proces ARMA.

Modelul (9.1) reprezintă un sistem liniar perturbat de zgomot. Un asemenea sistem poate fi reprezentat că în figura 9.1, cu una sau două surse de zgomot.

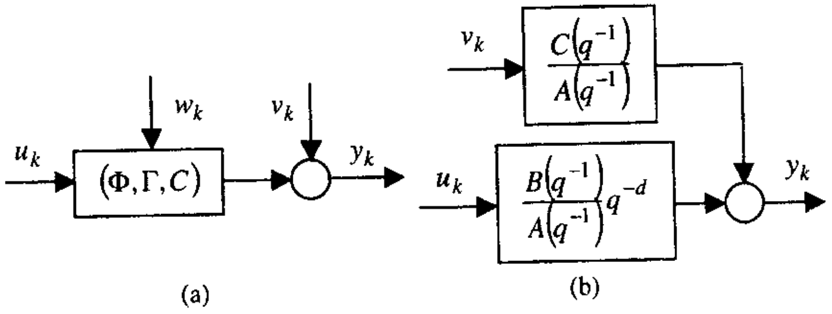


Fig. 9.1

Când polinomul $C(z)$ are toate zerourile în interiorul discului unitate, spunem că avem o *reprezentare a inovației*, deoarece variabilele aleatoare v_k reprezintă inovații ale procesului aleator. Dacă variabilele v_k și u_k sunt cunoscute până la momentul k, atunci y_k poate fi calculată ca și v_k, dacă se cunosc variabilele y_k și u_k până la momentul k.

Modelul stocastic de stare în care se includ perturbațiile stocastice v_k și w_k are forma generală:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi x_k + \Gamma u_k + v_k \\ y_k &= C x_k + w_k \end{aligned} \quad ; \; x_0 \in \Re^n \tag{9.2}$$

unde v_k și w_k sunt secvențe de vectori independenți identic distribuiți cu valori medii egale cu zero și matrice de covarianță R_1 și R_2, iar matricele Φ, Γ, C au semnificație cunoscută și dimensiuni corespunzătoare pentru $u_k \in \Re^m$, $y_k \in \Re^p$.

Starea inițială x_0 a sistemului (9.2) este o variabilă aleatoare necorelată cu zgomotele albe discrete v_k și w_k, având media egală cu $\bar{x}_0$, $E\{x_0\} = \bar{x}_0$, și matricea de covarianță R_0:

$$E\left\{ [x_0 - \bar{x}_0] \cdot [x_0 - \bar{x}_0]^T \right\} = R_0 \tag{9.3}$$

Matricele R_0 și R_1 presupunem că sunt semipozitiv definite, iar R_2 este o matrice pozitiv definită, unde R_1 și R_2 se calculează cu relațiile:

$$\begin{aligned} E\{v_k v_k^T\} &= R_1 \\ E\{w_k w_k^T\} &= R_2 \end{aligned} \tag{9.4}$$

Modelul (9.2) poate fi utilizat pentru a reprezenta sisteme liniare finit dimensionale cu perturbații procese stocastice cu densități spectrale raționale.

Pentru sinteza legii de reglare în prezența perturbațiilor stocastice pot fi folosite atât modele intrare-ieșire (9.1), cât și modele de stare (9.2).

Criteriile de performanță utilizate frecvent în proiectarea legii de reglare pentru procese stocastice au forma:

$$I_1 = E\{y_k^2\} \tag{9.5}$$

în cazul în care se consideră că $y_{st} = 0$, deci referința este egală cu zero sau:

$$I_2 = E\left\{ y_k^2 + \rho u_k^2 \right\} \tag{9.6}$$

care, în aceleași condiții, include și varianța comenzii ponderată cu scalarul ρ, pentru procese cu o intrare și o ieșire.

Minimizarea acestor criterii asigură dispersia minimă a ieșirii sau varianța minimă a ieșirii în prezența perturbațiilor stocastice.

Un criteriu de performanță care asigură comportarea dorită atât în raport cu referința, cât și în raport cu perturbațiile stocastice are forma:

$$I_3 = E\left\{ [y_{k+1} - r_k]^2 + \rho [u_k - U_s]^2 \right\} \tag{9.7}$$

unde r_k reprezintă referința sistemului de reglare, iar U_s reprezintă valoarea de regim staționar a comenzii. Minimizarea acestui criteriu de performanță asigură eroare staționară nulă pentru referință treaptă.

Legea de reglare obținută prin minimizarea criteriilor (9.5)÷(9.7) se cunoaște și sub denumirea de *lege de reglare de minimă varianță*.

În cazul utilizării modelelor de stare stocastice (9.2), forma generală a unui criteriu pătratic are forma:

$$I_4 = E\left\{ x_N^T S x_N + \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k) \right\} \tag{9.8}$$

unde matricele S, Q și R au semnificația dată în capitolul 7.

Minimizarea acestui criteriu de performanță permite determinarea legii de conducere optimală pentru un proces ale cărui variabile de stare și perturbațiile sunt stocastice. Această lege de conducere este cunoscută și sub denumirea de *lege de conducere liniar pătratic-gaussiană* (LQG).

În funcție de criteriul de performanță selectat și de modelul matematic al procesului, în prezența mărimilor exogene stocastice se pot utiliza diferite metode de proiectare a legii de reglare/conducere.

9.2. Sinteza legii de reglare de minimă varianță

Presupunem că legea de reglare u_k reprezintă o combinație liniară a variabilelor y_k, y_{k-1}, ..., y_{k-n}, u_{k-1}, u_{k-2}, ..., u_{k-n}, ceea ce asigură cauzalitatea acestuia. Pentru a obține o asemenea lege de reglare, admitem că perturbațiile v_i și v_j sunt necorelate pentru $i \neq j$. În aceste condiții, se poate sintetiza o lege de reglare optimală liniară.

În cazul proceselor descrise de modele de forma:

$$y_k = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u_{k-d} + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} v_k \tag{9.9}$$

sinteza legii de reglare ce minimizează un criteriu pătratic de forma:

$$I = E\{y_{k+d}^2\} \tag{9.10}$$

presupune rezolvarea a două probleme distincte:

- predicția ieșirii y_{k+d} pe un orizont de timp egal cu timpul mort d, și
- sinteza legii de reglare ce minimizează criteriul (9.10).

9.2.1. Proiectarea predictorului optimal

Presupunem că procesul ce urmează a fi predictat este generat de un filtru la intrarea căruia se aplică zgomot alb Gaussian, iar cel mai bun predictor se consideră cel care minimizează eroarea pătratică de predicție. Un predictor admisibil în m tacte este o funcție arbitrară de variabilele disponibile y_k, y_{k-1}, ...

Considerăm procesul stocastic descris prin modelul:

$$y_k = \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} v_k \tag{9.11}$$

unde

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_n q^{-n}$$

și

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + \cdots + c_n q^{-n}$$

sunt polinoame monice, stabile, în operatorul de întârziere q^{-1}.

Admitem că variabilele y_k, y_{k-1}, ..., au fost observate și dorim să predictăm ieșirea y_{k+m} după un număr de m tacte.

Din (9.11) se obține cu ușurință:

$$\begin{aligned} y_{k+m} &= \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} v_{k+m} = \\ &= v_{k+m} + f_1 v_{k+m-1} + \cdots + f_{m-1} v_{k+1} + f_m v_k + f_{m+1} v_{k-1} + \cdots \end{aligned} \tag{9.12}$$

dacă se realizează o dezvoltare în serie a raportului $C(q^{-1})/A(q^{-1})$.

Astfel, în membrul drept al relației (9.12) pot fi evidențiate două componente, una ce conține informații cunoscute la momentul k și cealaltă care conține informații necunoscute la momentul k.

Dacă ținem seama că polinomul $C(q^{-1})$ este stabil și se poate calcula v_i din y_i, y_{i-1}, ..., folosind relația:

$$v_k = \frac{A(q^{-1})}{C(q^{-1})} y_k \tag{9.13}$$

din (9.12) obținem predictorul optimal în sensul minimizării erorii pătratice sub forma:

$$\hat{y}_{k+m|k} = f_m v_k + f_{m-1} v_{k-1} + \cdots \tag{9.14}$$

iar eroarea de predicție:

$$\hat{\varepsilon}_{k+m|k} = v_{k+m} + f_1 v_{k+m-1} + \cdots + f_{m+1} v_{k+1}. \tag{9.15}$$

Rezultatul de mai sus se obține dacă se realizează descompunerea:

$$\frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} = F(q^{-1}) + q^{-m} \frac{G(q^{-1})}{A(q^{-1})}, \tag{9.16}$$

unde:

$$\begin{aligned} F(q^{-1}) &= 1 + f_1 q^{-1} + \cdots + f_{m-1} q^{-m+1} \\ G(q^{-1}) &= g_0 + g_1 q^{-1} + \cdots + g_{n-1} q^{-n+1}. \end{aligned} \tag{9.17}$$

Folosind (9.17), ecuația (9.12) devine:

$$y_{k+m} = F(q^{-1}) v_{k+m} + \frac{G(q^{-1})}{A(q^{-1})} y_k \tag{9.18}$$

sau, dacă ținem seama de (9.13):

$$y_{k+m} = F(q^{-1}) v_{k+m} + \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})} y_k \tag{9.19}$$

Primul termen din dreapta în ecuația (9.13) conține informațiile necunoscute, variabilele v_{k+i} sunt toate independente de datele disponibile y_k, y_{k-1}, y_{k-2}, ..., la momentul k. Ultimul termen este o funcție liniară de datele disponibile la momentul k.

Introducem funcția arbitrară $\hat{y}$ ce reprezintă predicția ieșirii în funcție de datele disponibile.

Eroarea de predicție în acest caz se calculează cu relația:

$$\hat{e}_{k+m|k} = y_{k+m} - \hat{y} = F(q^{-1}) v_{k+m} + \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})} y_k - \hat{y} \tag{9.20}$$

Minimizarea erorii pătratice conduce la:

$$\begin{aligned} E\left\{(y_{k+m} - \hat{y})^2\right\} &= E\left\{\left(F(q^{-1}) v_{k+m}\right)^2\right\} + E\left\{\left[\frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})} y_k - \hat{y}\right]^2\right\} + \\ &+ 2E\left\{\left[F(q^{-1}) v_{k+m}\right] \cdot \left[\frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})} y_k - \hat{y}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{9.21}$$

Ultimul termen în (9.21) este egal cu zero, deoarece v_{k+m}, v_{k+m-1}, ..., v_{k+1} au valoarea medie egală cu zero și sunt independente de y_k, y_{k-1}, ...

Minimul expresiei (9.21) se obține pentru:

$$\hat{y} = \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})} y_k \tag{9.22}$$

Astfel, predictorul optimal este descris de (9.22) şi reprezintă un sistem liniar, iar eroarea de predicţie este:

$$e_{k+m|k}=F(q^{-1})v_{k+m} \tag{9.23}$$

Rezultatul obţinut poate fi definit prin teorema:

TEOREMA 9.1 – Predicţie optimală: *Predictorul optimal în m tacte pentru un proces stocastic generat de (9.11), unde polinomul $C(z)$ are toate zerourile în discul unitar şi v_k este o secvenţă de variabile aleatoare independente, este:*

$$\hat{y}=\hat{y}_{k+m|k}=\frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})}y_k,$$

unde $G(q^{-1})$ se obţine din descompunerea:

$$C(q^{-1})=A(q^{-1})F(q^{-1})+q^{-m}G(q^{-1}) \tag{9.24}$$

şi are semnificaţia dată în (9.17).

De remarcat faptul că aproximaţia conform căreia v_i şi v_j sunt independente pentru $i \neq j$ este esenţială pentru ca ultimul termen din (9.21) să fie egal cu zero şi, astfel, cel mai bun predictor este liniar.

Varianţa erorii de predicţie este dată de relaţia:

$$E\left\{\hat{e}^2_{k+m|k}\right\}=\sigma^2\left(1+f_1^2+\cdots+f_{m-1}^2\right) \tag{9.25}$$

ceea ce evidenţiază cât de bine poate fi predictată ieşirea y_k pe diferite orizonturi de timp.

Pentru obţinerea polinoamelor $F(q^{-1})$ şi $G(q^{-1})$ se poate rezolva ecuaţia diofantică:

$$C(q^{-1})=A(q^{-1})F(q^{-1})+q^{-m}G(q^{-1})$$

obţinând cu uşurinţă coeficienţii f_i, g_j din sistemul de ecuaţii algebrice:

$$\begin{aligned}
c_1 &= a_1 + f_1\\
c_2 &= a_2 + a_1 f_1 + f_2\\
&\dots\dots\dots\dots\\
c_{m-1} &= a_{m-1} + a_{m-2} f_1 + \cdots + a_1 f_{m-2} + f_{m-1}\\
c_m &= a_m + a_{m-1} f_1 + \cdots + a_1 f_{m-1} + g_0\\
c_{m+1} &= a_{m-1} + a_m f_1 + \cdots + a_1 f_{m-1} + g_1\\
&\dots\dots\dots\dots\\
c_n &= a_n + a_{n-1} f_1 + \cdots + a_{n-m+1} f_{m-1} + g_{n-m}\\
&\dots\dots\dots\dots\\
0 &= a_n f_{n-1} + g_{n-1}
\end{aligned} \tag{9.26}$$

Exemplul 9.1:

Considerăm sistemul:

$$y_k=\frac{1-0.3q^{-1}+0.4q^{-2}}{1-q^{-1}+0.5q^{-2}}v_k$$

unde v_k are varianţa egală cu unitatea.

Se cere a determina predictorul optim pentru trei tacte.

Identitatea (9.24) are în acest caz forma:

$$1-0.3q^{-1}+0.4q^{-2}=\left(1+f_1q^{-1}+f_2q^{-2}\right)\left(1-q^{-1}+0.5q^{-2}\right)+q^{-3}\left(g_0+g_1q^{-1}\right)$$

$$1-0.3q^{-1}+0.4q^{-2}=1+f_1q^{-1}+f_2q^{-2}-q^{-1}-f_1q^{-2}-f_2q^{-3}+$$
$$+0.5q^{-2}+0.5f_1q^{-3}+0.5f_2q^{-4}+g_0q^{-3}+g_1q^{-4}$$

$$-0.3=f_1-1 \rightarrow f_1=0.7$$

$$0.4=f_2-f_1+0.5 \rightarrow f_2=0.6$$

$$0=-f_2+0.5f_1+g_0 \rightarrow g_0=+0.25$$

$$0=0.5f_2+g_1 \rightarrow g_1=-0.3$$

iar polinoamele $F(q^{-1})$ şi $G(q^{-1})$ sunt:

$$F(q^{-1})=1+0.7q^{-1}+0.6q^{-2}$$

$$G(q^{-1})=0.25-0.3q^{-1}.$$

Predictorul optimal în trei tacte este:

$$\hat{y}_{k+3|k}=\frac{0.25-0.3q^{-1}}{1-0.3q^{-1}+0.4q^{-2}}y_k$$

9.2.2. Sinteza legii de reglare de minimă varianţă

Considerăm că polinomul $B(z)$ are toate zerourile în discul unitate iar $C(z)$, de asemenea, este stabil.

Modelul procesului are forma generală:

$$y_k=\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u_{k-d}+\frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}v_k \tag{9.27}$$

unde $d=gradA-gradB>0$, iar $gradA=gradC=n$.

Ieşirea predictată pe $d+1$ tacte poate fi scrisă din (9.22) şi (9.24), sub forma:

$$y_{k+d+1}=\frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}v_{k+d+1}+\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u_{k+1}$$

sau

$$y_{k+d+1}=F(q^{-1})v_{k+d+1}+\frac{G(q^{-1})}{A(q^{-1})}v_k+\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u_{k+1}. \qquad (9.28)$$

Primul termen din (9.28) este independent de datele disponibile la momentul k şi, de asemenea, independent de termenul al doilea şi al treilea. Cel de al doilea termen poate fi calculat exact pe baza datelor disponibile ţinând seama de (9.27):

$$v_k=\frac{A(q^{-1})}{C(q^{-1})}y_k-q^{-d}\frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})}u_k \qquad (9.29)$$

Folosind expresia (9.29) în (9.28) se obţine:

$$y_{k+d+1}=F(q^{-1})v_{k+d+1}+\frac{G(q^{-1})}{A(q^{-1})}y_k-q^{-d-1}\frac{B(q^{-1})G(q^{-1})}{A(q^{-1})C(q^{-1})}u_k+\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u_{k+1}$$

sau

$$y_{k+d+1}=F(q^{-1})v_{k+1}+\frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})}y_k+\frac{B(q^{-1})F(q^{-1})}{C(q^{-1})}u_{k+1} \qquad (9.30)$$

Calculul varianţei ieşirii y_{k+d+1} conduce la:

$$E\{y_{k+d+1}^2\}=E\{(F(q^{-1})v_{k+d+1})\}+E\left\{\left(\frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})}y_k+\frac{B(q^{-1})F(q^{-1})}{C(q^{-1})}u_{k+1}\right)^2\right\} \qquad (9.31)$$

ţinând seama că $v_{k+d+1}, \ldots, v_{k+1}$ sunt independente de $y_k, y_{k-1}, \ldots$,şi u_k, $u_{k-1}, \ldots$.

Deoarece ultimul termen în (9.31) este pozitiv, urmează că:

$$E\left\{y_{k+d+1}^2\right\}\geq\left(1+f_1^2+\ldots+f_d^2\right)\sigma^2$$

iar egalitatea se obţine dacă:

$$u_k^0=-\frac{G(q^{-1})}{qB(q^{-1})F(q^{-1})}y_k \qquad (9.32)$$

care reprezintă comanda optimală de minimă varianţă.

Rezultatul poate fi rezumat în următoarea teoremă.

TEOREMA 9.2 – Reglare de minimă varianţă: *Considerăm un proces descris prin (9.27), unde v_k este o secvenţă de variabile aleatoare independente, de medie egală cu zero şi deviaţie egală cu σ. Polinoamele $B(z)$ şi $C(z)$ au zerourile în interiorul discului unitate. Legea de reglare de minimă varianţă este dată de (9.32), unde polinoamele $G(q^{-1})$ şi $F(q^{-1})$*

sunt date de (9.24) cu $m=d+1$. Această lege de reglare dă ieşirea în regim staţionar:

$$y_k=F(q^{-1})v_k=v_k+f_1v_{k-1}+\cdots+f_dv_{k-d}$$

a cărui varianţă este:

$$\text{var}[y_k]=E(y_{k+d+1}^2)=\sigma^2(1+f_1^2+\cdots+f_d^2).$$

Rezultatul obţinut se bazează pe teorema 9.1 şi pe faptul că v_i şi v_j sunt independente (necorelate) pentru $i\neq j$. Strategia de minimă varianţă se obţine prin predicţia ieşirii pe un orizont egal cu d tacte şi alegând acea comandă care egalează predicţia cu ieşirea dorită. Problema de control stocastic poate astfel fi separată în două probleme, una de predicţie optimală stocastică şi una de control optimal deterministic. Teorema 9.2 poate fi interpretată ca o teoremă de separare[6].

Eroarea de reglare este o medie alunecătoare de ordin egal cu $(d-1)$, şi deci pentru argumente mai mari de $(d-1)$ aceasta este egală cu zero.

De remarcat faptul că prin utilizarea legii de reglare de minimă varianţă, zerourile procesului se compensează.

Exemplul 9.2:

Considerăm sistemul [6]:

$$y_k=\frac{1+0.5q^{-1}}{1-1.7q^{-1}+0.7q^{-2}}q^{-2}u_k+\frac{1-0.9q^{-1}}{1-1.7q^{-1}+0.7q^{-2}}v_k.$$

Prin divizarea polinoamelor $q^{d-1}C(q)$ la $A(q)$ se obţin polinoamele:

$$F(q)=q+0.8$$

şi

$$G(q)=0.66q^2-0.56q$$

sau

$$F(q^{-1})=1+08q^{-1}$$

$$G(q^{-1})=0.66-0.56q^{-1}.$$

Legea de reglare de minimă varianţă este:

$$u_k=-\frac{0.66-0.56q^{-1}}{(1+0.5q^{-1})(1+0.8q^{-1})}y_k$$

iar varianţa ieşirii este:

$$\text{var}[y_k]=E\{y_k^2\}=1+(0.8)^2=1.64 \text{ pentru } \sigma=1.$$

Legea de reglare de minimă varianţă poate fi interpretată în funcţie de rezultatele obţinute prin procedura de alocare de poli.

Prin utilizarea legii de reglare de minimă varianță din (9.27) și (9.32) se obține:

$$\begin{bmatrix} A(q^{-1}) & -B(q^{-1})q^{-d} \\ G(q^{-1}) & qF(q^{-1})B(q^{-1}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_k \\ u_k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C(q^{-1}) \\ 0 \end{bmatrix}v_k \tag{9.33}$$

Polinomul caracteristic al sistemului închis este dat de determinantul matricei din partea dreapta relației (9.33). Astfel

$$qA(q^{-1})F(q^{-1})B(q^{-1})+G(q^{-1})B(q^{-1})q^{-d}=B(q^{-1})C(q^{-1}) \tag{9.34}$$

dacă ținem seama de (9.24).

Strategia de conducere de minimă varianță poate fi interpretată ca o proiectare bazată pe alocare de poli, unde polii sunt plasați la zerourile date de (9.34). Această similaritate poate fi evidențiată dacă legea de reglare se scrie sub forma:

$$u_k=-\frac{G(q^{-1})}{qB(q^{-1})F(q^{-1})}y_k=-\frac{S(q^{-1})}{R(q^{-1})}y_k \tag{9.35}$$

unde $S(q^{-1})=G(q^{-1})$ și $R(q^{-1})=qB(q^{-1})F(q^{-1})$.

Ecuația caracteristică a sistemului închis este:

$$A(q^{-1})R(q^{-1})+B(q^{-1})S(q^{-1})q^{-d}=C(q^{-1})B(q^{-1})$$

care reprezintă un caz special al ecuației diofantice, când $B^{+}=B$, cu $\alpha_c=qB(q^{-1})$ și $\alpha_e=C(q^{-1})$.

Într-adevăr, dacă se consideră $S(q^{-1})=G(q^{-1})$ și $R(q^{-1})=qB(q^{-1})F(q^{-1})$, ecuația caracteristică va căpăta forma:

$$qA(q^{-1})B(q^{-1})F(q^{-1})+B(q^{-1})G(q^{-1})q^{-d}=$$
$$=B(q^{-1})\left[qA(q^{-1})F(q^{-1})+G(q^{-1})q^{-d}\right]=$$
$$=B(q^{-1})q\left[A(q^{-1})F(q^{-1})+G(q^{-1})q^{-d-1}\right]=qB(q^{-1})C(q^{-1})$$

întrucât $C(q^{-1})=A(q^{-1})F(q^{-1})+q^{-d-1}G(q^{-1})$.

Acest rezultat este obținut pentru cazul particular când $B(q^{-1})=B^{+}(q^{-1})$, adică toate zerourile polinomului $B^{-1}(z)$ sunt poziționate în exteriorul discului de rază unitară.

9.3. Algoritmi de minimă varianță cu penalizarea comenzii

Considerăm procesul caracterizat prin modelul:

$$y_k=\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u_{k-d}+\frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}v_k$$

unde $B(q^{-1})=b_1q^{-1}+\dots+b_nq^{-n}$ are toate zerourile în exteriorul discului unitate.

Criteriul de performanță atașat problemei de sinteză a algoritmului de reglare de minimă varianță și penalizare a comenzii are forma:

$$I=E\left\{y_{k+d+1}^2+\rho u_k^2\right\}. \tag{9.36}$$

Pentru rezolvarea problemei de sinteză folosind acest criteriu de performanță parcurgem cele două etape: predicția ieșirii și sinteza legii de reglare.

Ținând seama de modelul procesului, putem scrie ieșirea sub forma:

$$y_{k+d+1}=\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u_{k+1}+\frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}v_{k+d+1} \tag{9.37}$$

sau, dacă ținem seama de descompunerea:

$$\frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}=F(q^{-1})+q^{-d-1}\frac{G(q^{-1})}{A(q^{-1})},$$

unde polinoamele $F(q^{-1})$ și $G(q^{-1})$ au forma:

$$F(q^{-1})=1+f_1q^{-1}+f_2q^{-2}+\dots+f_dq^{-d}$$
$$G(q^{-1})=g_0+g_1q^{-1}+\dots g_{n-1}q^{-n-1},$$
$$y_{k+d+1}=\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u_{k+1}+F(q^{-1})v_{k+d+1}+\frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}v_k. \tag{9.38}$$

Ținând seama că polinoamele $B(z)$ și $C(z)$ au zerourile în interiorul discului unitar, v_k se poate calcula cu relația:

$$v_k=\left(y_k-\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u_{k-d}\right)\frac{A(q^{-1})}{C(q^{-1})}. \tag{9.39}$$

Introducând (9.39) în (9.38) se obține:

$$y_{k+d+1}=\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u_{k+1}+\frac{G(q^{-1})}{A(q^{-1})}\left[y_k-\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}q^{-d}u_k\right]\frac{A(q^{-1})}{C(q^{-1})}+Fv_{k+d+1} \tag{9.40}$$

Criteriul de performanță (9.36) poate fi pus în acest caz sub forma:

$$I=E\left\{\left[\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u_{k+1}-\frac{G(q^{-1})B(q^{-1})q^{-d-1}}{A(q^{-1})C(q^{-1})}u_{k+1}+\frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})}y_k+F(q^{-1})v_{k+d+1}\right]^2+\rho u_k^2\right\} \tag{9.41}$$

sau dacă se consideră identitatea polinomială:

$$C\left(q^{-1}\right)=F\left(q^{-1}\right)A\left(q^{-1}\right)+q^{-d-1}G\left(q^{-1}\right),$$

$$I=E\left\{\left[\frac{B(q^{-1})F(q^{-1})}{C(q^{-1})}u_{k+1}+\frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})}y_k+F(q^{-1})v_{k+d+1}\right]^2+\rho u_k^2\right\}. \quad (9.42)$$

Dacă ţinem seama că $F\left(q^{-1}\right)v_{k+d+1}$ conţine informaţii viitoare, necorelate cu u_k, u_{k-1}, ..., y_k, y_{k-1}, ..., (9.42) se poate scrie sub forma:

$$I=\left[\frac{B(q^{-1})F(q^{-1})}{C(q^{-1})}u_{k+1}+\frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})}y_k\right]^2+E\left\{F(q^{-1})v_{k+d+1}\right\}+\rho u_k^2.$$

Valoarea minimă a acestui indice de performanţă se obţine pentru $\frac{\partial I}{\partial u_k}=0$, respectiv:

$$b_1\left[\frac{B(q^{-1})F(q^{-1})}{C(q^{-1})}u_{k+1}+\frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})}y_k\right]+\rho u_k=0$$

sau

$$u_k^0=-\frac{G(q^{-1})}{qB(q^{-1})F(q^{-1})+\frac{\rho}{b_1}C(q^{-1})}y_k. \quad (9.43)$$

Pentru cazul în care se alege $\rho=0$ se obţine comanda optimală sub forma:

$$u_k^0=-\frac{G(q^{-1})}{qB(q^{-1})F(q^{-1})}y_k \quad (9.44)$$

ceea ce evidenţiază faptul că algoritmul are aceeaşi formă ca în cazul precedent.

Introducând comanda u_k în ecuaţia ce defineşte modelul procesului:

$$y_k=\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u_{k-d}+\frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}v_k$$

se obţine:

$$y_k=-\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}q^{-d}\frac{G(q^{-1})}{qB(q^{-1})F(q^{-1})}y_k+\frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}v_k$$

sau

$$y_k\left[1+\frac{G(q^{-1})q^{-d-1}}{A(q^{-1})F(q^{-1})}\right]=\frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}v_k. \quad (9.45)$$

Ieşirea sistemului în funcţie de zgomotul v_k se calculează astfel cu relaţia:

$$y_k=\frac{C(q^{-1})F(q^{-1})}{A(q^{-1})F(q^{-1})+G(q^{-1})q^{-d-1}}v_k \quad (9.46)$$

sau, dacă ţinem seama de descompunerea $C=AF+q^{-d-1}G$, se obţine:

$$y_k=F\left(q^{-1}\right)v_k,$$

ceea ce ilustrează că ieşirea este o medie alunecătoare

$$y_k=v_k+f_1v_{k-1}+f_2v_{k-2}+\cdots+f_dv_{k-d}.$$

Varianţa ieşirii în acest caz este:

$$\operatorname{var}[y_k]=E\left\{y_k^2\right\}=\sigma^2\left[1+f_1^2+\cdots+f_d^2\right]. \quad (9.47)$$

Este de remarcat faptul că valori mari ale timpului mort conduc la creşteri ale varianţei variabilei y_k.

Utilizarea algoritmului de minimă varianţă în forma determinată nu asigură comportarea dorită în raport cu referinţa. Astfel, eroarea în regim staţionar este diferită de zero pentru o referinţă de tip treaptă, în cazul în care procesul este de tip proporţional.

9.4. Algoritmi de minimă varianţă modificaţi

Pentru a asigura eroarea staţionară nulă pentru referinţă treaptă unitară, se pot proiecta algoritmi de reglare de minimă varianţă modificaţi, astfel încât să se asigure pentru sistemul de reglare atât varianţa minimă a ieşirii în prezenţa perturbaţiilor stocastice, cât şi eroarea staţionară nulă pentru intrare treaptă.

Cea mai simplă metodă pentru obţinerea erorii staţionare egală cu zero este aceea de a adăuga algoritmilor de minimă varianţă o componentă integrală.

Astfel, algoritmul de reglare în condiţiile includerii unui compensator de tip PI este definit prin produsul:

$$H_R\left(z^{-1}\right)=H_{RMV}\left(z^{-1}\right)\cdot H_{PI}\left(z^{-1}\right)$$

unde $H_{RMV}\left(z^{-1}\right)$ reprezintă funcţia de transfer pentru algoritmul de minimă varianţă, iar

$$H_{PI}(z^{-1})=1+\frac{K_i}{z-1}=\frac{q_0+q_1z^{-1}}{1+p_1z^{-1}} \quad (9.48)$$

reprezintă algoritmul PI cu $q_0=1$, $q_1=K_i-1$ şi $p_1=-1$. Pentru $K_i=0$ rezultă comportare proporţională, iar pentru $K_i=1$ rezultă comportare integrală.

Este uşor de remarcat faptul că includerea compensatorului de tip PI ($K_i \neq 0$) în structura regulatorului de minimă varianţă, deşi asigură comportarea dorită în regim staţionar pentru referinţă treaptă, comportarea în raport cu semnalele perturbatoare stocastice este suboptimală (varianţa ieşirii nu mai este minimă).

O altă posibilitate pentru asigurarea comportării dorite a sistemului de reglare, atât în raport cu referinţa, cât şi cu semnalele stocastice ce acţionează asupra procesului, este aceea de a proiecta algoritmul de reglare astfel încât să se asigure minimul unui indice de performanţă de forma (9.7).

Pentru un model al procesului de forma:

$$y_k = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u_{k-d} + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} v_k$$

criteriul de performanţă ce se cere minimizat are forma:

$$I = E\left\{ \left(y_{k+d+1} - r_k\right)^2 + \rho\left(u_k - U_s\right)^2 \right\} \tag{9.49}$$

unde U_s reprezintă valoarea de regim staţionar a comenzii corespunzătoare regimului staţionar de funcţionare fixat prin r_k. Punând condiţia $y_{st} = r_k = 1$, rezultă cu uşurinţă expresia comenzii U_s:

$$U_s = \frac{A(1)}{B(1)} r_k = \frac{1}{K_c} r_k \tag{9.50}$$

întrucât $K_c = \lim\limits_{z \to 1} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$ reprezintă coeficientul de transfer al procesului.

Pentru proiectarea algoritmului de reglare vom proceda într-o manieră similară ca în paragraful anterior pentru proiectarea algoritmului de minimă varianţă pentru procese cu timp mort [57].

Ieşirea predictată pe orizontul $(d+1)$ este dată de relaţia:

$$\hat{y}_{k+d+1} = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u_{k+1} + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} v_{k+d+1} \tag{9.51}$$

sau, dacă ţinem seama de descompunerea:

$$\frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} = F(q^{-1}) + q^{-d-1} \frac{G(q^{-1})}{A(q^{-1})} \tag{9.52}$$

se obţine:

$$\hat{y}_{k+d+1} = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u_{k+1} + F(q^{-1}) v_{k+d+1} + \frac{G(q^{-1})}{A(q^{-1})} v_k . \tag{9.53}$$

Dacă introducem notaţiile:

$$y^* = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u_{k+1} + \frac{G(q^{-1})}{A(q^{-1})} v_k \quad \text{şi}$$

$$v_f = F(q^{-1}) v_{k+d+1} \tag{9.54}$$

criteriul de performanţă (9.49) poate fi pus sub forma:

$$I = E\left\{ \left(y^* + v_f - r_k\right)^2 + \rho\left(u_k - U_s\right)^2 \right\}$$

sau:

$$I = E\left\{ \left(y^* - r_k\right)^2 \right\} + E\left\{ v_f^2 \right\} + 2E\left\{ \left(y^* - r_k\right) v_f \right\} + E\left\{ \rho\left(u_k - U_s\right)^2 \right\}. \tag{9.55}$$

Dacă ţinem seama că v_f reprezintă informaţii viitoare necunoscute care nu sunt corelate cu ($y^* - r_k$), criteriul de performanţă poate fi pus sub forma:

$$I = \left[\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u_{k+1} + \frac{G(q^{-1})}{A(q^{-1})} \left(y_k - \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u_{k-d} \right) \frac{A(q^{-1})}{C(q^{-1})} - r_k \right]^2 + \\ + E\left\{ v_f^2 \right\} + \rho\left[u_k - U_s\right]^2 \tag{9.56}$$

Pentru calculul comenzii optimale, valoarea minimă a funcţiei I în raport cu u_k se obţine pentru $\frac{\partial I}{\partial u_k} = 0$.

Astfel, rezolvând ecuaţia $\frac{\partial I}{\partial u_k} = 0$, respectiv:

$$b_1 \left[\left(\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} q - \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})} \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} q^{-d} \right) u_k + y_k \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})} - r_k \right] + \\ + \rho\left[u_k - \frac{1}{K_c} r_k \right] = 0 \tag{9.57}$$

se obţine comanda optimală.

Ecuaţia (9.57) poate fi pusă, după efectuarea unor calcule elementare, sub forma:

$$\left[B(q^{-1}) C(q^{-1}) q - G(q^{-1}) B(q^{-1}) q^{-d} + \frac{\rho}{b_1} A(q^{-1}) C(q^{-1}) \right] u_k + \\ + G(q^{-1}) A(q^{-1}) y_k - C(q^{-1}) A(q^{-1}) \left(1 + \frac{\rho}{b_1} \frac{1}{K_c} \right) r_k = 0 \tag{9.58}$$

Dacă ţinem seama de identitatea polinomială:

$$C(q^{-1}) - G(q^{-1}) q^{-d-1} = F(q^{-1}) A(q^{-1})$$

rezultă cu uşurinţă din (9.48) legea de comandă optimală ce asigură valoarea minimă a indicelui de performanţă (9.55):

$$u_k^0 = -\frac{G(q^{-1})}{\frac{\rho}{b_1}C(q^{-1}) + B(q^{-1})F(q^{-1})q} y_k + \frac{C(q^{-1})}{\frac{\rho}{b_1}C(q^{-1}) + B(q^{-1})F(q^{-1})q}\left(1+\frac{\rho}{b_1}\frac{1}{k_c}\right) r_k. \qquad (9.59)$$

Se poate observa cu uşurinţă că strategia de reglare optimală în acest caz are două grade de libertate şi poate fi pusă sub forma:

$$u_k^0 = -\frac{S(q^{-1})}{R(q^{-1})} y_k + \frac{T(q^{-1})}{R(q^{-1})} r_k \qquad (9.60)$$

unde polinoamele $R(q^{-1})$, $S(q^{-1})$ şi $T(q^{-1})$ au semnificaţia:

$$R(q^{-1}) = \frac{\rho}{b_1}C(q^{-1}) + B(q^{-1})F(q^{-1})q$$
$$S(q^{-1}) = G(q^{-1}) \qquad (9.61)$$
$$T(q^{-1}) = C(q^{-1})\left[1+\frac{\rho}{b_1}\frac{1}{k_c}\right].$$

Structura sistemului de reglare cu regulatorul optimal proiectat este prezentată în figura 9.2.

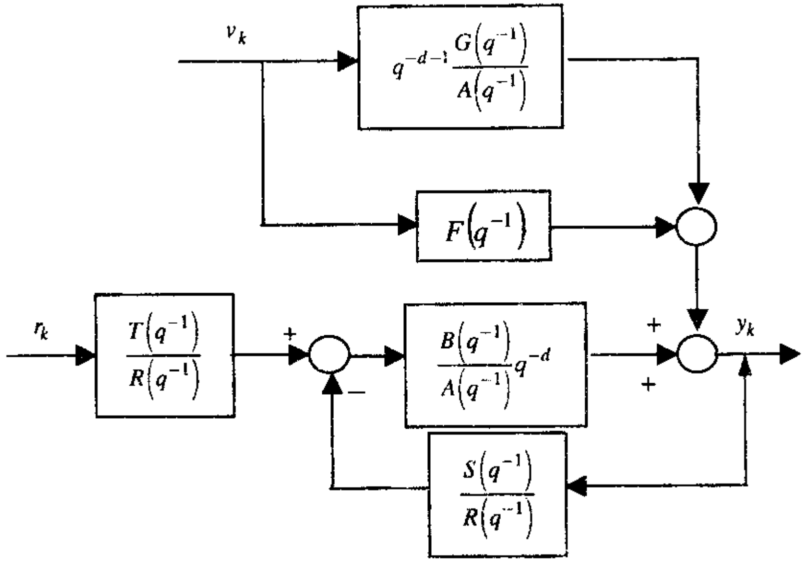


Fig. 9.2

9.5. Sinteza legii de comandă optimală după stare pentru procese stocastice

Se consideră că procesele sunt caracterizate prin modele de stare, iar perturbaţiile stocastice acţionează atât asupra stării, cât şi asupra ieşirii măsurate.

9.5.1. Sinteza legii de comandă optimală

Considerăm modelul de stare:

$$x_{k+1} = \Phi x_k + \Gamma u_k + v_k \qquad (9.62)$$

$$y_k = C x_k + w_k \qquad (9.63)$$

cu $x_0 \in R^n$, $E\{x_0\} = \bar{x}_0$ şi $E\left\{[x_0 - \bar{x}_0]\,[x_0 - \bar{x}_0]^T\right\} = R_0$.

Matricele de covarianţă R_0 şi $R_1 = E\{v_k v_k^T\}$ sunt semipozitiv definite şi $R_2 = E\{w_k w_k^T\}$ este o matrice pozitiv definită.

Semnalele perturbatoare v_k şi w_k sunt secvenţe de vectori independenţi identic distribuiţi cu valori medii zero.

Criteriul de performanţă ataşat problemei de sinteză a legii de comandă optimală are forma:

$$I = E\left\{x_N^T S x_N + \sum_{k=0}^{N-1}\left(x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k\right)\right\} \qquad (9.64)$$

unde S şi Q sunt matrice simetrice semipozitiv definite, iar R este o matrice simetrică pozitiv definită.

Problema de sinteză a legii de comandă poate fi formulată astfel: dându-se (9.62) se cere a determina o strategie de comandă, astfel încât criteriul de performanţă (9.64) să aibă valoarea minimă.

Pentru rezolvarea acestei probleme vom aplica principiul optimalităţii [6, 15, 46] cu particularităţile impuse de natura stocastică a variabilelor, care intervin în modelul (9.62) şi (9.63).

Astfel, comanda optimală în acest caz are aceeaşi formă ca în cazul determinist:

$$u_k^0 = -F_k \cdot x_k \qquad (9.65)$$

unde matricea F_k se calculează cu ajutorul ecuaţiei matriceale:

$$F_k = \left[R + \Gamma^T P_{k+1}\Gamma\right]^{-1}\Gamma^T P_{k+1}\Phi \qquad (9.66)$$

iar P_k este o matrice simetrică semipozitiv definită, ce se obţine prin rezolvarea ecuaţiei recurente:

$$P_k=\Phi^T P_{k+1}\Phi+Q-F_k^T\left[R+\Gamma^T P_{k+1}\Gamma\right]F_k \tag{9.67}$$

sau

$$P_k=Q+F_k^T RF_k+(\Phi-\Gamma F_k)^T P_{k+1}(\Phi-\Gamma F_k) \tag{9.68}$$

cu condiţia iniţială $P(N)=S$.

Acest rezultat se obţine cu uşurinţă dacă scriem (9.64) sub forma:

$$E\left\{x_N^T Sx_N+\sum_{k=0}^{N-1}\left(x_k^T Qx_k+u_k^T Ru_k\right)\right\}=E\left\{\sum_{s=0}^{k-1}x_s^T Qx_s+u_s^T Ru_s\right\}+ +\left\{x_N^T Sx_N+\sum_{s=k}^{N-1}\left[x_s^T Qx_s+u_s^T Ru_s\right]\right\} \tag{9.69}$$

şi, ţinând seama că primul termen nu depinde de u_k, u_{k-1}, u_{N-1}, minimul acestui indice de performanţă se reduce la minimul celui de al doilea termen din expresia (9.69):

$$\min_{u_k} I=\min_{u_k} E\left\{x_N^T Sx_N+\sum_{s=k}^{N-1}\left[x_s^T Qx_s+u_s^T Ru_s\right]\right\}=E\{V(x_k,k)\} \tag{9.70}$$

unde $V(x_k,k)$ este dată de relaţia:

$$V(x_k,k)=\min_{u_k,\dots,u_{N-1}} E\left\{x_N^T Sx_N+\sum_{s=k}^{N-1}\left[x_s^T Qx_s+u_s^T Ru_s\right]\right\}$$

sau

$$V(x_k,k)=\min_{u_k} E\left\{x_k^T Qx_k+u_k^T Ru_k \quad +V((x_{k+1},k+1)|x_k)\right\}= = \min_{u_k}\left[x_k^T Qx_k+u_k^T Ru_k \quad +E\{V((x_{k+1},k+1)|x_k)\}\right] \tag{9.71}$$

iar

$$V(x_{k+1},k+1)=\min E\left\{x_N^T Sx_N+\sum_{s=k+1}^{N-1}\left(x_s^T Qx_s+u_s^T Ru_s\right)|\,x_{k+1}\right\}. \tag{9.72}$$

Pentru $k=N$ se obţine:

$$V(x,N)=\min_{u_k} E\left\{x_N^T Sx_N\,|x_k\right\}=x^T Sx. \tag{9.73}$$

Această ecuaţie dă condiţia iniţială pentru (9.71).

Presupunem că soluţia ecuaţiei funcţionale (9.71) cu condiţia iniţială (9.73) este o formă pătratică:

$$V(x_k,k)=x_k^T P_k x_k+h_k \tag{9.74}$$

unde P_k este o matrice pătratică semipozitiv definită.

Similar, definim funcţionala $V(x_{k+1},k+1)$:

$$V(x_{k+1},k+1)=x_{k+1}^T P_{k+1}x_{k+1}+h_{k+1} \tag{9.75}$$

Pentru a evalua funcţionala (9.71), trebuie mai întâi a determina distribuţia condiţională a vectorului x_{k+1} care pentru (9.62) are o medie $(\Phi x_k+\Gamma u_k)$ şi o covarianţă egală cu R_1.

Astfel:

$$E\{V((x_{k+1},k+1)|\,x_k)\}=(\Phi x_k+\Gamma u_k)^T P_{k+1}(\Phi x_k+\Gamma u_k)+t_r R_1 P_{k+1}+h_{k+1} \tag{9.76}$$

întrucât pentru x_k normal cu media m şi covarianţa R_1 [6]

$$E\{x^T Px\}=m^T Pm+t_r R_1 P.$$

Introducând (9.76) şi (9.75) în (9.71) se obţine:

$$V(x_k,k)=\min_{u_k}\left\{x_k^T Qx_k+u_k^T Ru_k+(\Phi x_k+\Gamma u_k)^T P_{k+1}(\Phi x_k+\Gamma u_k)+t_r R_1 P_{k+1}+h_{k+1}\right\}$$

sau, dacă introducem comanda optimală (9.65), se obţine:

$$V(\dot{x}_k,k)=x_k^T\left[Q+F^T RF+(\Phi-\Gamma F)^T P_{k+1}(\Phi-\Gamma F)\right]x_k+ +t_r R_1 P_{k+1}+h_{k+1} \tag{9.77}$$

unde:

$$F=F_k=\left[R+\Gamma^T P_{k+1}\Gamma\right]^{-1}.\Gamma^T P_{k+1}\Phi$$

iar ecuaţia recurentă pentru calculul matricei P_k se obţine imediat din identitatea relaţiilor (9.74) cu (9.77):

$$P_k=\Phi^T P_{k+1}\Phi+Q-F^T\left[R+\Gamma^T P_{k+1}\Gamma\right]F \tag{9.78}$$

$$h_k=h_{k+1}+t_r R_1 P_{k+1}.$$

Astfel, ecuaţia recurentă (9.78) are forma precizată în (9.67).

Pentru $N\to\infty$ se obţine soluţia asimptotică ca şi în cazul deterministic (v. § 7.7).

Pentru sinteza comenzii optimale am presupus că starea procesului este accesibilă măsurării. În practică, starea trebuie reconstruită din măsurători în prezenţa perturbaţiilor stocastice.

9.5.2. Estimarea stării în prezenţa perturbaţiilor stocastice

Pentru sistemul (9.52), ecuaţia predictorului de stare este:

$$\hat{x}_k=\Phi\hat{x}_{k-1}+\Gamma u_{k-1}+L_{k-1}[y_{k-1}-C\hat{x}_{k-1}] \tag{9.79}$$

iar eroarea de estimare (predicţie) se obţine sub forma:

$$\hat{e}_k=x_k-\hat{x}_k=[\Phi-L_k C]\,\hat{e}_{k-1}+v_k-L_k w_k \tag{9.80}$$

Vom determina matricea L_k a estimatorului, astfel încât eroarea de reconstrucție a produsului scalar $a^T \hat{e}_k$ să fie minimă în sensul mediei pătratice. Vectorul a este un vector arbitrar, de dimensiuni corespunzătoare.

Dacă introducem notația:

$$S_k := E\{\hat{e}_k \hat{e}_k^T\},$$

rezultă:

$$E\{a^T \hat{e}_k \hat{e}_k^T a\} = a^T S_k a. \tag{9.81}$$

Ecuația erorii de predicție la pasul $(k+1)$, ținând seama de (9.80), are forma:

$$\hat{e}_{k+1} = (\Phi - L_k C)\hat{e}_k + v_k - L_k w_k \tag{9.82}$$

respectiv:

$$\hat{e}_{k+1} = \hat{e}_k^T (\Phi - L_k C)^T + v_k^T - w_k^T L_k^T. \tag{9.83}$$

Cu aceste elemente putem calcula media erorii la pasul $(k+1)$:

$$S_{k+1} = (\Phi - L_k C) S_k (\Phi - L_k C)^T + R_1 + L_k R_2 L^T = E\{\hat{e}_{k+1} \hat{e}_{k+1}^T\} \tag{9.84}$$

care reprezintă varianța erorii de reconstrucție.

Ecuația recurentă (9.74) poate fi pusă și sub forma:

$$S_{k+1} = \Phi S_k \Phi^T + R_1 - \Phi S_k C^T \left[R_2 + C S_k C^T\right]^{-1} C S_k \Phi^T + \\ + \left[L_k - \Phi S_k C^T \left(R_2 + C S_k C^T\right)^{-1}\right] \left[R_2 + C S_k C^T\right] * \\ * \left\{L_k - \Phi S_k C^T \left(R_2 + C S_k C^T\right)^{-1}\right\} \tag{9.85}$$

Valoarea minimă a varianței erorii de reconstrucție a stării se obține în cazul în care membrul al doilea al relației (9.85) este identic egal cu zero, respectiv dacă:

$$L_k^0 = \Phi S_k C^T \left[R_2 + C S_k C^T\right]^{-1}. \tag{9.86}$$

Matricea L_k^0 calculată cu ajutorul relației (9.86) minimizează varianța erorii de reconstrucție a stării. Predictorul optimal (filtrul Kalman) este în acest caz caracterizat prin ecuația:

$$\hat{x}_{k+1} = \Phi \hat{x}_k + \Gamma u_k + L_k^0 \left[y_k - C\hat{x}_k\right] \tag{9.87}$$

unde L_k^0 se calculează cu ajutorul relației (9.86).

Filtrul Kalman este astfel un observer asimptotic de ordinul n care dă predicția sau estimarea stării într-un mediu stocastic în condițiile în care se cunosc matricele de covarianță ale zgomotelor ce acționează pe stare v_k și la ieșire w_k.

Valoarea minimă a varianței erorii de reconstrucție a stării se obține din (9.75):

$$S_{k+1} = \Phi S_k \Phi^T + R_1 - \Phi S_k C^T \left[R_2 + C S_k C^T\right]^{-1} . C S_k \Phi^T. \tag{9.88}$$

Primul termen din (9.88) arată cum eroarea de reconstrucție la pasul k se transmite la pasul $(k+1)$ prin dinamica sistemului.

Prezența matricei R_1 în expresia varianței S_{k+1} pune în evidență efectul perturbațiilor v_k asupra varianței erorii de reconstrucție. Ultimul termen pune în evidență modul cum eroarea de reconstrucție scade, datorită informației obținute din măsurători.

De notat că S_k nu depinde de observații, putând fi precalculată în timp direct și memorată în calculator.

Varianța erorii de reconstrucție se calculează cu ajutorul ecuației recurente:

$$S_{k+1} = \Phi S_k \Phi^T + R_1 - L_k C S_k \Phi^T \tag{9.89}$$

dacă matricea L_k este generată pas cu pas pe baza ecuației:

$$L_k^0 = \Phi S_k C^T \left[R_2 + C S_k C^T\right]^{-1}. \tag{9.90}$$

Este de remarcat faptul că matricea S_{k+1} nu depinde de vectorul constant a, ales arbitrar.

Pentru calculul matricei L_k se impune ca matricea $\left[R_2 + C S_k C^T\right]$ să fie nesingulară. Această condiție se verifică cu ușurință dacă matricea R_2 este pozitiv definită (R_2 este pozitiv definită dacă toate ieșirile sunt perturbate).

Pentru rezolvarea celor două ecuații matriceale (9.89) și (9.90) inițializăm sistemul cu $S_0 = R_0$, determinând astfel la fiecare pas matricea estimatorului. Matricea L_k este ajustată în permanență ținând seama de varianța zgomotelor v_k și w_k și de varianța erorii de reconstrucție (predicție) $\hat{e}_k$. În acest sens se poate spune că filtrul Kalman este adaptiv.

Este de remarcat faptul că soluția (9.78) este de aceeași formă cu ecuația Riccati, asociată problemelor de conducere optimală prin minimizarea unui criteriu pătratic, rezultatul în acest caz fiind matricea optimală L_k^0 a predictorului de stare.

Principala diferență față de problemele de comandă optimală constă în faptul că ecuațiile se definesc cu condiții inițiale și se rezolvă în sens normal al creșterii timpului.

În cazul în care caracteristicile zgomotelor v_k și w_k sunt invariante, după un regim tranzitoriu determinat de matricea de covarianță a stării

inițiale R_0, matricele L_k și S_k asociate predictorului optimal tind spre matricele constante L și S:

$$L=\Phi SC^T\left[R_2+CSC^T\right]^{-1} \tag{9.91}$$

$$S=[\Phi-LC]S\Phi^T+R_1 \tag{9.92}$$

În cazul în care se folosesc soluțiile asimptotice (9.91) și (9.92) pentru construcția stării $\hat{x}_k$, se impune a cunoaște media $\bar{x}_0$ a stării inițiale și matricea de covarianță R_0.

Utilizarea soluțiilor asimptotice pentru S_k și L_k^0 permite calculul off-line al matricei L și construcția stării $\hat{x}_k$ prin rezolvarea ecuației:

$$\hat{x}_k=\Phi\hat{x}_{k-1}+\Gamma u_{k-1}+L\left[y_{k-1}-C\hat{x}_{k-1}\right]. \tag{9.93}$$

Comanda optimală în acest caz este dată de ecuația:

$$u_k^0=-F.\hat{x}_k,$$

iar

$$F=\left[R+\Gamma^T P\Gamma\right]^{-1}\Gamma^T P\Phi \tag{9.94}$$

respectiv

$$P=\Phi^T P\Phi+Q-F^T\left[R+\Gamma^T P\Gamma\right]F. \tag{9.95}$$

Este de remarcat faptul că soluția asimptotică este o soluție suboptimală.

Sistemul închis cu o strategie de conducere de tipul LQG este descris prin ecuațiile:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi x_k + \Gamma u_k + v_k \\ y_k &= Cx_k + w_k \\ u_k &= -F\hat{x}_{k|k-1} \\ \hat{x}_{k+1|k} &= \Phi\hat{x}_{k|k-1} + \Gamma u_k + L\left(y_k - C\hat{x}_{k|k-1}\right). \end{aligned} \tag{9.96}$$

Dacă introducem eroarea de predicție $e_k = x_k - \hat{x}_k$, obținem:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ e_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi-\Gamma F & \Gamma F \\ 0 & \Phi-LC \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_k \\ e_k \end{bmatrix} \tag{9.97}$$

ceea ce evidențiază că dinamica sistemului închis este determinată de matricele $(\Phi-\Gamma F)$ și $(\Phi-LC)$ corespunzătoare problemei de control LQ și filtrului optimal.

În figura 9.3 se prezintă schema de implementare a regulatorului LQG.

Funcția de transfer atașată regulatorului LQG în cazul sistemelor cu o intrare și o ieșire are forma:

$$H_R(z)=-F\left[zI-\Phi+\Gamma F+LC\right]^{-1}L\equiv-\frac{S(z)}{R(z)} \tag{9.98}$$

unde: $R(z)=\det\left[zI-\Phi+\Gamma F+LC\right]$,

$gradR(z)=n$, iar

$gradS(z)<n$.

Polinomul caracteristic atașat filtrului Kalman este:

$$\alpha_F=\det\left[zI-(\Phi-LC)\right] \tag{9.99}$$

iar polii acestuia se află printre polii sistemului închis.

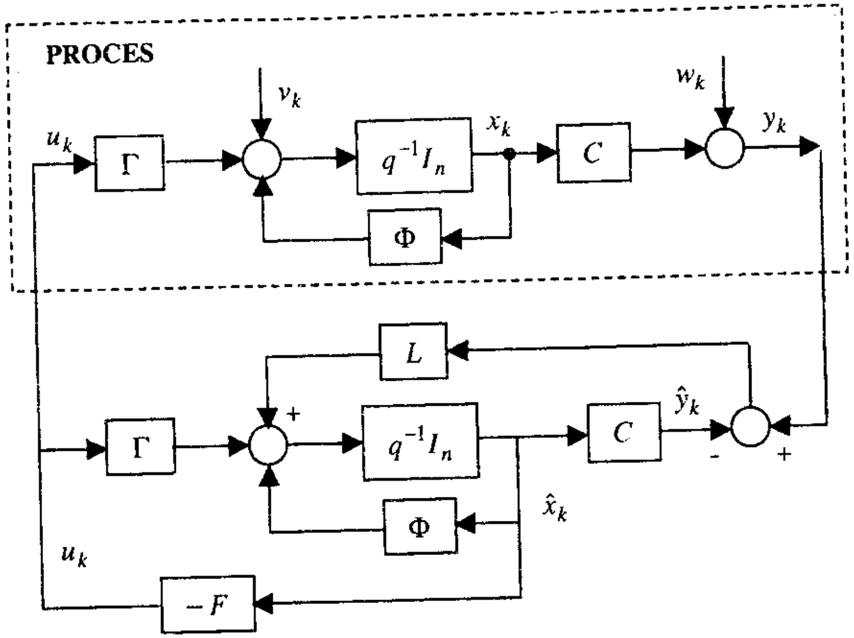


Fig. 9.3

Pentru procesul caracterizat prin cele două polinoame coprime $A(z)$ și $B(z)$, utilizarea regulatorului optimal (9.98) conduce la ecuația:

$$A(z)R(z)+B(z)S(z)=\alpha_F(z)\alpha_c(z). \tag{9.100}$$

În acest caz, polinoamele $R(z)$ și $S(z)$ pot fi obținute prin rezolvarea ecuației diofantice.

În acest caz, legea admisibilă de conducere este determinată de polinoamele $R(z)$ și $S(z)$. Pentru a nu avea întârzieri în legea de comandă, adică u_k să fie o funcție de y_k, y_{k-1}, ..., și u_{k-1}, u_{k-2}, ..., polinoamele $R(z)$ și $S(z)$ trebuie să aibă același grad. Dacă legea de comandă este o funcție de y_{k-1}, y_{k-2}, ..., u_{k-1}, u_{k-2}, ..., existând o întârziere de un tact în comandă, excesul polilor în funcția de transfer a regulatorului este egal cu unitatea.

Este evident că dimensiunea polinoamelor $R(z)$ şi $S(z)$ determină complexitatea legii de reglare.

Este de remarcat faptul că soluţia la problema LQG bazată pe modelul de stare introduce restricţii suplimentare la rezolvarea ecuaţiei diofantice (9.100).

Ecuaţia (9.98) reprezintă o interpretare polinomială a soluţiei de stare.

Regulatorul optimal obţinut pe baza modelului de stare impune $gradR(z)=n$ şi $gradS(z)<n$. Dacă $A(z)$ şi $B(z)$ sunt coprime, regulatorul optimal LQG reprezintă o soluţie unică a ecuaţiei (9.100), cu condiţia $gradS(z)<gradA(z)$.

În cazul în care procesul este caracterizat prin modele de fază neminimă sau conţine moduri necontrolabile prin comanda u_k, se impune adoptarea unor proceduri specifice de sinteză a celor două polinoame $R(z)$ şi $S(z)$. În [6] sunt prezentate particularităţile metodelor de sinteză a algoritmilor de reglare în cazul în care $B(z)$ conţine zerouri în afara cercului de rază unitară.

Problema urmăririi referinţei poate fi rezolvată în acelaşi mod ca şi în cazul determinist.

Principalele probleme ce trebuie avute în vedere la implementarea legilor de conducere LQ şi LQG sunt legate de:

- alegerea parametrilor de proiectare, matricelor de ponderare în funcţie de obiectiv şi perioada de discretizare;
- obţinerea unor modele cât mai exacte pentru proces şi perturbaţii;
- efortul de calcul numeric şi metodele de rezolvare cât mai eficiente pentru obţinerea legii de conducere.

9.6. Algoritmi de conducere predictivă

Printre tehnicile avansate de conducere a proceselor industriale, de un real succes se bucură tehnicile de conducere predictivă. Restricţiile impuse de elementele de execuţie care pot intra în saturaţie, cerinţele de menţinere a funcţionării proceselor în jurul punctului optimal de funcţionare, evitându-se astfel introducerea unor importante incertitudini de tip neliniaritate, precum şi alte restricţii care apar în conducerea unor procese apelând la algoritmi convenţionali au impus în ultimii 15 ani noi strategii de conducere cum ar fi: *Dynamic Matrix Control* (DMC), *Generalized Predictiv Control* (GPC), *Extended Horizon Adaptive Control* (EHAC), *Extended Predictive Self-Adaptive Control* (EPSAC), *Multipredictor Receding Horizon Adaptive Control* (MURHAC), *Multistep Multivariable Adaptive Control* (MUSMAR).

În cele ce urmează se prezintă algoritmul de conducere predictivă cunoscut sub denumirea *MODEL PREDICTIVE CONTROL* (MPC).

Există mai multe modalităţi de reprezentare a acestei clase de algoritmi apelând, fie la modele polinomiale, fie la modelele de stare, atât pentru procese cu o intrare şi o ieşire, cât şi pentru procese cu multiple intrări şi multiple ieşiri. Vom considera reprezentarea polinomială a obiectului condus supus acţiunii perturbaţiilor stocastice sub forma:

$$y_k=\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u_{k-d}+\frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}v_k \qquad (9.101)$$

unde v_k este zgomot alb discret, iar polinoamele $C(q^{-1})$ şi $D(q^{-1})$ se aleg sub forma: $C(q^{-1})=1+c_1q^{-1}+\cdots+c_nq^{-n}$ şi $D(q^{-1})=1-q^{-1}$.

Un asemenea model este cunoscut sub denumirea de model CARIMA (Controlled Auto-Regressive Integral Moving-Average).

Pentru sinteza legii de conducere predictivă considerăm, pentru simplificarea procedurii de sinteză, cazul particular $C(q^{-1})=1$.

Modelul matematic pe care îl adoptăm în vederea sintezei legii de conducere predictivă, în aceste condiţii, are forma:

$$A(q^{-1})y_k=B(q^{-1})u_{k-d}+\frac{v_k}{\Delta} \qquad (9.102)$$

sau

$$A(q^{-1})y_k=B(q^{-1})u_{k-1}+\frac{v_k}{\Delta} \qquad (9.103)$$

unde $\Delta=1-q^{-1}$.

Controlul predictiv presupune predictarea ieşirii procesului pe un orizont de timp precizat şi calculul comenzii care forţează sistemul de reglare spre o comportare impusă prin traiectoria de referinţă, astfel încât ieşirea predictată să fie egală cu referinţa.

Predicţia se poate realiza într-un pas, într-un număr de paşi egal cu timpul mort d sau într-un număr extins de paşi mai mare decât timpul mort.

Eficienţa utilizării unui algoritm de conducere predictivă trebuie analizată luând în consideraţie faptul că procesele pot fi caracterizate prin *modele de fază neminimă, instabile în buclă deschisă* sau *conţin poli aproape de zona de instabilitate* (roboţii industriali), *au timp mort*

necunoscut sau variabil (procese de laminare), *conțin incertitudini structurale sau/și parametrice.*

Problema sintezei legii de conducere predictivă presupune rezolvarea a două subprobleme:

- problema predicției ieșirii pe un orizont de timp precizat și
- sinteza legii de conducere optimală minimizând un criteriu pătratic.

9.6.1. Predicția ieșirii

Mai întâi admitem că modelul procesului este de forma (9.103) și extinzând rezultatul obținut în § 9.3, putem scrie identitatea:

$$1 = F_j(q^{-1})A(q^{-1})\Delta + q^{-j}G_j(q^{-1}) \tag{9.104}$$

unde $F_j(q^{-1})$ și $G_j(q^{-1})$ sunt polinoame unic definite pentru $A(q^{-1})$ și intervalul de predicție j date.

Dacă înmulțim ecuația (9.103) cu produsul $F_j(q^{-1})\Delta q^j$, se obține:

$$F_j(q^{-1})A(q^{-1})\Delta y_{k+j} = F_j(q^{-1})B(q^{-1})\Delta u_{k+j-1} + F_j(q^{-1})e_{k+j} \tag{9.105}$$

sau ținând seama de (9.104) se obține ieșirea y_{k+j}:

$$y_{k+j} = F_j(q^{-1})B(q^{-1})\Delta u_{k+j-1} + F_j(q^{-1})e_{k+j} + G_j(q^{-1})y_k . \tag{9.106}$$

Ecuația (9.106) permite construcția predictorului optimal sub forma:

$$\hat{y}_{k+j|k} = G_j(q^{-1})y_k + E_j(q^{-1})\Delta u_{k+j-1} \tag{9.107}$$

unde $E_j(q^{-1}) = F_j(q^{-1})B(q^{-1})$, întrucât toate componentele zgomotului apar pentru valori ale timpului mai mari decât k, iar polinomul $F_j(q^{-1})$ are gradul egal cu $(j-1)$.

Orizontul de predicție a ieșirii poate fi selectat în funcție de valoarea timpului mort al procesului. Dacă $j < d$, atunci $\hat{y}_{k+j|k}$ depinde în întregime de datele disponibile, iar dacă $j \geq d$ sunt necesare precizări asupra acțiunilor de conducere viitoare.

În acest din urmă caz, ținând seama de modelul (9.102) și apelând la același raționament, obținem:

$$y_{k+j} = B(q^{-1})F_j(q^{-1})\Delta u_{k+j-d} + G_j(q^{-1})y_k + F_j(q^{-1})e_{k+j} \tag{9.108}$$

și predictorul optimal:

$$\hat{y}_{k+j|k} = B(q^{-1})F_j(q^{-1})\Delta u_{k+j-d} + G_j(q^{-1})y_k \tag{9.109}$$

respectiv,

$$\hat{y}_{k+j|k} = E_j(q^{-1})\Delta u_{k+j-d} + G_j(q^{-1})y_k \tag{9.110}$$

dacă se folosește egalitatea $F_j(q^{-1})B(q^{-1}) = E_j(q^{-1})$.

9.6.2. Sinteza legii de conducere predictivă

Presupunem că se cunoaște secvența mărimilor de referință r_{k+j}, $j = 1, 2, \cdots$, care poate fi constantă sau variabilă în timp (traiectorie precizată).

Obiectivul legii de conducere predictivă este de a realiza ca ieșirea viitoare a procesului y_{k+j} să fie cât mai apropiată de r_{k+j}.

Pentru rezolvarea acestei probleme se impune parcurgerea următorilor pași:

- se selectează valoarea viitoare a referinței r_{k+j};
- se utilizează modelul de predicție pentru generarea ieșirii predictate $\hat{y}_{k+j|k}$ și se calculează eroarea $e_{k+j} = r_{k+j} - \hat{y}_{k+j|k}$. De observat că $\hat{y}_{k+j|k}$, pentru $j \geq d$, depinde de valorile viitoare ale comenzii u_{k+j}, care trebuie determinate;
- se minimizează funcția obiectiv selectată care include erorile e_{k+j} și se determină secvența valorilor viitoare ale comenzii u_{k+j};
- primul element u_k al secvenței care rezultă se reține și se aplică procesului, iar elementele vectorilor de date se actualizează pentru a fi utilizate la calculul comenzii în pasul următor [5, 46].

Pentru $j > d$, produsul $B(q^{-1})F_j(q^{-1})$ poate fi pus și sub forma:

$$B(q^{-1})F_j(q^{-1}) = R_j(q^{-1}) + q^{-(j-d+1)}\overline{R}_j(q^{-1}) \tag{9.111}$$

unde:

$$grad[R_j(q^{-1})] = j - d$$
$$grad[\overline{R}_j(q^{-1})] = n - 2 .$$

Coeficienții polinomului $R_j(q^{-1})$ sunt primii $(j-d+1)$ termeni ai răspunsului pondere al procesului, întrucât [5]:

$$\frac{q^{-d}B(q^{-1})}{A(q^{-1})} = q^{-d}B(q^{-1})\left[F_j(q^{-1}) + q^{-d}\frac{G(q^{-1})}{A(q^{-1})}\right] =$$
$$= q^{-d}R_j(q^{-1}) + q^{-(d+1)}\overline{R}_j(q^{-1}) + \frac{B(q^{-1})G_j(q^{-1})}{A(q^{-1})}q^{-j-d}$$

Ecuaţia (9.109)

$$\hat{y}_{k+j|k} = B\left(q^{-1}\right)F_j\left(q^{-1}\right)\Delta u_{k+j-d} + G_j\left(q^{-1}\right)y_k$$

poate fi scrisă, ţinând seama de (9.111), sub forma:

$$\hat{y}_{k+j|k} = R_j\left(q^{-1}\right)\Delta u_{k+j-d} + \overline{R}_j\left(q^{-1}\right)\Delta u_{k-1} + G_j\left(q^{-1}\right)y_k$$

sau

$$\hat{y}_{k+j|k} = R_j\left(q^{-1}\right)\Delta u_{k+j-d} + \overline{y}_j \qquad (9.112)$$

unde

$$\overline{y}_j = \overline{R}_j\left(q^{-1}\right)\Delta u_{k-1} + G_j\left(q^{-1}\right)y_k$$

care este o funcţie de Δu_{k-1}, Δu_{k-2}, ..., şi y_k, y_{k-1}, ...

Ieşirea la momentul $(k+j)$ depinde de semnalele de comandă viitoare dacă $j > d$ şi, în consecinţă, se impune, fie a considera semnalul de comandă constant

$$\Delta u_k = \Delta u_{k+1} = \cdots = \Delta_{k+j-d}\,.$$

fie a determina secvenţa de comandă care aduce ieşirea y_{k+d} la o valoare dorită prin minimizarea unei funcţii cost de forma:

$$I = \sum_{i=k}^{k+j} \Delta^2 u_i\,. \qquad (9.113)$$

Pentru primul caz în care se menţine constantă comanda şi ieşirea este cea dorită, adică $y_{k+j} = y^d_{k+j}$, legea de comandă se obţine rezolvând ecuaţia:

$$\left[R_j(1) + q^{-1}\overline{R}_j\left(q^{-1}\right)\right]\Delta u_k + G_j\left(q^{-1}\right)y_k \equiv y^d_{k+j}\,. \qquad (9.114)$$

Astfel, secvenţa de comandă care asigură ieşirea y^d_{k+j} este dată de relaţia:

$$\Delta u_k = \frac{u^d_{k+j} - E_j\left(q^{-1}\right)y_k}{R_j(1) + \overline{R}_j\left(q^{-1}\right)q^{-1}}\,. \qquad (9.115)$$

Această secvenţă de comandă se aplică procesului şi se reactualizează la următorul pas în funcţie de noile măsurători.

Exemplul 9.4:

Se consideră modelul procesului sub forma:

$$y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} = b_1 u_{k-1} + b_2 u_{k-2}$$

şi se cere acea lege de comandă care asigură:

$$y_{k+1} \equiv r_k\,.$$

Ieşirea la pasul $(k+1)$ este dată de relaţia:

$$y_{k+1} = b_1 u_k + b_2 u_{k-1} - a_1 y_k - a_2 y_{k-1}$$

iar din condiţia ca ieşirea predictată într-un pas să fie identică cu referinţa se obţine comanda realizabilă sub forma:

$$u_k = \frac{1}{b_1}\left[r_k + a_1 y_k + a_2 y_{k-1} - b_2 u_{k-1}\right].$$

Având în vedere că parametrii modelului trebuie estimaţi, se obţine legea de reglare predictivă în funcţie de parametrii estimaţi $\hat{a}_i$ şi $\hat{b}_j$ sub forma:

$$u_k = \frac{1}{\hat{b}_1}\left[r_k + \hat{a}_1 y_k + \hat{a}_2 y_{k-1} - \hat{b}_2 u_{k-1}\right].$$

Legea de reglare este uşor de implementat ţinând seama că informaţiile curente r_k şi y_k sunt generate la fiecare pas, iar u_{k-1} şi y_{k-1} sunt memorate.

În cel de-al doilea caz se poate adopta un criteriu de performanţă pătratic, care să asigure prin minimizare abaterea minimă a ieşirii faţă de referinţă şi efort minim de comandă. Astfel, selectăm funcţia obiectiv (criteriul de performanţă) sub forma:

$$I(N_1,\ N_2,\ N_u) = E\left\{\sum_{j=N_1}^{N_2}\left[y_{k+j} - r_{k+j}\right]^2 + \sum_{j=1}^{N_u}\rho_j \Delta^2 u_{k+j-1}\right\} \qquad (9.116)$$

unde:

N_1 – reprezintă orizontul minim de predicţie;

N_2 – reprezintă orizontul maxim de predicţie;

N_u – reprezintă orizontul de predicţie a comenzii;

ρ_j – este secvenţa de ponderare a comenzii.

Diverse valori pentru N_1, N_2 şi N_u determină diferite scheme de conducere predictivă.

Minimizarea funcţiei obiectiv (9.116), pentru un model dat al procesului, asigură obţinerea comenzii predictive generalizate. Procedura de conducere în acest caz este cunoscută sub denumirea *Conducere Predictivă Generalizată* (GPC).

Parametrul N_1 se alege de obicei egal cu 1, sau dacă este cunoscut timpul mort se alege, pentru reducerea efortului de calcul, $N_1 \geq d$.

Parametrul N_2 se alege astfel încât să fie inclus în criteriu întreg răspunsul afectat semnificativ de comanda curentă. În general se alege mai mare decât gradul polinomului $B\left(q^{-1}\right)$ şi adesea egal cu timpul de creştere al răspunsului procesului.

Din practică [5, 46, 57] rezultă că un număr relativ mare de procese pot fi conduse predictiv cu bune rezultate alegând $N_1 = 1$ şi $N_2 = 10$. Pentru orizontul de predicţie al comenzii cel mai frecvent se alege $N_u = N_2$.

Pentru sinteza secvenţei de comandă predictivă vom particulariza criteriul (9.116) alegând $N_1 = 1$, $N_2 = N_u = N$ şi $\rho_j = \rho = \text{const.}$ şi vom utiliza ecuaţia (9.108) pentru calculul ieşirii y_{k+j}.

Astfel, funcţia obiectiv capătă forma:

$$I = E\left\{\sum_{j=1}^{N}\left[y_{k+j} - r_{k+j}\right]^2 + \rho\sum_{j=1}^{N}\Delta^2 u_{k+j-1}\right\} \tag{9.117}$$

şi

$$y_{k+j} = F_j\left(q^{-1}\right)B\left(q^{-1}\right)\Delta u_{k+j-d} + G_j\left(q^{-1}\right)y_k + F_j\left(q^{-1}\right)v_{k+j}. \tag{9.118}$$

Corespunzător gamei de variaţie a parametrului j ecuaţia (9.118) se poate scrie şi sub forma:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= E_1\left(q^{-1}\right)\Delta u_{k-d} + G_1\left(q^{-1}\right)y_k + F_1\left(q^{-1}\right)v_{k+1} \\ y_{k+2} &= E_2\left(q^{-1}\right)\Delta u_{k+1-d} + G_2\left(q^{-1}\right)y_k + F_2\left(q^{-1}\right)v_{k+2} \\ &\vdots \\ y_{k+N} &= E_N\left(q^{-1}\right)\Delta u_{k+N-1-d} + G_N\left(q^{-1}\right)y_k + F_N\left(q^{-1}\right)v_{k+N} \end{aligned} \tag{9.119}$$

care ilustrează că fiecare variabilă de ieşire se calculează în funcţie de comenzi viitoare pentru $j > d$, intrări măsurate şi semnale perturbatoare viitoare.

Dacă introducem notaţiile:

$$\begin{aligned} Y &\overset{not}{=} \left[y_{k+1} \quad y_{k+2} \quad \cdots \quad y_{k+N}\right]^T \\ \Delta U &\overset{not}{=} \left[\Delta u_{k+1} \quad \cdots \quad \cdots \quad \Delta u_{k+N-d}\right]^T \\ g &\overset{not}{=} \left[G_1 y_k \quad G_2 y_k \quad \cdots \quad G_N y_k\right]^T \\ V &\overset{not}{=} \left[F_1 v_{k+1} \quad \cdots \quad \cdots \quad F_N v_{k+N}\right]^T \end{aligned} \tag{9.120}$$

atunci obţinem reprezentarea matriceală a sistemului (9.119):

$$Y = E\tilde{u} + g + V, \tag{9.121}$$

unde $\tilde{u} = \Delta U$ şi

$$E = \begin{bmatrix} e_0 & 0 & \cdots & 0 \\ e_1 & e_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{N-1} & e_{N-2} & \cdots & e_0 \end{bmatrix}.$$

Dacă timpul mort al procesului este $d > 1$, atunci primele $(d-1)$ linii ale matricei E vor fi nule.

Cu aceste notaţii şi ţinând seama că secvenţa referinţelor poate fi pusă sub forma $r = \left[r_{k+1} \quad r_{k+2} \quad \cdots \quad r_{k+N}\right]^T$, funcţia obiectiv capătă forma:

$$I = E\left\{\left[Y - r\right]^T\left[Y - r\right] + \rho\tilde{u}^T\tilde{u}\right\} \tag{9.122}$$

sau

$$I = \left\{\left[E\tilde{u} + g + V - r\right]^T\left[E\tilde{u} + g + V - r\right] + \rho\tilde{u}^T\tilde{u}\right\}. \tag{9.123}$$

De observat că I este o funcţie de valorile viitoare ale comenzii şi se determină peste toate realizările viitoare ale secvenţei necorelate staţionare $\{v_{k+j}\}$. Presupunând că $E\{v^T\tilde{u}\} = 0$, $E\{v_k\} = 0$ şi $E\{v_k^T v_k\}$ este neafectată de $\tilde{u}_k$, se obţine secvenţa de comandă optimală care minimizează (9.123).

Astfel,

$$\frac{\partial I}{\partial \tilde{u}} = 2\left[\left(E^T E + \rho I\right)\tilde{u} + E^T(g - r)\right] = 0$$

şi

$$\tilde{u} = \left[E^T E + \rho I\right]^{-1} E^T (r - g) \tag{9.124}$$

Pentru a reduce efortul de calcul pentru secvenţa de comandă dată de (9.124) se alege $N_u < N_2 = N$ şi astfel dimensiunea matricei de inversat este mai redusă [5].

În acest caz, matricea E are forma:

$$E_1 = \begin{bmatrix} e_0 & 0 & \cdots & 0 \\ e_1 & e_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{N-1} & e_{N-2} & \cdots & e_{N-N_u} \end{bmatrix} \in \Re^{N \times N_u},$$

iar secvenţa de comandă se calculează cu relaţia:

$$\tilde{u} = \left[E_1^T E_1 + \rho I\right]^{-1} E_1^T (r - g). \tag{9.125}$$

În acest caz, matricea de inversat are dimensiunea $(N_u \times N_u)$ şi, în consecinţă, efortul de calcul este mai redus ($N_u < N$).

Eficienţa utilizării comenzii predictive generalizate este esenţial determinată de particularităţile modelului procesului şi de modul de alegere al parametrilor N_1, N_2, N_u şi ρ.

Pentru cazul în care timpul mort al procesului este cunoscut exact, se alege $N_1 = d$.

În cazul în care d nu este cunoscut precis sau este variabil, N_1 poate fi ales egal cu 1, iar polinomul $B(q^{-1})$ se extinde pentru a include toate valorile posibile ale timpului mort.

Pentru procese de fază neminimă (răspuns inițial negativ), N_2 se alege, astfel încât eșantioanele ieșirii pozitive să fie incluse în funcția obiectiv. N_2 trebuie să depășească gradul polinomului $B(q^{-1})$, $N_2 > n_b$.

Orizontul de predicție al comenzii se alege în concordanță cu nivelul de complexitate al procesului condus, $N_u > 1$ și trebuie să aibă o valoare cel puțin egală cu numărul polilor instabili sau al celor care se apropie de zona de instabilitate [58].

9.6.3. Conducerea predictivă în comparație cu reglarea cu predictor Smith

Pentru un model al procesului de forma:

$$y_k = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u_{k-d}$$

se poate construi un algoritm de reglare cu predictor Smith, impunând ca răspunsul SRA să fie dat de relația:

$$y_k = \frac{q^{-d-1}B(q^{-1})R^*(q^{-1})}{A(q^{-1}) + B(q^{-1})R^*(q^{-1})q^{-d-1}} r_k . \qquad (9.126)$$

unde $R^*(q^{-1})$ reprezintă funcția de transfer ce definește algoritmul de reglare proiectat pentru un model fără timp mort.

Structura SRA cu regulator cu Predictor Smith este prezentată în figura 9.4.

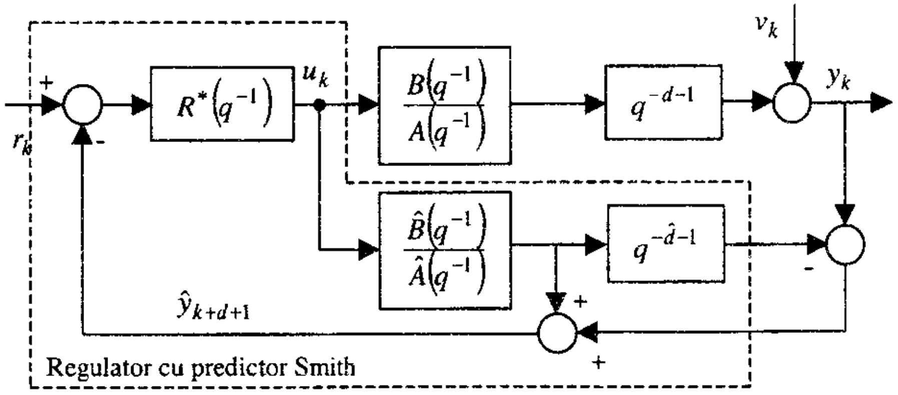


Fig. 9.4

Funcția de transfer a regulatorului cu Predictor Smith este:

$$R(q^{-1}) = \frac{R^*(q^{-1})}{1 + R^*(q^{-1})\frac{\hat{B}(q^{-1})}{\hat{A}(q^{-1})}\left(1 - q^{-\hat{d}-1}\right)}, \qquad (9.127)$$

iar ieșirea predictată $\hat{y}_{k+d+1}$ se calculează cu relația:

$$\hat{y}_{k+d+1} = \frac{\hat{B}(q^{-1})}{\hat{A}(q^{-1})}u_k + \left[y_k - q^{-d}\frac{\hat{B}(q^{-1})}{\hat{A}(q^{-1})}u_{k-1}\right]. \qquad (9.128)$$

Predictorul de minimă varianță în $(d+1)$ pași bazat pe modelul general (9.102) are forma:

$$\hat{y}_{k+j} = \hat{B}(q^{-1})F_j(q^{-1})\Delta u_{k+j-d-1} + G_j(q^{-1})y_k \qquad (9.129)$$

cu

$$\hat{B}(q^{-1})F_j(q^{-1}) = R_j(q^{-1}) + q^{-j+d}\bar{R}_j(q^{-1})$$

sau pentru $j = d+1$

$$\hat{y}_{k+d+1} = \hat{B}(q^{-1})F_{d+1}(q^{-1})\Delta u_k + G_{d+1}y_k , \qquad (9.130)$$

unde $\hat{B}(q^{-1})$ și $\hat{A}(q^{-1})$ reprezintă polinoamele estimate ale modelului procesului.

Dacă folosim ecuația diofantică pentru $j = d+1$

$$\frac{1}{\Delta\hat{A}(q^{-1})} = F_{d+1}(q^{-1}) + q^{-d-1}\frac{G_{d+1}(q^{-1})}{\Delta\hat{A}(q^{-1})}$$

și multiplicăm ambele părți cu $\hat{B}(q^{-1})$, obținem:

$$\frac{\hat{B}(q^{-1})}{\Delta\hat{A}(q^{-1})} = F_{d+1}(q^{-1})\hat{B}(q^{-1}) + q^{-d-1}\frac{G_{d+1}(q^{-1})\hat{B}(q^{-1})}{\Delta\hat{A}(q^{-1})}. \qquad (9.131)$$

Din ecuațiile (9.130) și (9.131) se obține cu ușurință:

$$\hat{y}_{k+d+1} = \frac{\hat{B}(q^{-1})}{\hat{A}(q^{-1})}u_k + G_{d+1}(q^{-1})\left[y_k - q^{-d}\frac{\hat{B}(q^{-1})}{\hat{A}(q^{-1})}u_{k-1}\right]. \qquad (9.132)$$

În figura 9.5 se prezintă structura SRA cu predictor de minimă varianță în $(d+1)$ pași.

Eroarea $e_k = y_k - \hat{y}_k$ în acest caz este filtrată prin intermediul polinomului $G_{d+1}(q^{-1})$. Predictorul Smith în forma sa simplificată nu ia în considerație efectul perturbațiilor.

În cazul utilizării unor modele mai complexe pentru perturbații, forma predictorului de minimă varianță va fi evident diferită și include în mod natural polinoamele $C(q^{-1})$ și $D(q^{-1})$ ce definesc clasa mărimilor perturbatoare stocastice ce acționează asupra procesului [46, 51].

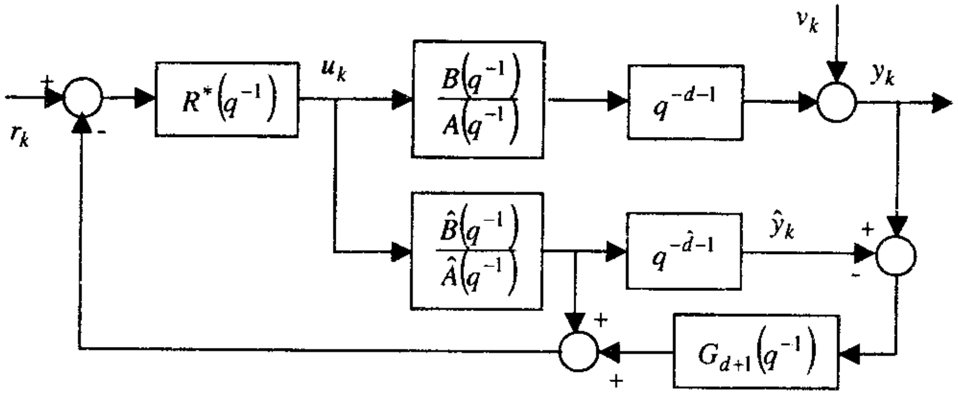


Fig. 9.5

PROBLEME

9.1. Se consideră un proces caracterizat prin ecuaţia cu diferenţe:

$$y_k - y_{k-1} + 0.6y_{k-2} = u_{k-2} + 0.3u_{k-3} + 0.5v_k + 0.4v_{k-1} + 0.2v_{k-2}$$

unde v_k reprezintă un semnal stocastic de tip zgomot alb.

Se cere:

a) algoritmul de minimă varianţă;

b) varianţa realizată prin utilizarea algoritmului.

9.2. Se consideră modelul:

$$y_k = 1.7y_{k-1} - 0.5y_{k-2} + u_{k-d} + 05u_{k-d-1} + v_k + 1.5v_{k-1} + 0.7v_{k-2}.$$

Se cere:

a) algoritmul de varianţă minimă şi varianţa ieşirii pentru $d=1$, $d=2$ şi $d=3$;

b) comparaţi varianţa ieşirii şi analizaţi prin simulare efectul timpului mort asupra varianţei ieşirii.

9.3. Se consideră procesul caracterizat prin ecuaţia:

$$y_k - 1.5y_{k-1} + 0.6y_{k-2} = u_{k-2} + 0.8u_{k-3} + v_k - 0.4v_{k-1}$$

unde v_k este zgomot alb.

Se cere:

a) algoritmul Deadbeat pentru $v_k = 0$;

b) algoritmul de minimă varianţă;

c) varianţa ieşirii când se folosesc cei doi algoritmi.

9.4. Se consideră modelul unui proces sub forma:

$$y_k = \frac{B(q)}{A(q)}u_{k-d} + \lambda\frac{C(q)}{D(q)}v_k$$

unde v_k este zgomot alb şi $B(q)$ este stabil. Polinoamele A, C şi D sunt monice.

Se cere forma generală a algoritmului de minimă varianţă.

9.5. Se consideră procesul caracterizat prin modelul:

$$\left(1-0.7q^{-1}\right)y_k = u_{k-1} + \left(1-0.4q^{-1}\right)v_k.$$

Se cere a determina algoritmul LQG care minimizează criteriul de performanţă:

$$I = E\left(y_k^2 + \rho u_k^2\right)$$

pentru diverse valori ale parametrului ρ.

9.6. Se consideră procesul caracterizat prin modelul:

$$y_k - 1.3y_{k-1} + 0.7y_{k-2} = u_{k-1} + 0.5u_{k-2} + v_k + 0.2v_{k-1}.$$

Se cere:

a) algoritmul de minimă varianţă;

b) algoritmul DB pentru $v_k = 0$;

c) varianţa ieşirii când se folosesc cei doi algoritmi.

9.7. Arătaţi că un sistem caracterizat prin modelul:

$$y_k = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u_k + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}v_k$$

unde:

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_nq^{-n}$$

$$B(q^{-1}) = b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \dots + b_nq^{-n}$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1q^{-1} + \dots + c_nq^{-n}$$

are următoarea reprezentare de stare:

$$x_{k+1} = \Phi x_k + \Gamma u_k + Kv_{k+1}$$

$$y_k = Cx_k$$

cu

$$\Phi = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}; \quad \Gamma = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}; \quad K = \begin{bmatrix} 1 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix};$$

$$C = [1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; \cdots \;\; 0].$$

9.8. Se consideră modelul de stare al unui motor sub forma:

$$x_{k+1} = 0.5x_k + u_k$$
$$y_k = x_k + v_k$$

unde x_k este viteza, u este tensiunea de intrare şi y este viteza măsurată de tahogenerator. Zgomotul de măsura este zgomot alb cu varianţa egală cu σ^2.

Admiţând că viteza iniţială este o variabilă stocastică de medie zero şi varianţă unitară, se cere algoritmul de reglare care minimizează funcţia obiectiv:

$$I = E\left[x_k^2 + \sum_{k=0}^{1} \rho u_k^2\right]$$

pentru diverse valori ale parametrului ρ (ρ=1, ρ=0.1).

9.9. Se consideră modelul:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_k$$
$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_k$$

unde v_k este o secvenţă de variabile aleatoare independente, normale de medie zero şi varianţă egală cu unitatea. Aproximăm că x_0 este normal cu media $E[x_0] = [1 \quad 1]^T$ şi matricea de covarianţă $R_0 = 3I$.

Se cere:

a) să se determine ecuaţiile pentru matricea de covarianţă a erorii de construcţie şi matricea L pentru filtrul Kalman;

b) viteza de convergenţă a erorii de reconstrucţie a stării şi valoarea staţionară a covarianţei şi a lui L.

9.10. Pentru modelul sub forma:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} v_k$$
$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_k$$

unde v_k este zgomot alb, se cere matricea de comandă după stare F şi matricea filtrului Kalman pentru $\rho = 1$.

10. SISTEME NELINIARE

10.1. Tipuri de neliniarităţi

Sistemele neliniare includ toate acele sisteme ce nu pot fi descrise prin modele liniare. Diversitatea mare a neliniarităţilor întâlnite în sistemele reale face imposibilă o clasificare unitară a acestor sisteme neliniare. În acest capitol vom considera structuri de sisteme de reglare automată, în cadrul cărora vom evidenţia o parte liniară şi o parte neliniară, ce conţine, atât *neliniarităţi statice*, cât şi *neliniarităţi dinamice*. Marea majoritate a sistemelor întâlnite în tehnică, au un grad mai mare sau mai redus de neliniaritate.

Alegerea corespunzătoare a punctului de funcţionare în jurul căruia se face liniarizarea, permite obţinerea unor modele aproximative, liniarizate, cu un grad limitat de valabilitate în jurul acestui punct, pentru multe dintre elementele ce compun structura unui sistem de reglare automată.

Neliniarităţile ce nu pot fi liniarizate se cunosc în literatură şi sub denumirea de *neliniarităţi esenţiale*. Într-un sistem automat pot apărea neliniarităţi statice (esenţiale) şi neliniarităţi dinamice. *Neliniarităţile statice* definesc *dependenţa intrare – ieşire* $y = f(u)$ în *regim staţionar* şi sunt ilustrate prin intermediul caracteristicilor statice.

Pentru caracterizarea sistemelor neliniare pot fi utilizate modele generale de forma:

$$\begin{matrix} \dot{x} = f(x,u,v,t) \\ y = g(x,t) \end{matrix}; \quad x(t_0) = x_0, t \ge t_0 \tag{10.1}$$

unde $x(t) \in R^n$ este starea, $y(t) \in R^p$ – vectorul mărimilor măsurate, $u(t) \in R^m$ – vectorul mărimilor de comandă, iar $v \in R^q$ este vectorul mărimilor perturbatoare.

Pentru majoritatea proceselor este tipică descrierea sistemică sub forma:

$$\begin{matrix} \dot{x} = f(x,u) \\ y = g(x) \end{matrix}; \quad x(0) = x_0, t > 0 \tag{10.2}$$

descriere ce evidențiază *invarianța temporală*, respectiv faptul că timpul nu figurează explicit în modelul matematic asociat proceselor. În cazul în care funcțiile neliniare f și g pot fi liniarizate în jurul unui punct static de funcționare, se obține modelul liniar:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y = Cx(t) \qquad (10.3)$$

unde matricele A, B, C au dimensiuni corespunzătoare și pot fi calculate cu ajutorul relațiilor:

$$A = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{x^0,u^0};\ B = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{x^0,u^0};\ C = \left.\frac{\partial g(x)}{\partial x}\right|_{x^0} \qquad (10.4)$$

În acest caz, funcțiile neliniare f și g au fost liniarizate în jurul punctului de liniarizare (x^0, u^0) cu $f(x^0, u^0) = 0$, $g(x^0) = 0$, în cazul în care (x^0, u^0, y^0) reprezintă un punct de echilibru. Matricele A, B, C depind de punctul (x^0, u^0). Dacă se consideră diferite regimuri de funcționare, rezultă diferite seturi (A^i, B^i, C^i) și astfel prin liniarizare rezultă diferitele modele.

O asemenea aproximare a modelelor neliniare evidențiază un anumit nivel de incertitudine structurală în caracterizarea obiectelor reale neliniare prin aproximații liniare.

Caracterizarea intrare-ieșire poate evidenția, atât o caracteristică statică neliniară, cât și o caracteristică dinamică neliniară. Astfel, dacă definim un sistem prin operatorii f și g sub forma:

$$f(u, y) = 0 \qquad (10.5)$$

și

$$y = g(u) \qquad (10.6)$$

care introduc *operații de derivare, integrare sau alte operații similare*, spunem că un asemenea sistem este *neliniar dinamic*, având o evoluție proprie în timp. Dacă această evoluție este convergentă în timp și fiecărei valori stabilizate la intrare îi corespunde o valoare stabilizată, bine determinată, la ieșire, putem defini *caracteristica statică stabilă* a elementului considerat ca fiind alcătuită din totalitatea acestor puncte (u_i, y_i).

Funcția g poate fi definită ca un operator dinamic neliniar care transformă funcții de timp în alte funcții de timp. În acest caz putem folosi notația $y = g\langle u\rangle$ care reprezintă o transformare de la u la y prin intermediul operatorului g.

10.2. Sisteme de reglare neliniare

În cazul general, un sistem de reglare (conducere) neliniar poate fi reprezentat ca în figura 10.1*a*.

Această structură evidențiază faptul că, atât obiectul condus, cât și regulatorul sunt caracterizate de modele neliniare.

Admițând că modelul procesului poate fi liniarizat (funcțiile f și g sunt liniarizabile) se poate alcătui structura de sistem de reglare cu regulator neliniar (fig. 10.1*b*).

O a treia variantă o constituie varianta în care obiectul condus este neliniar, iar regulatorul este definit ca sistem liniar (fig. 10.1*c*).

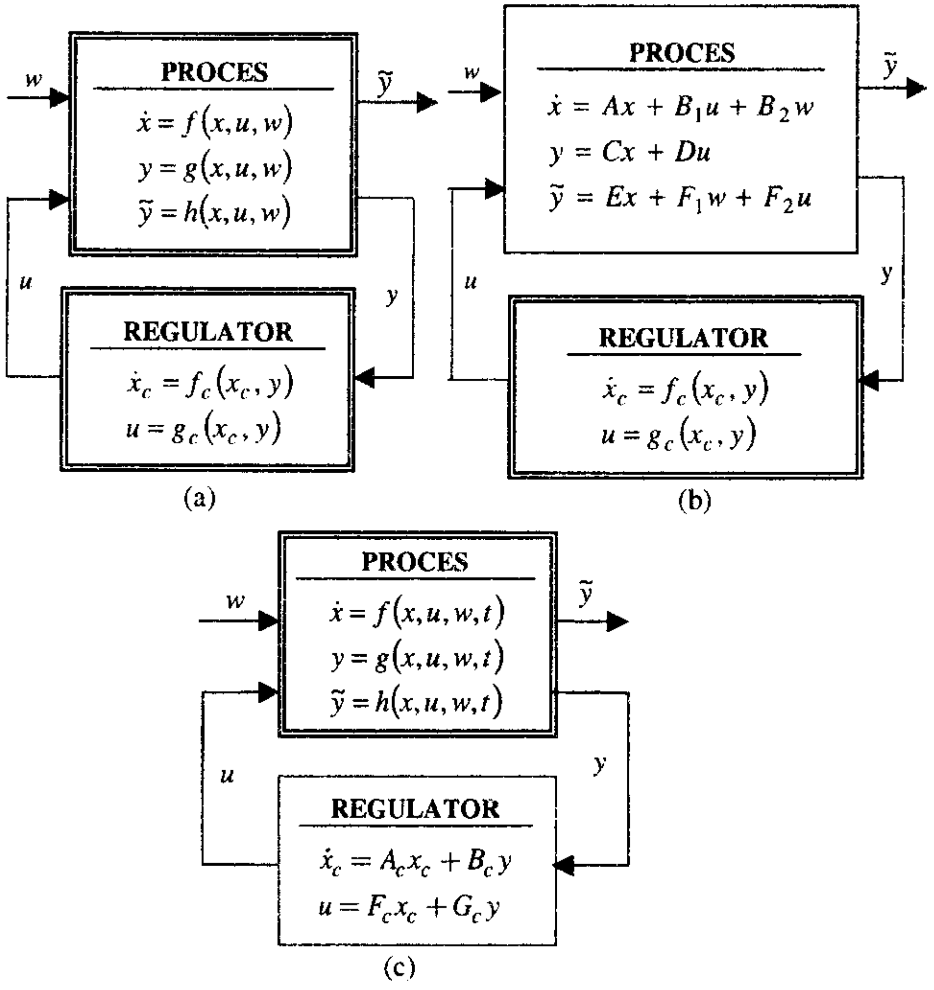


Fig.10.1

Structurile de sisteme neliniare în care neliniarităţile statice sunt grupate şi părţile componente liniarizate interconectate, sunt cel mai adesea întâlnite în practică.

Forma generală a modelelor matematice ce definesc asemenea structuri este următoarea:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \\ u &= \varphi(y) \end{aligned} \tag{10.7}$$

unde: $u = [u_1 u_2 ... u_m]^T$ este un vector de intrare m-dimensional al unităţilor neliniare dacă se aproximează că numărul de unităţi neliniare este egal cu numarul m al ieşirilor neliniare; B este o matrice $n \times m$ cu coeficienţi constanţi şi C este o matrice constantă $n \times p$.

Cea de a treia ecuaţie în (10.7) este ecuaţia ce descrie partea neliniară cu funcţia vectorială neliniară $\varphi(y)$ dată. În figura 10.2 se prezintă o structură de sistem neliniar cu evidenţierea celor două părţi componente: partea liniarizată şi partea neliniară prin modelul $u = \varphi(y)$.

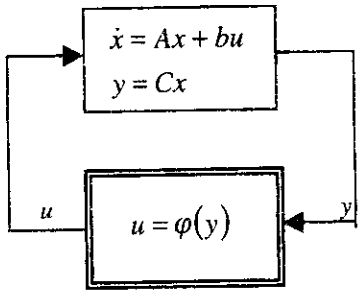


Fig. 10.2

Ecuaţia a doua din (10.7) este ecuaţia de legatură între partea liniară şi partea neliniară. Uzual, sistemele neliniare constau din m unităţi, fiecare având o intrare şi o ieşire. În acest caz, ecuaţia $u = \varphi(y)$ se descompune în m ecuaţii scalare $u_i = \varphi_i(y_i); i = 1,...,m$. Cu alte cuvinte, $\varphi(y)$ este o matrice diagonală $m \times m$.

În cazul sistemelor monovariabile, modelul (10.7) capătă forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= c^T x \\ u &= \varphi(y) \end{aligned} \tag{10.8}$$

unde u şi y sunt scalari, iar $\varphi(y)$ este o funcţie scalară.

Apelând la caracterizarea intrare – ieşire pentru sistemul reprezentat în figura 10.2, obţinem:

$$\begin{aligned} y &= -H(s)u \\ u &= \varphi(y) \end{aligned} \tag{10.9}$$

unde $H(s)$ este funcţia de transfer a părţii liniare a sistemului. Semnul minus în prima ecuaţie din (10.9) arată că sistemul este în circuit închis cu reacţie negativă (fig. 10.3).

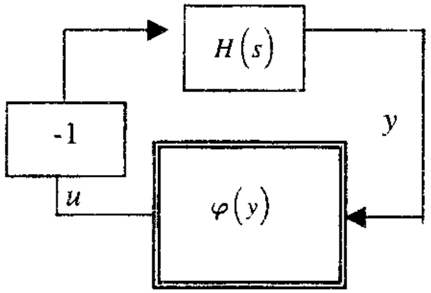


Fig. 10.3

Neliniarităţile într-un sistem automat pot fi *inerente*, determinate de caracteristicile reale ale elementelor componente, dar pot fi şi neliniarităţi *introduse intenţionat*, în scopul obţinerii unor performanţe dorite prin includerea unor algoritmi neliniari de reglare (reglare adaptivă, reglare optimală neliniară, reglare cu structură variabilă etc).

O particularitate a sistemelor neliniare o constituie noţiunea de stabilitate, care este mult mai nuanţată faţă de sistemele liniare. În acest sens menţionam faptul că *unor sisteme neliniare le este specifică funcţionarea cu oscilaţii întreţinute* (autooscilaţii), *care nu presupune instabilitatea sistemului*: aceste autooscilaţii sunt similare cu cele ale sistemelor liniare la limita de stabilitate, dar se deosebesc de acestea prin faptul că parametrii lor nu depind de semnalul de intrare (v. §10.6).

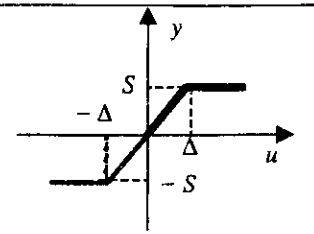
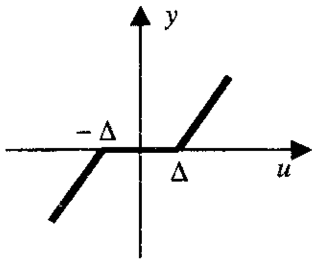
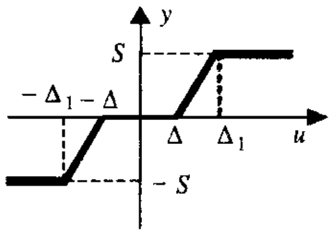
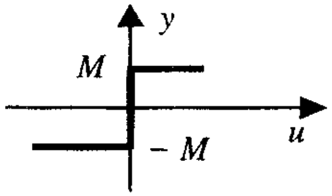
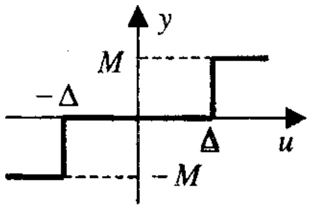
În cadrul structurilor uzuale de sisteme de reglare se întâlnesc *neliniarităţi statice de tipul saturaţie, zonă de insensibilitate, histerezis, caracteristică de tip releu* şi altele.

În tabelul 10.1 se prezintă principalele neliniarităţi şi ecuaţiile ce le descriu.

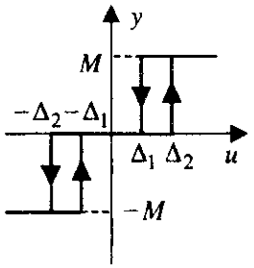
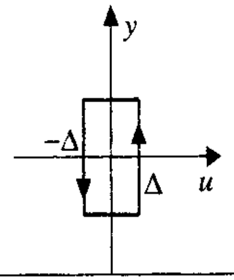
În cazul general, *caracteristicile cu histerezis* sunt descrise prin ecuaţii de tipul:

$$y(t) = \varphi\left(u(t)\big|_0^t, \chi\right) \tag{10.10}$$

Tabelul 10.1

Tipul neliniarităţii	Caracteristica statică	Modelul matematic
Zonă de saturaţie		$y=\begin{cases}Ku, & \lvert u\rvert\le\Delta\\ S\,\mathrm{sgn}\,u, & \lvert u\rvert>\Delta\end{cases}$
Zonă de insensibilitate		$y=\begin{cases}0, & \lvert u\rvert\le\Delta\\ K(u-\Delta), & u>\Delta\\ K(u+\Delta), & u<-\Delta\end{cases}$
Insensibilitate şi saturaţie		$y=\begin{cases}0, & \lvert u\rvert\le\Delta\\ K(u-\Delta), & u\in(\Delta,\Delta_1)\\ K(u+\Delta), & u\in(-\Delta_1,-\Delta)\\ S\,\mathrm{sgn}\,u, & \lvert u\rvert>\Delta_1\end{cases}$
Releu ideal		$y=M\,\mathrm{sgn}\,u=\begin{cases}M, & u>0\\ \text{nedefinit}, & u=0\\ -M, & u<0\end{cases}$
Releu cu zonă de insensibilitate		$y=\begin{cases}M, & u\ge\Delta\\ 0, & u\in[-\Delta,+\Delta]\\ -M, & u\le-\Delta\end{cases}$

Tabelul 10.1 (continuare)

Releu cu zonă de insensibilitate şi histerezis		$y=\begin{cases}M, u\ge\Delta_2\\ M, u\in[\Delta_1,\Delta_2], y(t-\delta)=M\\ 0, u\in[\Delta_1,\Delta_2], y(t-\delta)=0\\ 0, u\in[-\Delta_1,\Delta_1]\\ 0, u\in[-\Delta_2,-\Delta_1], y(t-\delta)=0\\ -M, u\in[-\Delta_2,-\Delta_1], y(t-\delta)=-M\\ -M, u\le-\Delta_2\end{cases}$
Releu cu histerezis		$y=\begin{cases}M, u\ge\Delta\\ M, u\in[-\Delta,\Delta], y(t-\delta)=M\\ -M, u\in[-\Delta,\Delta], y(t-\delta)=-M\\ -M, u\le-\Delta\end{cases}$

Notaţia $u(t)\big|_0^t$ arată că $y(t)$ este determinată nu numai prin valoarea lui $u(t)$ la momentul t, însă de asemenea prin istoria sa trecută pe întregul interval de timp trecut $(0,t)$. Parametrul χ în exemplele evidenţiate în tabel este egal cu $y(t-\delta)$, adică valoarea lui y obţinută după comutarea precedentă a releului.

Caracteristicile statice prezentate în tabelul 10.1 pun în evidenţă fie o polaritate directă (reprezentarea dependenţei intrare–ieşire în cadranele I şi III), fie o polaritate inversă (reprezentarea în cadranele II şi IV).

În unele probleme, cum sunt cele de stabilitate a sistemelor neliniare, cadranele I şi III se înlocuiesc cu anumite sectoare admisibile din interiorul lor. Dacă un element neliniar este caracterizat prin ecuaţia neliniară

$$y=g(u) \tag{10.11}$$

condiţia de polaritate se poate exprima şi sub formă integrală, pozitiv definită:

$$\int_0^u g(\tau)d\tau\ge 0,\ g(0)=0 \tag{10.12}$$

În cazul general, pentru un element neliniar cu intrarea $u(t)$ şi ieşirea $y(t)$, *condiţia de polaritate directă* (cadranele I şi III)

$$u(t)\cdot y(t)\ge 0,\quad \forall t>0 \tag{10.13}$$

se poate înlocui cu o condiţie mai puţin restrictivă, de medie

$$\int_0^t u(\tau)y(\tau)d\tau \geq 0, \ \forall t > 0 \qquad (10.14)$$

care stă la baza *conceptului de hiperstabilitate* [8, 88].

Separarea caracteristicilor statice neliniare de cele dinamice liniare evidenţiază faptul că starea de referinţă completează descrierea părţilor liniare, iar caracteristicile neliniare preiau atributele unor funcţii definite complet pe mulţimea mărimilor de intrare. Acest lucru este posibil dacă operatorii f şi g determină în mod univoc mărimile de ieşire, atunci când se dau mărimile de intrare şi o stare de referinţă (iniţială, finală etc.). Există, atât neliniarităţi statice univoce, cât şi neliniarităţi statice neunivoce.

Neliniarităţile inerente sau intenţionate pot fi *analitice* sau *neanalitice*.

Neliniarităţile analitice sunt descrise de funcţii $g(u)$ continue şi derivabile în raport cu argumentul u, iar cele neanalitice sunt neliniarităţi continue sau discontinue, nederivabile în raport cu argumentele lor.

Neliniarităţile neanalitice, care conţin cel puţin un punct singular în domeniul de funcţionare, se numesc *esenţiale;* aceste neliniarităţi nu pot fi liniarizate. Conectarea neliniarităţilor se poate realiza în serie, în paralel sau opusă (fig. 10.4), putându-se grupa şi interconecta cu partea liniară a unui sistem.

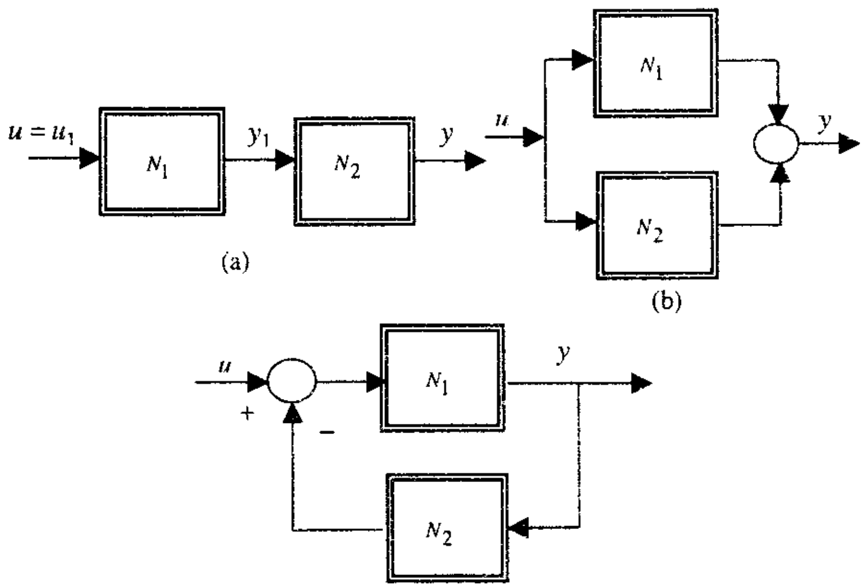


Fig. 10.4

În figura 10.4.*a*, dacă cele două neliniarităţi statice sunt definite prin relaţiile:

$$y_1 = g_1(u_1)$$

$$y_2 = g_2(u_1) = y$$

rezultă un model neliniar echivalent

$$y = g(u)$$

care cel mai simplu se obţine pe cale grafică în cazul în care cele două caracteristici neliniare N_1 şi N_2 sunt reprezentate grafic. Într-o manieră similară se pot deduce modele neliniare echivalente şi pentru celelalte structuri prezentate în figura 10.4.

Într-un sistem de reglare automată pot apărea neliniarităţi esenţiale în cadrul diferitelor componente. Astfel, regulatorul poate fi de tip *bipoziţional* sau *tripoziţional,* poate introduce o neliniaritate de tip saturaţie sau poate fi un regulator cu factor de amplificare variabil. Elementul de execuţie poate introduce neliniarităţi de tip „zonă de insensibilitate" sau „histerezis", cu sau fără saturaţie, iar traductorul poate introduce „zonă de insensibilitate". În figura 10.5 se prezintă o structură de sistem de reglare automată, în cadrul căreia se evidenţiază neliniarităţi introduse de elementul de execuţie şi poziţioner.

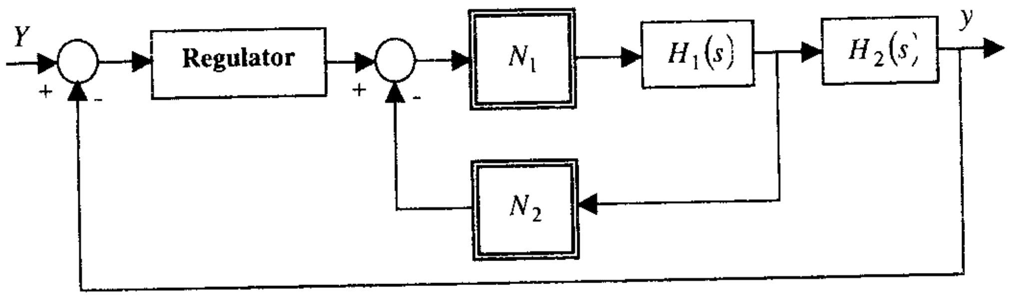


Fig. 10.5

O structură tipică de sistem neliniar cu regulator neliniar este prezentată în figura 10.6. În acest caz, regulatorul este alcătuit dintr-un bloc neliniar cu caracteristică de tip releu cu zonă de insensibilitate şi histerezis (tripoziţional) şi un bloc liniar de corecţie caracterizat prin funcţia de transfer $H_c(s)$. Comanda furnizată de acest regulator este sub forma unor impulsuri modulate în durată [34, 37].

O clasă specială de neliniarităţi frecvent întâlnite în structura sistemelor de conducere neliniare o reprezintă *clasa neliniarităţilor sectoriale* $v = \varphi(\sigma)$ definite generic prin $\eta(k_1, \ k_2)$.

Caracteristicile ce aparţin acestor neliniarităţi sectoriale satisfac condiţia:

$$k_1 \le \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} \le k_2 \qquad (10.15)$$
$$\varphi(0)=0$$

unde k_1 şi k_2 sunt valori cunoscute şi definite

$$k_1 = \inf_{\sigma} \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma};\ k_2 = \sup_{\sigma} \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} \qquad (10.16)$$

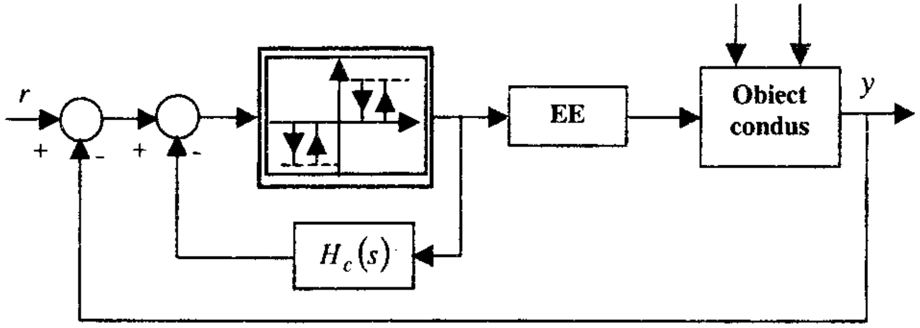


Fig. 10.6

Este uşor de remarcat că (10.15) este echivalentă cu condiţia:

$$(k_2\sigma - v)(v - k_1\sigma) \ge 0 \qquad (10.17)$$

Un caz particular al clasei de neliniarităţi $\eta(k_1,\ k_2)$ este clasa $\eta(0,\ k)$, care este considerată cel mai frecvent în literatură. Cele două clase de neliniarităţi sectoriale sunt prezentate în figura 10.7.

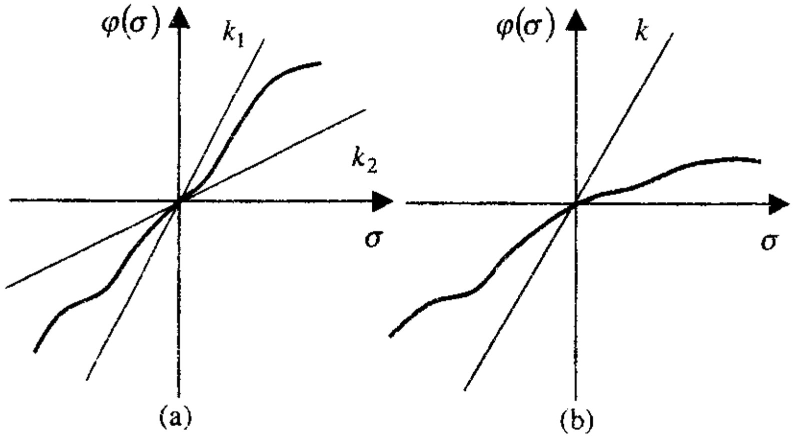


Fig. 10.7

Din clasa $\eta(k_1,\ k_2)$ putem evidenţia o *subclasă* $\eta(0,\ \infty)$ ale căror caracteristici $\varphi(\sigma)$ pot aproxima orice formă în cadrul cadranelor I şi III.

Pentru clasa $\eta(0,\ k)$, obţinem:

$$0 \le \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} = \frac{v}{\sigma} \le k,\ \sigma \ne 0 \qquad (10.18)$$
$$\varphi(0)=0$$

sau echivalent:

$$(k\sigma - v)\cdot v \ge 0 \qquad (10.19)$$

Pentru $k=\infty$, această condiţie aproximează forma:

$$0 \le \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma},\ \sigma \ne 0 \qquad (10.20)$$
$$\varphi(0)=0$$

sau

$$\sigma \cdot v \ge 0.$$

O altă caracteristică din clasa $\eta(k_1,\ k_2)$ poate fi redusă la o caracteristică în clasa $\eta(0,\ k)$ prin substituţia:

$$v_1 = \varphi_1(\sigma) = \varphi_1(\sigma) - k_1\sigma = v - k_1\sigma$$

care conduce la:

$$0 \le \frac{\varphi_1(\sigma)}{\sigma} \le k,\ \sigma \ne 0$$
$$\varphi_1(0)=0$$
$$k = k_1 - k_2.$$

O asemenea transformare a neliniarităţii impune o transformare corespunzătoare a funcţiei de transfer a părţii liniare. Astfel, pentru un sistem descris prin modelul:

$$\sigma = -H(s)v \qquad (10.21)$$
$$v = \varphi(\sigma)$$
$$\varphi(0)=0$$

transformarea funcţiei de transfer $H(s)$ conduce la forma:

$$H_1(s) = \frac{\sigma}{v_1} = \frac{\sigma}{v - K_1\sigma} = \frac{\sigma/v}{1 - K_1\frac{\sigma}{v}} = \frac{H(s)}{1 - K_1 H(s)}. \qquad (10.22)$$

Dacă funcţia $\varphi(\sigma)$ este continuă şi monotonă şi are derivata de ordinul întâi pozitivă pentru toate valorile lui σ, clasa $\eta(k_1,\ k_2)$ poate fi determinată prin următoarea condiţie:

$$K_1 \le \frac{d\varphi(\sigma)}{d\sigma} = \le \dot{v} \le K_2. \qquad (10.23)$$

Această condiţie este echivalentă cu inegalitatea:

$$(k_2\sigma - v)(v - k_1\sigma) \geq 0 \qquad (10.24)$$

Dacă nu sunt impuse restricţii suplimentare asupra funcţiei $\varphi(\sigma)$, inegalităţile (10.23) limitează clasa funcţiilor $\varphi(\sigma)$ la acelaşi sector definit prin dreptele de pante k_1 şi k_2. Într-un caz mult mai general, când σ şi v sunt vectori de dimensiuni arbitrare, este mai convenabil a folosi o clasă mai generală de neliniarităţi pentru investigarea stabilităţii. De notat că relaţiile (10.17), împreună cu (10.24) reprezintă cazuri particulare ale dependenţei

$$F\left[v(t),\ \sigma(t),\ \frac{d\sigma(t)}{dt}\right] \geq 0. \qquad (10.25)$$

unde F este o funcţie reală pătratică, a cărei formă depinde de natura neliniarităţii.

Dacă inegalităţile de forma (10.25) şi de forma $F(v,\ \sigma) \geq 0$ sunt satisfăcute oriunde pe intervalul $(0,\infty)$, funcţiile $v(t)$ şi $\sigma(t)$ se spune că satisfac restricţia locală de forma F.

Multitudinea neliniarităţilor ce pot apărea într-un sistem automat, precum şi diferitele structuri de sisteme neliniare, fac ca metodele de analiză şi sinteză a sistemelor neliniare să nu aibă un caracter de generalitate, metodele de rezolvare a ecuaţiilor neliniare fiind în general legate de tipul neliniarităţilor.

10.3. Analiza sistemelor neliniare prin metoda planului fazelor

Spaţiul stărilor corespunzătoare formei normale a ecuaţiilor este denumit spaţiul fazelor, iar variabilele de stare sunt denumite coordonate de fază. Ecuaţiile sistemelor mecanice, transformate pentru reprezentare în spaţiul fazelor, au fazele de mişcare ca variabile. Ecuaţiile rezolvate în funcţie de derivatele de ordinul cel mai mare:

$$y^{(n)} = f\left(t, y, \dot{y}, \ddot{y}, \ldots, y^{(n-1)}\right) \qquad (10.26)$$

pot fi reduse la variabile de stare

$$\frac{dx_i}{dt} = x_{i+1}, i = 1,2,\cdots,n-1$$
$$y = x_1 \qquad (10.27)$$
$$\dot{x}_n = f(t, x_1, x_2, \cdots x_n)$$

Dacă sistemul este de ordinul doi (pot fi evidenţiate două variabile de stare), se obţine *planul fazelor* şi ecuaţiile de stare:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = f(x_1, x_2) \qquad (10.28)$$

Împărţind a doua ecuaţie la prima se obţine o ecuaţie diferenţială, în care timpul a fost eliminat:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f(x_1, x_2)}{x_2}. \qquad (10.29)$$

Reprezentarea geometrică a soluţiei acestei ecuaţii $x_2 = F(x_1)$ se numeşte o curbă integrală (traiectorie de fază). Deoarece derivatele x_1 şi x_2 sunt determinate prin ecuaţiile (10.28), pentru orice punct nesingular în planul fazelor putem vorbi de un punct reprezentativ (x_1 şi x_2) pe curba integrală care se mişcă cu o viteză definită de-a lungul curbei integrale şi poate fi tratată ca traiectorie de mişcare a punctului reprezentativ sau traiectorie de fază. La $x_2 = 0$ şi $f(x_1, x_2) = 0$ nu există mişcare, deoarece derivatele x_1 şi x_2 devin egale cu zero, la aceste puncte. Punctele definite prin ecuaţiile:

$$x_2 = 0$$
$$f(x_1, x_2) = 0 \qquad (10.30)$$

se numesc puncte singulare.

Soluţia ecuaţiei de stare $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, determină *starea de echilibru* a sistemului. În aceste ecuaţii, variabilele x_1, x_2 sunt selectate astfel încât să exprime deviaţia de la o oarecare stare de echilibru, care pentru $x_1 = 0$ sau $x_2 = 0$, este denumită *starea de echilibru, la zero*, care este un punct de echilibru. Originea coordonatelor în planul fazelor (x_2, x_1) este totdeauna un *punct singular*. Dacă există şi alte puncte singulare în afara originii, ele sunt toate pe axa abscisei, aşa cum se poate vedea din (10.30).

Existenţa mai multor puncte singulare pe partea interioară a curbei integrale determină o divizare a acesteia în mai multe traiectorii de fază. Să considerăm un exemplu de curbă integrală care constă din două traiectorii de fază. Acestea se obţin pornind de la ecuaţiile:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -ax_2 - bx_1.$$

Se poate uşor arăta că dacă $a>0$, $b>0$ şi $b^2<\frac{a^2}{4}$, există o curbă integrală [88]:

$$\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1}=\frac{x_2}{x_1}=k.$$

Ecuaţia pentru această curbă integrală este $x_2=kx_1$, o linie dreaptă care trece prin origine. Punctul singular care este originea divide această linie dreaptă în semidrepte plasate în cadranele doi şi patru. Fiecare dintre aceste semidrepte este o traiectorie de fază care se termină în origine.

10.3.1. Puncte singulare în planul fazelor

Studiul sistemelor neliniare în planul fazelor începe cu studiul echilibrului şi al traiectoriilor ecuaţiei în vecinătatea unui punct de echilibru. Pot fi obţinute informaţii importante despre comportarea sistemelor neliniare în vecinătatea unui punct de echilibru din studiul liniarizării lor într-un punct de echilibru.

În consecinţă, vom considera mai întâi un model liniar de forma:

$$\dot{x}=Ax, \qquad (10.31)$$

cu $x\in\Re^n$ şi $A\in\Re^{n\times n}$, şi vom studia efectul valorilor proprii asupra portretului de fază. Pentru sistemul (10.31) originea este punct de echilibru unic dacă şi numai dacă valorile proprii ale matricei A sunt diferite de zero.

În cele ce urmează, considerăm sistemul de ordinul doi:

$$\dot{x}_1=a_1x_1+b_1x_2$$
$$\dot{x}_2=a_2x_1+b_2x_2 \qquad (10.32)$$
$$\dot{x}=Ax$$

unde $A=\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{bmatrix}$, căreia îi aplicăm transformarea de similaritate $T\in\Re^{2\times2}$:

$$T^{-1}AT=J \qquad (10.33)$$

care determină forma Jordan a matricei A.

Astfel, aplicând transformarea de coordonate $\tilde{x}=T^{-1}x$, sistemul (10.33) este transformat în [84]:

$$\dot{\tilde{x}}=T^{-1}AT\tilde{x}=J\tilde{x}. \qquad (10.34)$$

În figura 10.8 se evidenţiază transformarea T a planului P în $\tilde{P}$.

În analiza acestui sistem transformat apar următoarele trei cazuri distincte care generează comportamente calitativ diferite.

Valori proprii reale ale matricei J:

$$J=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix} \qquad (10.35)$$

cu $\lambda_1,\ \lambda_2\in\Re$.

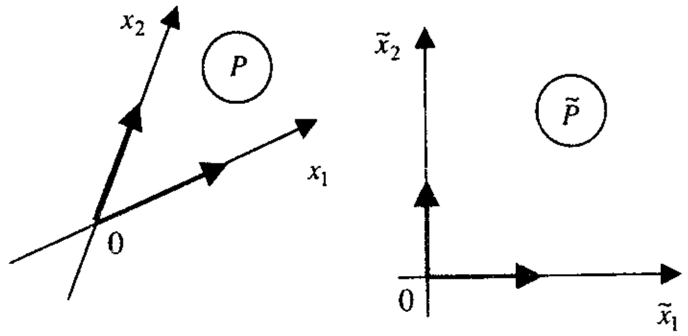


Fig. 10.8

Soluţiile ecuaţiei de stare (10.34) în acest caz sunt:

$$\tilde{x}_1(t)=\tilde{x}_1(0)e^{\lambda_1 t} \text{ şi } \tilde{x}_2(t)=\tilde{x}_{2(0)}e^{\lambda_2 t}. \qquad (10.36)$$

Dacă eliminăm timpul din ecuaţiile (10.36) obţinem:

$$\frac{\tilde{x}_1}{\tilde{x}_{10}}=\left(\frac{\tilde{x}_2}{\tilde{x}_{20}}\right)^{\lambda_1/\lambda_2}. \qquad (10.37)$$

care reprezintă ecuaţia traiectoriei de stare în planul fazelor $(\tilde{x}_2,\tilde{x}_1)$. În funcţie de valoarea şi semnul valorilor proprii λ_1 şi λ_2 pot fi obţinute diferite traiectorii de stare.

În figura 10.9 se prezintă traiectoriile de fază pentru cazul în care $\lambda_1<0$, $\lambda_2<0$. În acest caz (vezi figura 10.9), traiectoriile converg spre origine care reprezintă un *nod stabil*. Dacă $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$ traiectoriile diverg din origine (v. fig. 10.10), sistemul este instabil, iar originea este un *nod instabil*.

Dacă valorile proprii λ_1 şi λ_2 au semne contrare $(\lambda_1<0<\lambda_2)$, portretul de fază are reprezentarea din figura 10.11. În acest caz traiectoriile converg spre origine de-a lungul ordonatei sau invers. Spunem în acest caz că avem un *punct de echilibru de tip şa*.

Aceleaşi rezultate se obţin şi în planul P, cu observaţia că cele două axe nu sunt ortogonale (fig. 10.12), traiectoriile sunt uşor modificate datorită relaţiei între $\tilde{x}(t)$ şi $x(t)$.

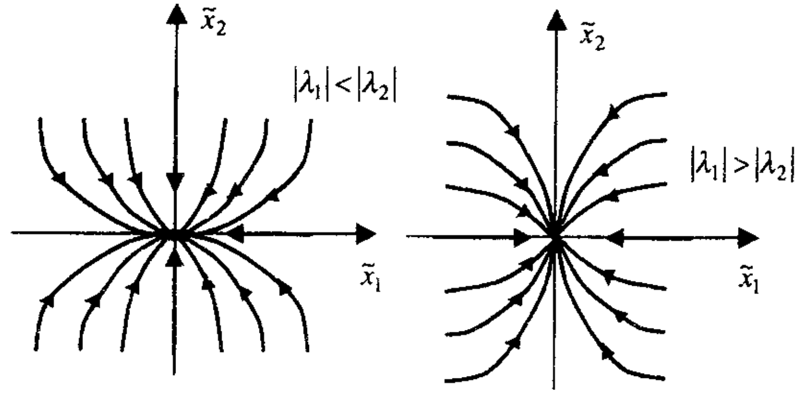


Fig. 10.9

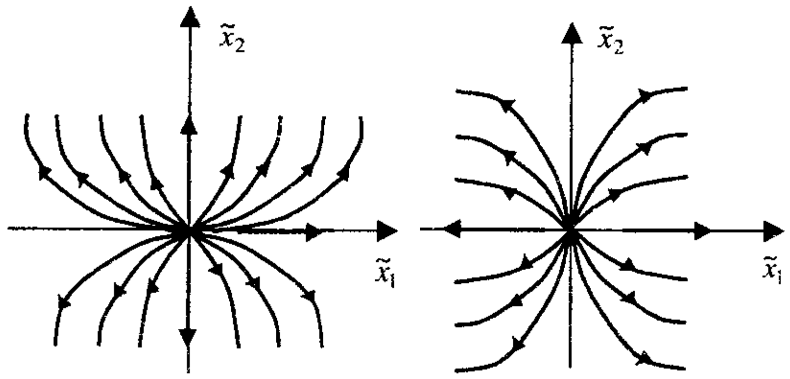


Fig. 10.10

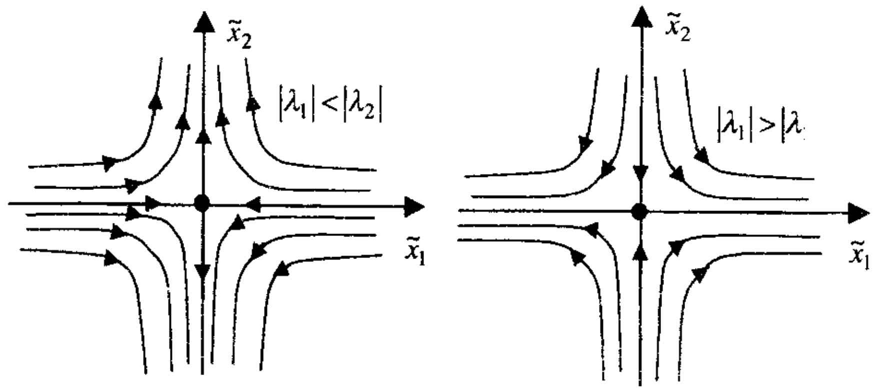


Fig. 10.11

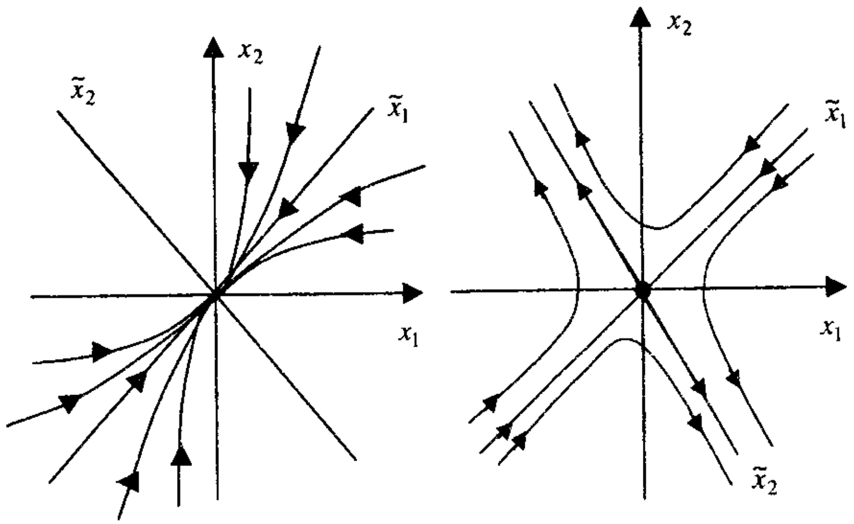


Fig. 10.12

Este de observat că ecuația (10.37) se menține pentru ambele cazuri cu diferența că exponentul este pozitiv pentru nodul stabil (curbele sunt parabolice) și este negativ pentru șa (curbele sunt hiperbole).

O valoare proprie repetată cu un singur vector propriu:

În acest caz, forma Jordan a matricei A nu este diagonală:

$$J=\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix} \tag{10.38}$$

iar soluțiile ecuației de stare sunt:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1(t)&=\tilde{x}_{10}e^{\lambda t}+\tilde{x}_{20}te^{\lambda t}\\ \tilde{x}_2(t)&=\tilde{x}_{20}e^{\lambda t}\end{aligned} \tag{10.39}$$

Prin eliminarea timpului în (10.39) se obține ecuația traiectoriilor de stare sub forma:

$$\tilde{x}_1=\frac{\tilde{x}_{10}}{\tilde{x}_{20}}\tilde{x}_2+\frac{1}{\lambda}\tilde{x}_2\ln\left(\frac{\tilde{x}_2}{\tilde{x}_{20}}\right). \tag{10.40}$$

Traiectoriile converg în origine sau diverg de la aceasta (v. fig. 10.13), însă forma lor este diferită față de cazul prezentat în figura 10.9. În acest caz, punctul de echilibru poartă denumirea de *nod stabil impropriu*. Pentru $\lambda>0$ nodul impropriu este un *nod impropriu instabil*.

În acest caz, axa $\tilde{x}_1$ este asociată cu valoarea proprie λ și este invariantă, pe când axa $\tilde{x}_2$ nu este invariantă, traiectoriile intersectează axa $\tilde{x}_2$.

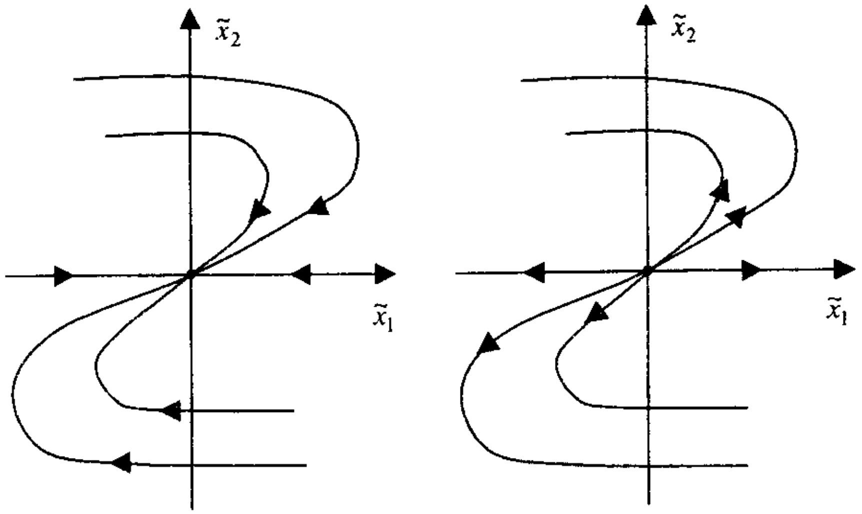


Fig. 10.13

Valorile proprii sunt complexe:

Forma Jordan a matricei A este:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \quad (10.41)$$

iar matricea A nu poate fi diagonalizată.

Pentru a obține soluțiile în acest caz, facem schimbarea de coordonate:

$$\rho = \left(\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2\right)^{1/2}$$

și

$$\tan\varphi = \frac{\tilde{x}_2}{\tilde{x}_1}.$$

În aceste coordonate, ecuațiile sunt:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \alpha\rho \\ \dot{\varphi} &= -\beta \end{aligned} \quad (10.42)$$

iar portretul de fază este ușor de vizualizat. Traiectoriile au o evoluție de tip spirală logaritmică și converg spre origine sau diverg, în funcție de semnul lui α. Variabila unghiulară φ se incrementează cu viteză constantă, în funcție de semnul lui β, în sensul orar direct sau invers. Dacă $\alpha < 0$, traiectoriile converg la origine, în care caz punctul de echilibru este cunoscut ca *focar stabil*. Pentru $\alpha > 0$, traiectoriile diverg iar originea este

un *focar instabil*. Dacă $\alpha = 0$, originea este încercuită de un număr infinit de orbite circulare, iar echilibrul este denumit *centru*.

În figura 10.14 sunt prezentate portretele de fază pentru acest caz (valori proprii complexe), evidențiindu-se un focar și un centru.

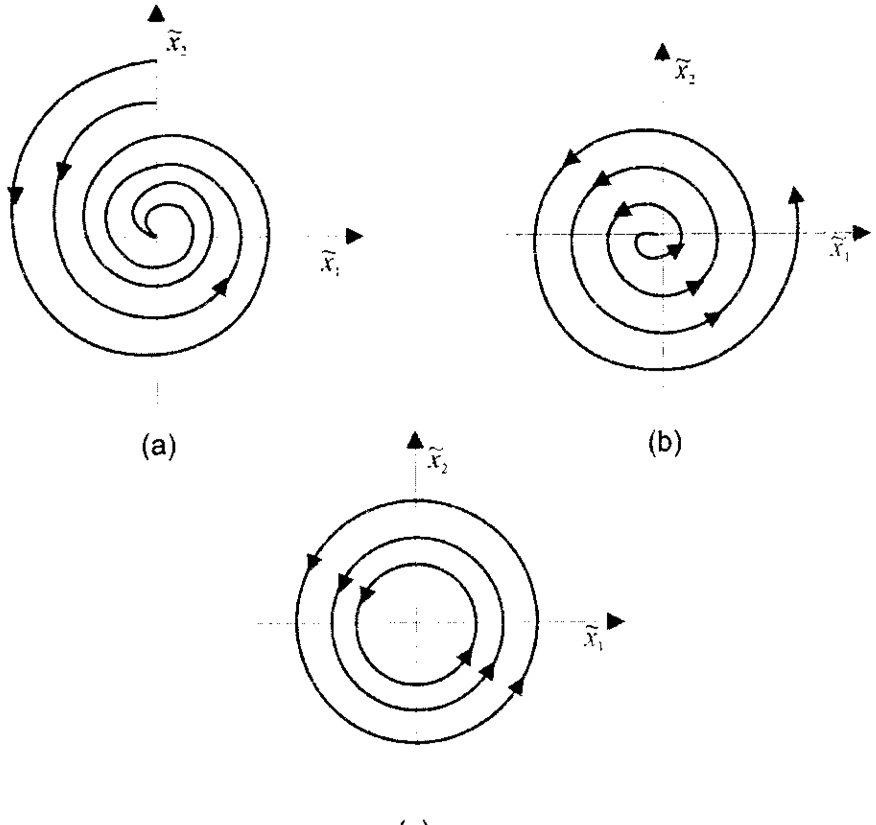


Fig. 10.14

Cazurile de mai sus (cu excepția centrului) se păstrează dacă se modifică puțin elementele matricei A (acestea reprezintă cazuri nedegenerate). Cazul $\alpha = 0$ este de fapt degenerat, întrucât la o modificare foarte mică a elementelor matricei, centrul se transformă în focar.

10.3.2. Traiectorii de fază pentru sisteme neliniare

Prezența neliniarităților în structura unui sistem determină modificări ale traiectoriilor de fază în comparație cu traiectoriile definite pentru sisteme liniare.

Sistem cu frecare uscată (zonă de insensibilitate). Să considerăm un sistem de ordinul doi cu frecare uscată, caracterizat prin ecuațiile:

$$\ddot{y}+\omega_0^2 y=\begin{cases}\omega_0^2\Delta, & \dot{y}>0,\ |y|>\Delta\\ 0, & \dot{y}=0,\ |y|\le\Delta\\ \omega_0^2\Delta, & \dot{y}<0,\ |y|>\Delta\end{cases} \tag{10.43}$$

Forța de frecare uscată se consideră a fi proporțională cu o constantă oarecare Δ. În timpul mișcării, forța inerțială și forța arcului sunt echilibrate prin forța de frecare $\left(\ddot{y}+\omega_0^2 y=F_f, \dot{y}\neq 0\right)$. Dacă totuși forța $\omega_0^2 y$ a arcului este mai mică decât forța de frecare, sistemul este imobil. Astfel, mișcarea la diferite etape este descrisă de diferite ecuații diferențiale (10.43). Pot fi definite astfel, traiectorii de fază în partea superioară a planului fazelor, în partea inferioară și segmente de repaus pe axa absciselor $y\in[-\Delta,\Delta]$. Acest segment este locul unui număr infinit de puncte de echilibru posibile. Mișcarea în partea superioară este descrisă de ecuația:

$$\ddot{y}+\omega_0^2\ y=(y+\Delta)''+\ \omega_0^2\ (y+\Delta)=0,\ \dot{y}>0 \tag{10.44}$$

iar în partea inferioară, în mod corespunzător de ecuația:

$$\ddot{y}+\omega_0^2\ y=(y-\Delta)''+\ \omega_0^2\ (y-\Delta)=0,\ \dot{y}<0. \tag{10.45}$$

Ecuațiile traiectoriilor de fază în acest caz se obțin pentru $\Delta=0$ sub forma:

$$\frac{x_2^2}{2}+\frac{\omega_0^2}{2}\ x_1^2=C \tag{10.46}$$

unde: $x_1=y$, $x_2=\dot{y}$.

Aceste ecuații pun în evidență traiectorii sub formă de elipse centrate în origine. În cazul în care $\Delta\neq 0$, elipsele sunt centrate pe axa abscisei, însă centrele sunt deplasate prin $+\Delta$ și $-\Delta$ în jumătatea superioară, respectiv jumătatea inferioară a planului (fig. 10.15).

Ca rezultat al deplasării centrelor elipselor, mișcarea punctului se apropie prin parcurgerea elipselor spre segmentul de repaus, zona în care punctul rămâne după ajungerea pe acest segment. Astfel, segmentul de repaus este în acest caz stabil. Axa abscisei este divizată în trei părți prin punctele $-\Delta$ și $+\Delta$: partea din interior, segmentul de repaus și cele două părți exterioare ($|y|<\Delta$) pe care are loc o tranziție dintr-o parte în alta a planului. Asemenea linii sunt denumite *linii de comutare*.

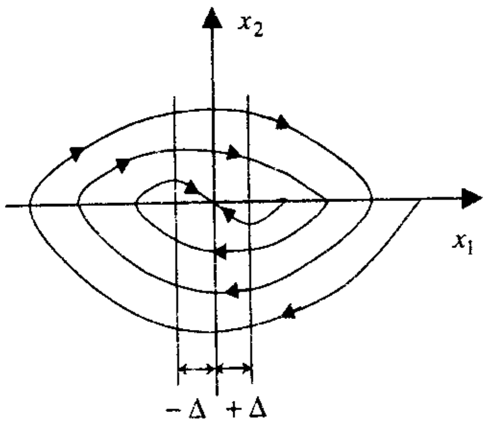


Fig. 10.15

Soluțiile ecuațiilor cu condițiile inițiale y_0 și $\dot{y}_0=0$ sunt:

$$y=\Delta+y_0\cos\omega_0 t,\ 0<t<\pi/\omega_0=t_1$$

respectiv,

$$y=-\Delta+(y_0-\Delta)\cos\omega_0 t,\ t_1<t<2t_1. \tag{10.47}$$

A doua elipsă în semiplanul inferior este:

$$y=\Delta+(y_0-2\Delta)\cos\omega_0 t \tag{10.48}$$

și așa mai departe, pentru celelalte elipse.

Amplitudinile vibrațiilor descresc liniar. *Timpul de amortizare într-un sistem liniar este teoretic infinit, în timp ce într-un sistem neliniar cu frecare uscată, acesta este finit.*

Sisteme oscilante cu frecare variabilă. Ecuațiile unor asemenea sisteme cu frecare uscată pot fi scrise în forma:

$$\begin{aligned}\ddot{y}+\omega_0^2 y+\ |c^2 y| &= 0,\ \dot{y}>0\\ \ddot{y}+\omega_0^2 y-\ |c^2 y| &= 0,\ \dot{y}<0,\end{aligned} \tag{10.49}$$

unde $c^2 y$ reprezintă frecarea internă variabilă.

O altă formă a ecuației (10.49) pune în evidență funcția „semn":

$$\begin{aligned}\ddot{y}+\left(\omega_0^2+c^2\right)y &= 0,\ \mathrm{sgn}\ y=\mathrm{sgn}\ \dot{y}\\ \ddot{y}+\left(\omega_0^2-c^2\right)y &= 0,\ \mathrm{sgn}\ y=-\ \mathrm{sgn}\ \dot{y}\end{aligned} \tag{10.50}$$

Astfel, în cadranele I şi III, unde semnele lui y şi $\dot{y}$ sunt aceleaşi, traiectoriile de fază sunt părţi de elipse ce sunt concentrice în raport cu originea coordonatelor, având raportul între axe egal cu $\sqrt{\omega_0^2 + c^2}$.

În cadranele II şi IV raportul axelor este egal cu $\sqrt{\omega_0^2 - c^2}$.

Se poate vedea din figura 10.16 că traiectoriile de fază converg spre origine.

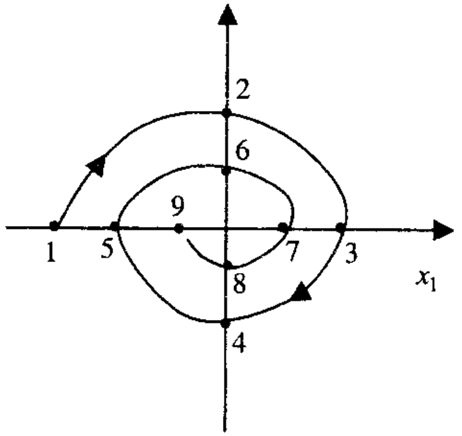


Fig. 10.16

Ecuaţia oscilaţiilor libere poate fi aproximată prin ecuaţia liniară:

$$\ddot{y} + 2h_e\dot{y} + \omega_{0e}^2 y = 0,$$

unde, pentru valori mai mici ale lui c^2,

$$h_e \cong \frac{c^2}{\omega_{0e}^2 \pi}, \; \omega_{0e} \approx \omega_0 .$$

Sistem neliniar cu forţă elastică variabilă şi cu schimbare de semn. Considerăm ecuaţia de mişcare sub forma:

$$\ddot{y} + y\varphi(y) = 0, \qquad (10.51)$$

unde $\varphi(y)$ se schimbă în concordanţă cu următoarea lege:

$$\varphi(y) = \varphi_0\left(1 - \frac{y}{y_a}\right). \qquad (10.52)$$

Dacă notăm $y = x_1$, $\dot{y} = x_2$, ecuaţia traiectoriei de fază poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_1\varphi(x_1)}{x_2},$$

respectiv:

$$x_2^2 = x_{20}^2 - 2\int_{x_{10}}^{x_1} x_1\varphi(x_1)dx_1 . \qquad (10.53)$$

Reprezentarea grafică a traiectoriilor de fază este dată în figura 10.17.

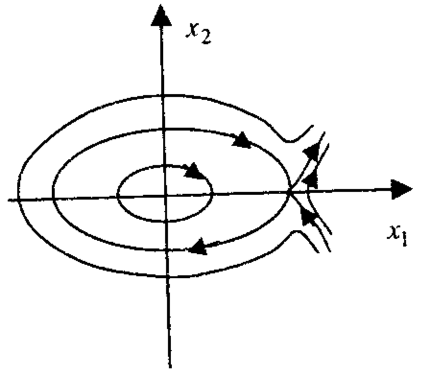


Fig. 10.17

Construcţia curbelor este uşor de urmărit din figura 10.18.

Originea coordonatelor, care este o *singularitate de tip „centru"*, este înconjurată prin traiectorii închise (însă nu elipse). Există, de asemenea, un punct singular de tip *şa* la punctul $x_1 = y_a$, pe axa abscisei. Traiectoria care trece prin acest punct este reprezentată printr-o linie îngroşată. Ea divide planul fazelor în regiuni cu diferite legi de mişcare: traiectoriile în regiunea I sunt închise, în regiunea II ele se apropie de hiperbole, în timp ce traiectoriile din regiunea III ocolesc regiunea I şi se extind spre infinit.

Dacă ecuaţiile de mişcare nu pot fi rezolvate analitic în vederea obţinerii ecuaţiei traiectoriei de fază, se poate folosi *metoda izoclinelor* pentru construcţia grafică aproximativă a traiectoriilor. Astfel, dacă presupunem că ecuaţiile unui sistem autonom au fost reduse la forma:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \phi(x_1, x_2), \qquad (10.54)$$

notând panta traiectoriilor de fază în raport cu axa x_1 printr-o valoare constantă arbitrară c_i, avem:

$$\phi(x_1, x_2) = c_i \qquad (10.55)$$

Prin atribuirea de valori diferite c_i, se poate construi o familie de curbe de pantă constantă (izocline). La punctul de intersecţie cu o izoclină, traiectoria de fază are o pantă egală cu $\arctan c_i$. În [88] sunt prezentate metode grafice de construcţie a traiectoriilor de fază (inclusiv metoda izoclinelor).

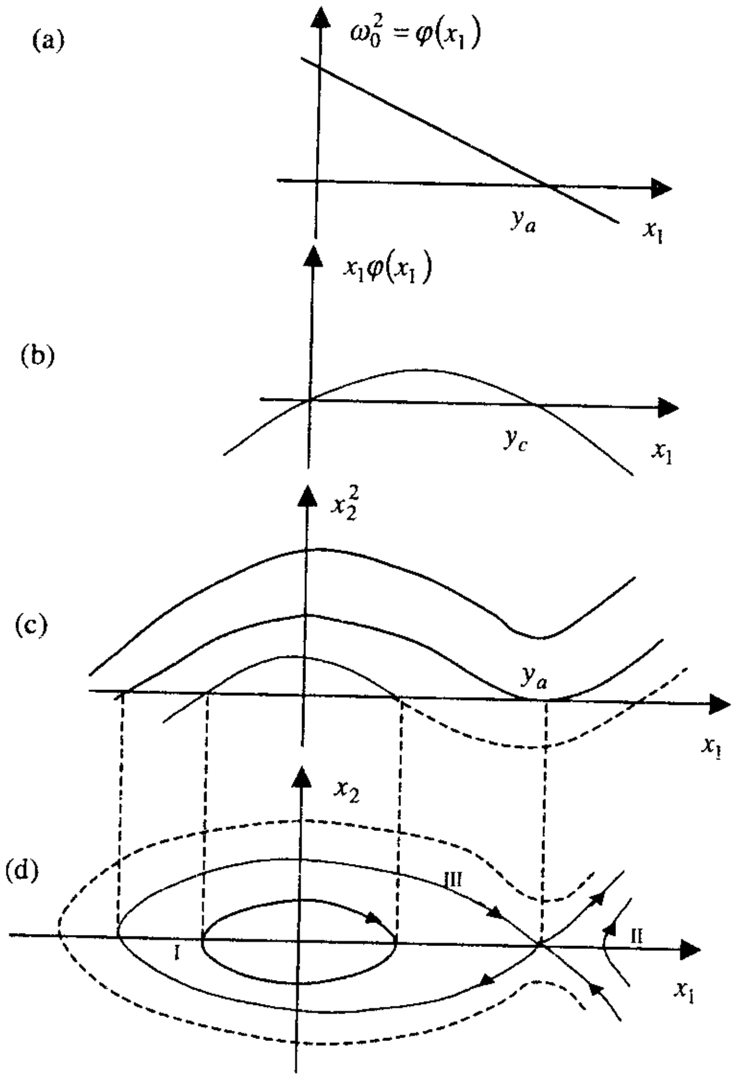


Fig. 10.18

Sisteme neliniare cu neliniarităţi de tip releu. Pentru a exemplifica modul de trasare a traiectoriilor de fază, considerăm o structură de sistem cu parte liniară formată din două integratoare şi parte neliniară definită prin funcţia $\varphi(\sigma)$ (fig. 10.19).

Sistemul închis este un sistem oscilant conservativ. În cazul unui releu ideal, obţinem:

$$\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \pm\frac{K}{x_2}$$

$$\frac{\dot{x}_2^2}{2} \pm Kx_1 = C \qquad (10.56)$$

$$y = x_1 = \sigma,\ v = \pm K$$

dacă

$$v = \begin{cases} K, & \sigma > 0 \\ -K, & \sigma < 0 \end{cases}$$

unde K şi C sunt constante.

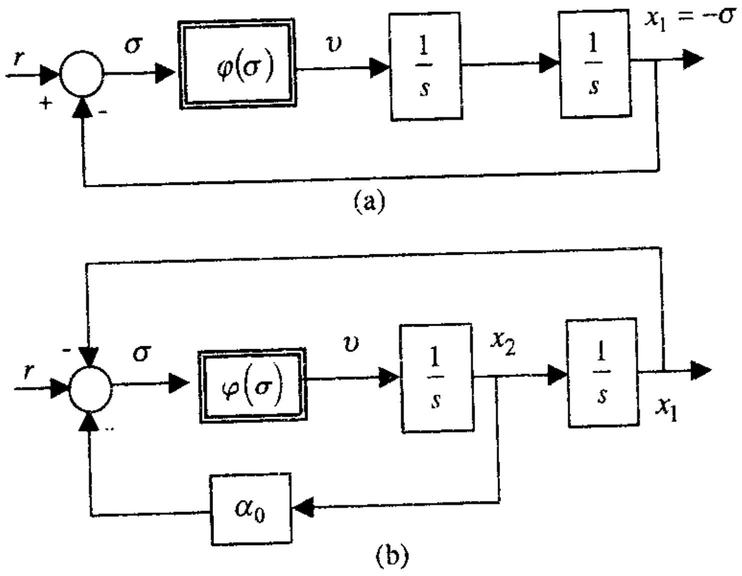
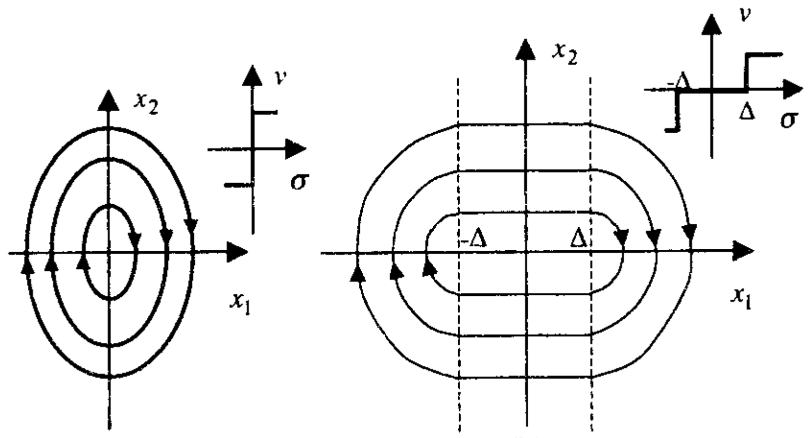


Fig. 10.19

Ecuaţia traiectoriei de fază este ecuaţia unei parabole. Astfel, traiectoriile de fază vor fi curbe închise, formate din fragmente de parabole (fig. 10.20*a*) Introducerea zonei de insensibilitate va determina apariţia în planul fazelor şi a unor părţi liniare în domeniul $(-\Delta,+\Delta)$ ca în figura 10.20*b*. Dacă se folosesc relee cu histerezis pozitiv, procesul va fi divergent, în timp ce prezenţa histerezisului negativ asigură convergenţa procesului (10.21*a*). Analiza traiectoriilor de fază pentru sistemele neliniare cu relee permite a evidenţia influenţa diverşilor factori (zonă de insensibilitate, histerezis) asupra stabilităţii şi convergenţei sistemelor.



(a) (b)

Fig. 10.20

Presupunem în continuare că acțiunea releului depinde nu numai de coordonata x_1, însă de asemenea depinde de derivata în timp a acestei coordonate (fig. 10.21*b*):

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}+\varphi(\sigma)=0$$

$$\sigma=-(x_1+\alpha_0x_2),\ (r=0) \tag{10.57}$$

$$\varphi(\sigma)=\begin{cases}K, & \sigma>0\\ -K, & \sigma<0\end{cases}$$

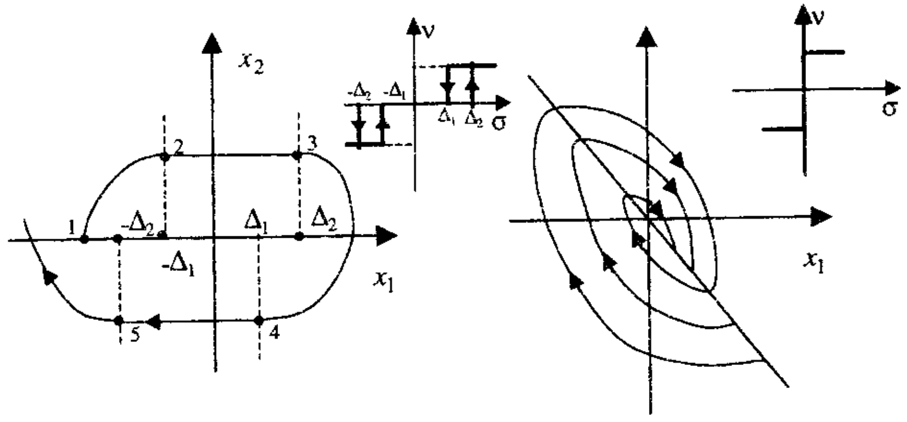
În acest caz, linia de comutare nu va coincide cu axa x_1 și nu va fi paralelă cu această axă. Linia de comutare va fi descrisă de ecuația:

$$\sigma=x_1+\alpha_0\frac{dx_1}{dt}=0 \tag{10.58}$$

Înclinarea acestei linii indică faptul că la o distanță considerabilă de origine, procesele în sistemul cu releu ideal devin atenuate (fig. 10.21*b*).

În același timp, un regim alunecător este observat în vecinătatea originii. Traiectoriile de fază în cazul unui releu ideal sunt formate din segmente de parabole. Să considerăm două parabole la care linia de comutare MN va fi tangentă în punctele A și B (fig. 10.22). Pe porțiunea AB a liniei de comutare traiectoriile de fază se vor apropia de linia de comutare din ambele părți ale segmentului AB, între punctele de tangență A și B, pe când, pe porțiunea MA, traiectoriile se apropie de linia de comutare doar din partea stângă. Când punctul reprezentativ atinge partea AB a liniei de

comutare, adică partea alunecătoare, el este incapabil de a o părăsi. Totuşi linia de comutare este linia de discontinuitate pentru partea dreaptă a ecuațiilor (10.56).



(a) (b)

Fig. 10.21

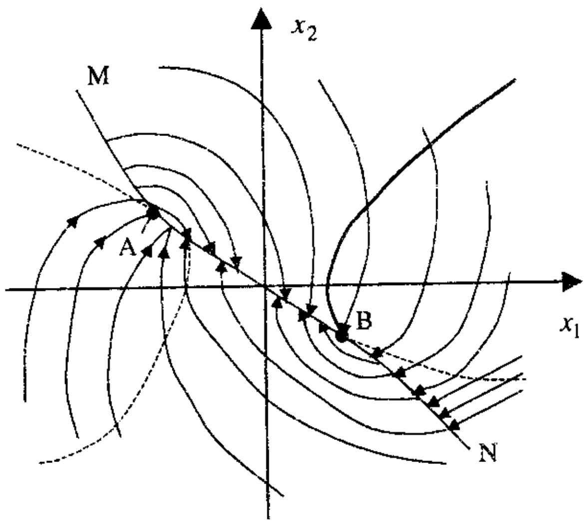


Fig. 10.22

Prin urmare, mişcarea de-a lungul liniei de comutare nu este determinată de aceste ecuații. Ca și în cazul caracteristicilor discontinue, această mișcare este obținută prin extinderea ecuației. Această extindere presupune ca în orice punct din regimul alunecător liniile de discontinuitate să fie determinate prin construirea vectorilor de viteză v_1 și v_2 pe ambele părți ale liniei de discontinuitate și unirea vârfurilor lor (fig. 10.23).

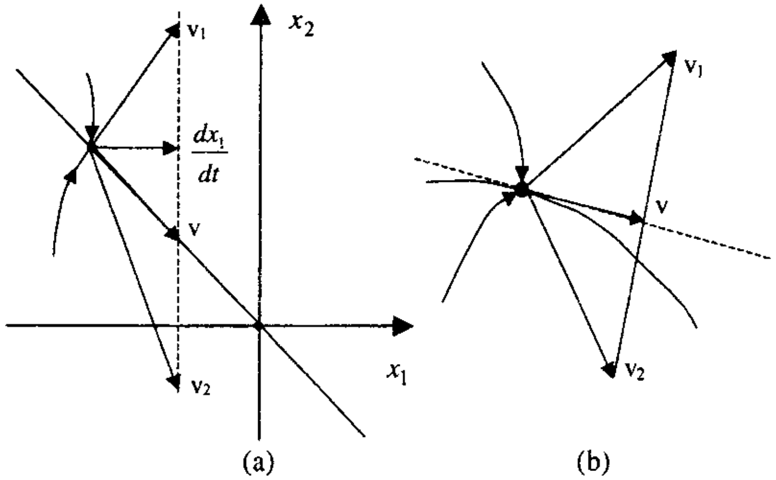


Fig. 10.23

Vectorul cerut v este direcţionat din acest punct de-a lungul tangentei la linia de discontinuitate şi are vârful plasat pe linia ce uneşte vârfurile celor doi vectori v_1 şi v_2 (fig. 10.23). În acest caz, linia de discontinuitate este o linie dreaptă, iar viteza de modificare a coordonatei x_1 este $\frac{dx_1}{dt} = x_2$ şi este aceeaşi pe linia de comutare.

Valorile lui $\frac{dx_1}{dt}$ şi x_1 pe linia dreaptă sunt legate prin ecuaţia (10.58).

Această ecuaţie va defini legea de variaţie a lui x_1 de-a lungul segmentului de alunecare. Este de remarcat faptul că mişcarea în regim alunecător este determinată numai prin parametrii şi ecuaţiile (10.56). Această ecuaţie este uzual obţinută în forma liniară cu ajutorul corecţiei liniare şi astfel liniarizarea alunecătoare a unui sistem cu releu este obţinută prin descreşterea ordinului ecuaţiei. Astfel, datorită inerţiei releului, procesul de alunecare nu este mai încet netezit şi constă din oscilaţii de mică amplitudine şi înaltă frecvenţă în jurul liniei de alunecare. Linia de comutare nu este o traiectorie de fază, deşi ea poate fi făcută să coincidă cu o traiectorie (fig. 10.24). În acest caz, procesul va consta din două etape: apropierea de linia de comutare de-a lungul unor traiectorii a căror alegere depinde de condiţiile iniţiale şi mişcarea spre poziţia de echilibru (originea) de-a lungul liniei de comutare. Mişcarea de-a lungul liniei de comutare este exact determinată de ecuaţiile diferenţiale şi nu este necesară nici o extensie.

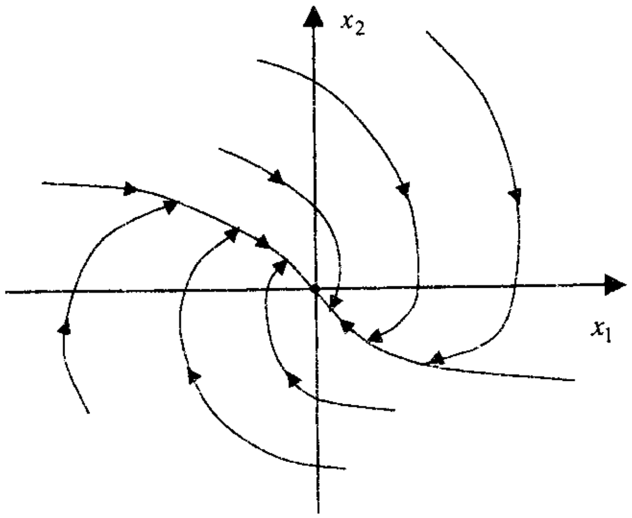


Fig. 10.24

Un asemenea proces este optimal în viteză pentru ecuaţiile (10.56) dacă o restricţie este impusă asupra derivatei a doua $\left|\frac{dx_2}{dt}\right| \le K$.

Pentru sistemul cu un releu ideal considerat mai sus, ecuaţia pentru legea de comutare trebuie să aibă următoarea formă:

$$\sigma = x_1 + \alpha_0 x_2 |x_2| = 0, \ \alpha_0 = \frac{1}{2K}$$

$$K\sigma = -\frac{x_2^2}{2} + Kx_1 = 0, \ x_2 < 0 \qquad (10.59)$$

$$K\sigma = \frac{x_2^2}{2} + Kx_1 = 0, \ x_2 > 0,$$

adică ecuaţia liniei de comutare este identică cu ecuaţia traiectoriei de fază.

10.3.3. Cicluri limită în planul fazelor

Ciclurile limită reprezintă *curbe închise în planul fazelor, către care tind asimptotic* dintr-o vecinătate determinată toate traiectoriile, atât din interior, cât şi din exterior în cazul în care sunt *cicluri limită stabile* sau *de la care diverg* traiectorii, atât spre interior, cât şi spre exterior în cazul ciclurilor limită instabile, traiectorii perturbate de la aceste traiectorii închise (fig. 10.25).

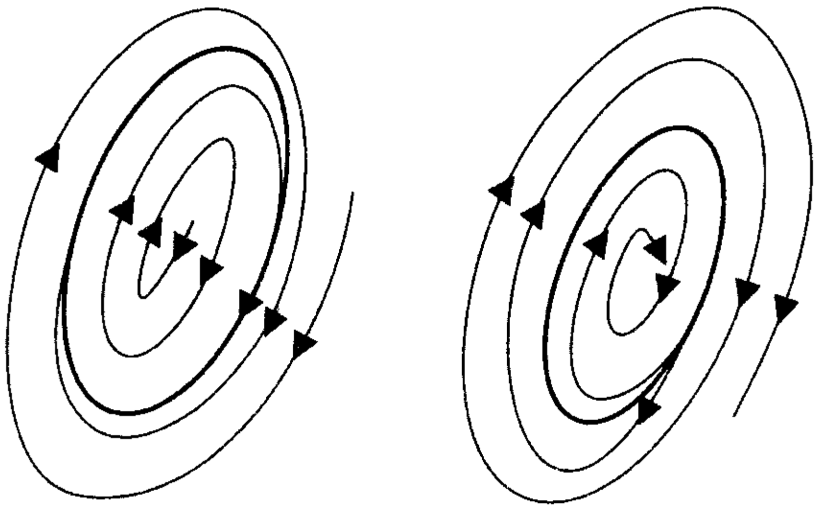


Fig. 10.25

Pentru a ilustra asemenea traiectorii închise (cicluri limită), vom considera următorul sistem neliniar de ordinul al doilea:

$$\ddot{y} + a_1(y, \dot{y})\dot{y} + a_0 y = 0,\ y(0) = y_0,\ \dot{y}(0) = \dot{y}_0, \qquad (10.60)$$

unde $a_1(y, \dot{y})$ este un coeficient variabil.

Presupunem că $a_0 = 1$ şi $a_1(y, \dot{y}) = \xi\left(1 - y^2 - \dot{y}^2\right)$, cu ξ un factor de proporţionalitate. În vecinătatea originii planului $y = x_1$, $\dot{y} = x_2$ pătratele acestor coordonate sunt neglijabile în raport cu aproximaţiile lor liniare, iar ecuaţia (10.60) devine liniară:

$$\ddot{y} + \xi\dot{y} + y = 0 = x_0$$
$$y(0) = x_0 \cong 0$$
$$\dot{y}(0) = \dot{y}_0 \approx 0$$

şi admite un punct de echilibru în origine stabil pentru $\xi > 0$ şi instabil dacă $\xi < 0$.

În *cazul instabil* ($\xi < 0$), care corespunde fie unui focar pentru $\xi^2 - 4 < 0$, fie unui nod $\xi^2 - 4 > 0$, orice perturbaţie de la condiţiile iniţiale $x_{10} = 0$, $x_{20} = 0$ determină o traiectorie divergentă, iar cu îndepărtarea de origine scade amortizarea, până când se anulează pe cercul $y^2 + \dot{y}^2 = x_1^2 + x_2^2 = 1$. Se observă că acest cerc reprezintă o traiectorie închisă, un ciclu stabil, deoarece perturbaţiile interioare determină amortizarea negativă şi amplitudinea oscilaţiilor creşte, iar perturbaţiile exterioare generează procese cu amortizare pozitivă şi amplitudinea scade (fig. 10.26).

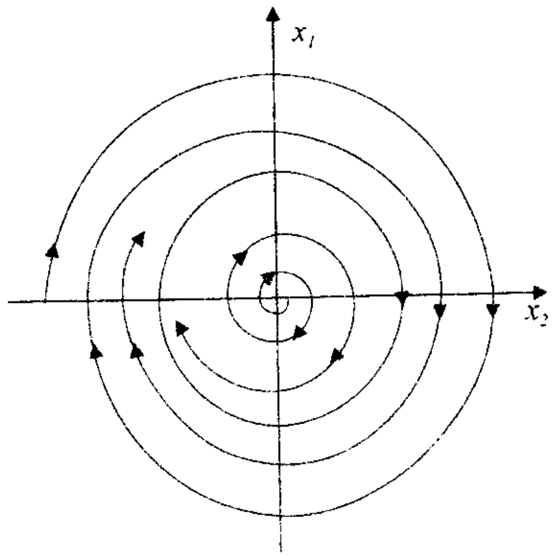


Fig. 10.26

Orice sistem la care punctul de echilibru $x_1 = x_2 = 0$ este instabil, iar ciclul limită este unic şi este stabil, se numeşte *instabil în mic* şi *stabil în mare*.

În *cazul stabil* ($\xi > 0$), toate traiectoriile la care $1 - y^2 - \dot{y}^2 > 0$ converg către acest punct, care poate fi focar stabil, dacă $\xi^2 - 4 < 0$ sau nod stabil, dacă $\xi^2 - 4 > 0$.

Sistemul în acest caz se numeşte *stabil în mic*. Şi în acest caz traiectoria $y^2 + \dot{y}^2 = x_1^2 + x_2^2 = 1$ este un ciclu limită, dar orice perturbaţie, oricât de mică, de la aceasta înscrie sistemul, fie pe o traiectorie interioară ($y_0^2 + \dot{y}_0^2 < 1$) care evoluează spre punctul de echilibru $x_1 = x_2 = 0$, fie pe o traiectorie exterioară ($y_0^2 + \dot{y}_0^2 > 1$), care se îndepărtează nemărginit de ciclul limită. În acest caz, avem un ciclu limită instabil reprezentat cu linie întreruptă în figura 10.27*a*. În lipsa altor caracteristici care să limiteze îndepărtarea de ciclul limită spre exterior (ca de exemplu un alt ciclu limită stabil), spunem că sistemul este *instabil în mare*.

Aceste modele simple din plan arată că şi *ciclurile limită au rolul de separatoare*, cel puţin la sistemele de ordinul al doilea. Anume acestea, indiferent de numărul lor, separă domeniile în care traiectoriile de mişcare (tranzitorie) converg de acelea în care aceste traiectorii sunt divergente (fig. 10.27*b*).

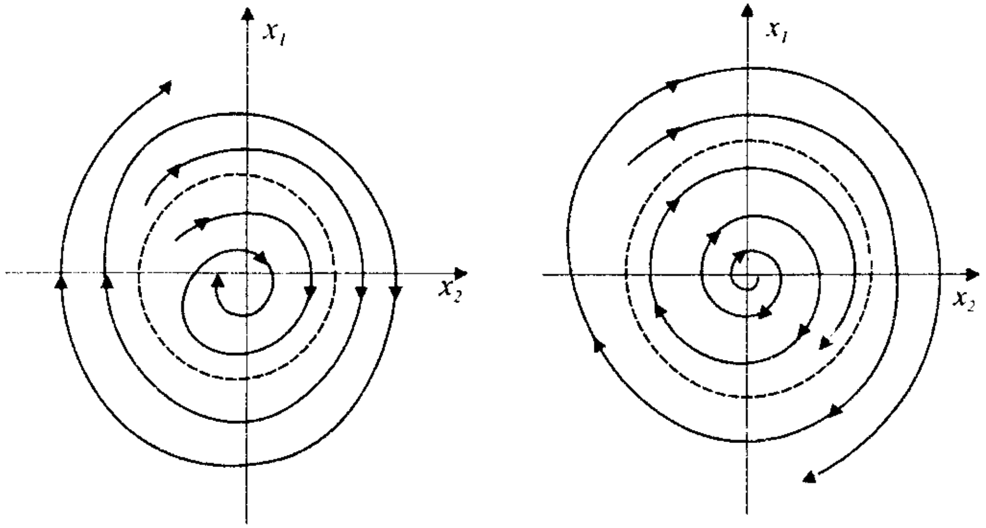


Fig. 10.27

Prezenţa sau absenţa ciclurilor limită în tabloul calitativ de mişcare depinde de tipul neliniarităţilor şi de parametrii părţii liniare. Pentru neliniarităţi date, cu modificarea parametrilor părţii liniare, punctele de echilibru instabile pot deveni stabile şi invers. Valorile parametrilor pentru care are loc o asemenea inversare se numesc *valori limită* sau *de bifurcaţie* şi formează curbe sau suprafeţe de bifurcaţie în spaţiul acestor parametri.

Asemenea bifurcaţii pot determina în acelaşi timp apariţia sau dispariţia unor cicluri limită, odată cu domeniile respective de instabilitate sau stabilitate în mic.

În cazul general, pentru un sistem neliniar descris prin ecuaţiile:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1,x_2)\\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1,x_2)\end{aligned} \qquad (10.61)$$

se pot formula teoreme de existenţă a ciclurilor limită în plan sau soluţii periodice ale ecuaţiilor (10.61).

Criteriul Bendixon. Acest criteriu stabileşte suficienţe pentru ca în sistemele bidimensionale să nu existe cicluri limită în afara punctelor de echilibru [34, 88].

Dacă se consideră domeniul D mărginit, criteriul stabileşte că dacă

$$\frac{df_1}{dx_1}+\frac{df_2}{dx_2} := div[f(x)] \qquad (10.62)$$

nu schimbă semnul şi nu devine identic zero, atunci în acest domeniu nu pot exista traiectorii închise (cicluri limită).

Acest criteriu rezultă din faptul că ecuaţiile (10.61) sunt echivalente cu:

$$\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{f_2(x_1,x_2)}{f_1(x_1,x_2)}.$$

cu excepţia punctelor în care $f_1=0$ sau, pe orice traiectorie a sistemului avem:

$$f_1dx_2-f_2dx_1=0. \qquad (10.63)$$

Admiţând că există un ciclu limită în D_c, putem lua acest ciclu limită ca frontiera C a domeniului D_c şi atunci, din (10.63) decurge:

$$\oint(f_1dx_2-f_2dx_1)=0.$$

Trecând de la integrale de contur la integrale echivalente Gauss pe domeniul D_c, se obţine:

$$\iint_{D_c}\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right]dx_1dx_2=0 \qquad (10.64)$$

Dar mărimea de sub integrala plană are semn constant şi valoarea integralei nu poate fi nulă. Din această contradicţie rezultă criteriul enunţat [84]. În teoria şi practica sistemelor neliniare de ordinul al doilea, o importanţă deosebită prezintă ***ecuaţia lui Lienard***:

$$\ddot{y}+f(y)\dot{y}+g(y)=0 \qquad (10.65)$$

pentru care se formează funcţiile integrale

$$F(y)=\int_0^y f(s)ds, G(y)=\int_0^y g(s)ds. \qquad (10.66)$$

Ecuaţia (10.65) se mai scrie şi sub forma:

$$\begin{aligned}\dot{y}&=z-F(y)\\ \dot{z}&=-g(y)\end{aligned} \qquad (10.67)$$

care evidenţiază câteva *proprietăţi remarcabile*.

Astfel, dacă:

– $g(y)$ îndeplineşte condiţiile lui Lipschitz şi, în plus, $yg(y)>0$ pentru $y\neq 0$, iar $\lim_{y\to\infty} G(y)=\infty$,

– $F(y)$ este o funcţie univocă în intervalul $y\in(-\infty,+\infty)$ şi pentru orice interval finit, îndeplineşte condiţiile lui Lipschitz; în plus, pentru orice y suficient de mic $yF(y)<0$,

– există numerele M, K_1 şi $K_2>K_1$, toate pozitive, astfel încât:

$F(y)\geq K_1$ pentru $y>M$

$F(y)\leq K_2$ pentru $y<-M$,

atunci ecuaţia (10.65) cu (10.66) *admite cel puţin un ciclu limită*.

Sistemul (10.65) cu (10.66) admite un singur ciclu limită, dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:

- $g(y)$ este o funcţie impară, iar $g(y)>0$ pentru $y>0$;
- $F(y)$ este o funcţie impară şi există y_0, astfel ca $F(y)<0$ pentru $y\in(0,y_0)$, iar $F(y)\geq 0$ şi creşte monoton cu $y\geq y_0$;
- $F(\infty)=G(\infty)=\infty$;
- $f(y)$ şi $g(y)$ îndeplinesc condiţiile lui Lipschitz pe orice interval finit.

În [88] sunt prezentate şi alte teoreme şi criterii pentru existenţa ciclurilor limită.

Metoda planului fazelor permite analiza calitativă a evoluţiei unui sistem dinamic liniar sau neliniar, cu evidenţierea unor puncte de echilibru stabile sau instabile, respectiv cicluri limită stabile şi instabile. De remarcat faptul că în planul fazelor se poate obţine un portret de fază pentru diferite condiţii iniţiale ale sistemului. Traiectoriile de fază gradate în timp permit de asemenea evidenţierea unor indici cantitativi pentru evaluarea calităţii răspunsului sistemului. Metoda planului fazelor reprezintă o metodă topologică de analiză a sistemelor neliniare, cu largă aplicabilitate pentru clase largi de sisteme.

10.4. Analiza intrare-ieşire a sistemelor neliniare

În acest paragraf se prezintă unele elemente introductive ale analizei sistemelor neliniare pe baza modelelor intrare-ieşire. În prima parte se prezintă metoda funcţiei de descriere care reprezintă o metodă de aproximare liniară a sistemelor neliniare. Metoda funcţiei de descriere permite analiza posibilităţilor de apariţie a oscilaţiilor într-un SRA care conţine unele neliniarităţi în buclă. În cea de a doua parte a paragrafului se analizează stabilitatea intrare-ieşire a sistemelor neliniare.

Pentru a defini funcţia de descriere, care reprezintă un aproximant liniar al sistemului neliniar, considerăm o structură de sistem neliniar în cadrul căruia neliniarităţile sunt grupate în blocul N, iar partea liniară are ca intrare ieşirea v a subsistemului neliniar (fig. 10.28).

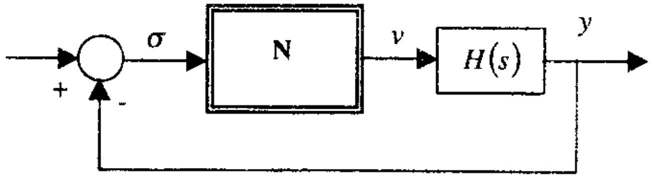


Fig. 10.28

10.4.1. Funcţia de descriere

Admitem că partea liniară are o comportare de filtru trece-jos, adică permite trecerea numai a armonicii fundamentale

$$|H(j\omega)|\rangle\rangle|H(kj\omega)|,\ k=2,3\ldots,$$

în condiţiile în care semnalul v se obţine ca soluţie periodică din dezvoltarea în serie Fourier a răspunsului părţii neliniare la un semnal sinusoidal aplicat la intrare.

Metoda aproximării răspunsului sistemului neliniar cu prima armonică din dezvoltarea în serie Fourier este aplicabilă unei clase foarte largi de caracteristici neliniare discontinue, simetrice, nesimetrice etc. Presupunem că sistemul neliniar este descris prin ecuaţiile:

$$y=-H(s)\nu \qquad \nu=\varphi(\sigma) \tag{10.68}$$

cu

$$H(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}.$$

Variaţiile sinusoidale ale variabilelor de intrare şi ieşire ale părţii liniare sunt definite prin relaţia:

$$\tilde{y}=H(j\omega)\tilde{\nu}, \tag{10.69}$$

unde $\tilde{y}$ şi $\tilde{v}$ sunt variabile de ieşire şi intrare care variază după o lege sinusoidală.

Relaţia între armonicile fundamentale ale variabilelor de ieşire şi intrare $\tilde{v}$ şi $\tilde{\sigma}$ ale părţii neliniare se stabileşte cu ajutorul unei funcţii complexe, denumită *coeficient de transfer armonic* sau *funcţie de descriere*. Presupunem că intrarea unui element neliniar staţionar este o funcţie periodică armonică

$$\tilde{\sigma}=A\sin\omega t$$

şi funcţia neliniară care defineşte caracteristica elementului neliniar satisface condiţiile Dirichlet [8, 34, 88]. Atunci variabila de ieşire din elementul neliniar va fi o funcţie periodică, ce poate fi dezvoltată în serie Fourier. Ca urmare a comportării părţii liniare ca filtru trece-jos, vor fi reţinute din dezvoltarea în serie Fourier a funcţiei v numai componenta constantă şi termenii ce conţin prima armonică.

Astfel, ieşirea periodică din elementul neliniar, prin dezvoltarea în serie Fourier ($t\geq 0$) are forma aproximativă

$$\tilde{v}\cong A_0+B_1\sin\omega t+C_1\cos\omega t \tag{10.70}$$

întrucât componentele

$$B_i \sin(i\omega t) + C_i \cos(i\omega t),$$

pentru $i \geq 2$ sunt neglijate.

Dacă se consideră neliniaritatea $\varphi(\sigma)$ simetrică, adică $\varphi(\sigma) = -\varphi(-\sigma)$, atunci armonica fundamentală la ieşirea elementului neliniar este:

$$\tilde{\nu} = B_1 \sin\omega t + C_1 \cos\omega t \tag{10.71}$$

unde B_1 şi C_1 sunt coeficienţii seriei Fourier:

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(A\sin\psi)\sin\psi d\psi \\ C_1 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(A\sin\psi)\cos\psi d\psi, \end{aligned} \tag{10.72}$$

unde $\psi = \omega t$.

În locul cantităţilor B_1 şi C_1, pentru definirea funcţiei de descriere se folosesc rapoartele B_1 / A şi C_1 / A:

$$a = \frac{B_1}{A} = \frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} \varphi(A\sin\psi)\sin\psi d\psi$$

$$b = \frac{C_1}{A} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(A\sin\psi)\cos\psi d\psi.$$

Aceasta dă, ţinând seama de (10.71):

$$\tilde{\nu} = A(a\sin\omega t + b\cos\omega t). \tag{10.73}$$

Pentru simplificarea calculelor, funcţiile trigonometrice sunt adesea înlocuite prin funcţii complexe, variabilele reale $\tilde{y}$, $\tilde{\nu}$ şi $\tilde{\sigma}$ sunt înlocuite prin valorile complexe cu aceeaşi parametri, adică amplitudini, frecvenţă şi fază. Expresia complexă pentru (10.73) are forma:

$$\tilde{\nu} = A(a + jb)e^{j\omega t} = (a + jb)\tilde{\sigma}. \tag{10.74}$$

Raportul

$$N(A, j\omega) = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{\sigma}} = a + jb = \sqrt{a^2 + b^2}e^{j\varphi_n}, \tag{10.75}$$

unde $\sqrt{a^2 + b^2} = h_n$, este raportul amplitudinilor lui $\tilde{\nu}$ şi $\tilde{\sigma}$, iar $\varphi_n = \arctan b / a$ este defazajul lui $\tilde{\nu}$ faţă de $\tilde{\sigma}$, *poartă denumirea de coeficient de transfer armonic* sau *funcţie de descriere a elementului neliniar.*

Astfel, funcţia de descriere este un număr complex care este o funcţie, atât de frecvenţa ω, cât şi de amplitudinea A a intrării sinusoidale.

Ţinând seama de definiţia funcţiei de descriere, remarcăm următoarele proprietăţi:

– dacă neliniaritatea $\varphi(\sigma)$ este fără memorie şi invariantă în timp, atunci $N(A, \omega)$ este independentă de ω, iar coeficienţii $B_1(A)$ şi $C_1(A)$ se calculează cu ajutorul relaţiilor (10.72);

– presupunând că funcţia $\varphi(\cdot)$ este impară şi limitată sectorial, adică:

$$K_1\sigma^2 \leq \sigma\varphi(\sigma) \leq K_2\sigma^2, \ \forall\sigma \in \Re, \tag{10.76}$$

atunci funcţia de descriere satisface:

$$K_1 \leq N(A) \leq K_2. \tag{10.77}$$

Demonstrarea celor două proprietăţi reprezintă un exerciţiu util pentru cititor.

Pentru a exemplifica modul de obţinere a funcţiei de descriere, considerăm un element ce conţine neliniarităţi statice combinate, zonă de insensibilitate şi saturaţie. Asemenea neliniarităţi întâlnim în funcţionarea elementelor de execuţie într-un SRA.

Comportarea neliniară a acestui element este prezentată în figura 10.29 şi este descrisă de ecuaţiile:

$$v = \varphi(\sigma) = \begin{cases} S\,\mathrm{sgn}(\sigma) \text{ pentru } \sigma \leq -\Delta_1 \\ K(\sigma + \Delta) \text{ pentru } \sigma \in (-\Delta_1, -\Delta) \\ 0 \text{ pentru } \sigma \in [-\Delta, \Delta] \\ K(\sigma - \Delta) \text{ pentru } \sigma \in (\Delta, \Delta_1) \\ S\,\mathrm{sgn}(\sigma) \text{ pentru } \sigma \geq \Delta_1 \end{cases} \tag{10.78}$$

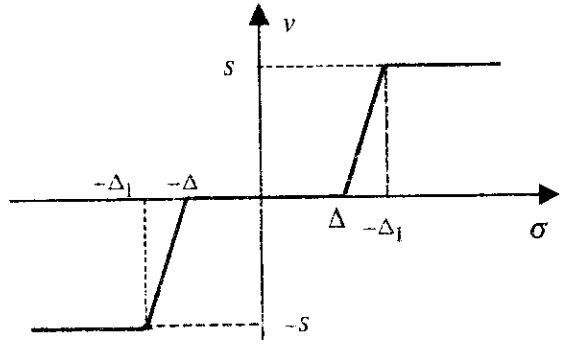


Fig. 10.29

Caracteristica este simetrică şi $b=0$, iar $K=S/\Delta_1-\Delta$. Admiţând la intrarea neliniarităţii un semnal sinusoidal $\tilde{\sigma}(t)=A\sin(\psi)$ se obţine variaţia ieşirii $\tilde{v}$ ţinând seama de particularităţile neliniarităţii (fig. 10.30).

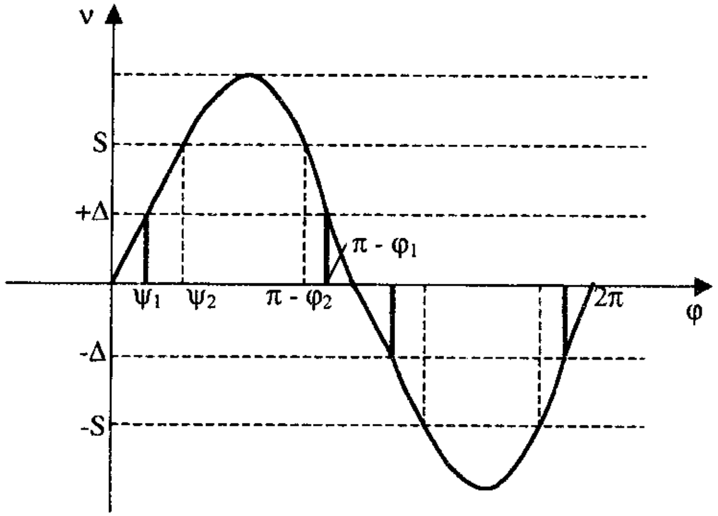


Fig. 10.30

Pentru a determina ψ_1 şi ψ_2, se observă că $\Delta=A\sin(\psi_1)$, iar $\Delta_1=A\sin(\psi_2)$, ilustrând astfel zona de insensibilitate şi saturaţie.

În intervalul $\sigma\in(\Delta,\Delta_1)$ sau $\psi\in(\psi_1,\psi_2)$ variabila depinde liniar de $\tilde{\sigma}$:

$$\tilde{v}=k(\sigma-\Delta)=k(A\sin\psi-\Delta)=kA(\sin\psi-\sin\psi_1).$$

În intervalul $\psi\in(\psi_2,\pi\text{-}\psi_2)$ valoarea lui $\tilde{v}$ rămâne constantă şi egală cu S.

Ţinând seama că cele două curbe 1 şi 2 sunt simetrice faţă de linia dreaptă $\psi=\frac{\pi}{2}$ şi $\psi=\frac{3\pi}{2}$, se poate calcula funcţia de descriere folosind relaţia:

$$a=\frac{4}{\pi A}\int_{\psi_1}^{\psi_2}KA(\sin\psi-\sin\psi_1)\sin\psi d\psi+\frac{4S}{\pi A}\int_{\psi_2}^{\pi/2}\sin\psi d\psi$$

sau după efectuarea calculelor:

$$a=\frac{K}{\pi}(2\psi_2+\sin 2\psi_2-2\psi_1-\sin 2\psi_1) \qquad (10.79)$$

S-a considerat că $\tilde{v}$ este egal cu zero pentru $|\sigma|<\Delta$, $\psi<\psi_1$, iar ψ_1 se consideră limita inferioară a integralei. Domeniul $\left(\psi_1,\ \frac{\pi}{2}\right)$ a fost împărţit în două intervale (ψ_1,ψ_2) şi $\left(\psi_2,\ \frac{\pi}{2}\right)$, în cadrul cărora funcţia este bine definită. Următoarele cazuri speciale pot apărea:

– *nu există saturaţie*: $\psi_2=\frac{\pi}{2}$, caz în care

$$a=\frac{K}{\pi}(\pi-2\psi_1-\sin 2\psi_1)=\frac{K}{\pi}(\alpha-\sin\alpha) \text{ unde } \alpha=\pi-2\psi_1;$$

– *nu există zonă de insensibilitate, însă există saturaţie* $(\psi_1=0)$

$$a=\frac{K}{\pi}(2\psi_2-\sin 2\psi_2);$$

– *caracteristică releu cu zonă de insensibilitate* $\psi_2=\psi_1$: prima integrală în (10.79) este omisă, şi

$$a=4S/\pi A\cos\psi_2;$$

– *caracteristică releu fără zonă de insensibilitate*: $\Delta=0$ şi $\cos\psi_2=1$ şi, în acest caz, obţinem

$$a=\frac{4S}{\pi A}.$$

Pentru neliniarităţi cu histerezis se calculează, atât g, cât şi b, funcţia de descriere având în acest caz formă completă.

Pentru neliniaritatea de tip releu cu zonă de insensibilitate şi histerezis (fig. 10.31), funcţia de descriere se calculează apelând la relaţiile:

$$a=\frac{2M}{\pi A}\int_{\psi_1}^{\pi-\psi_2}\sin\psi d\psi=\frac{2M}{\pi A}(\cos\psi_1+\cos\psi_2)$$

$$\psi_1=\arcsin\frac{\Delta_1}{A},\ \psi_2=\arcsin\frac{\Delta}{A} \qquad (10.80)$$

$$b=\frac{2M}{\pi A}\int_{\psi_2}^{\pi-\psi_2}\cos\psi d\psi=\frac{2M}{\pi A^2}(\Delta-\Delta_1).$$

Pentru $\frac{\Delta}{\Delta_1}=-1$ se obţine caracteristica de tip releu cu histerezis centrat în origine. Aici:

$$b=\frac{4M\Delta_1}{\pi A^2}$$

$$a=\frac{4M}{\pi A}\sqrt{1-\Delta_1^2/\Delta^2}. \qquad (6.81)$$

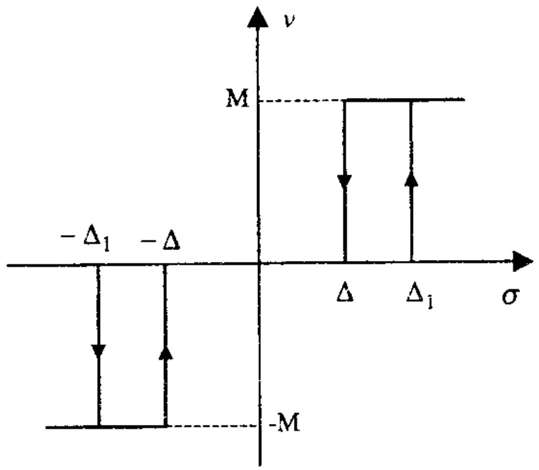


Fig. 10.31

Într-o manieră similară se pot deduce funcţii de descriere pentru toate neliniarităţile statice sau asimetrice ce pot fi întâlnite în structura sistemelor neliniare.

10.4.2. Analiza oscilaţiilor într-un SRA neliniar

Se consideră structura convenţională de SRA neliniar (fig. 10.32), unde partea neliniară este aproximată prin funcţia de descriere $N(A, j\omega)$, iar referinţa este egală cu zero.

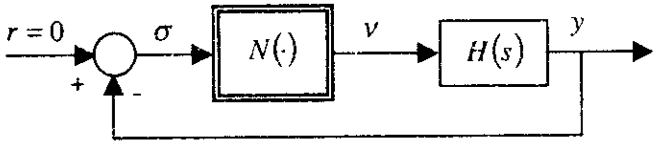


Fig. 10.32

Una dintre utilizările majore ale funcţiei de descriere este de a permite predictarea oscilaţiilor în sistemele de reglare neliniare.

Pentru cele două subsisteme prezente în structura dată din figura 10.32 pot fi scrise ecuaţiile:

$$v = N\sigma$$
$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)\nu(\tau)d\tau. \qquad (10.82)$$

Dacă ţinem seama că funcţia de descriere are o armonică fundamentală $\bar{v} = Aa\sin\omega t + jAb\cos\omega t$, atunci armonica fundamentală a lui $y(\cdot)$ este dată de $UA\sin\omega t + VA\cos\omega t$, dacă $U(A,\omega) + jV(A,\omega) = H(j\omega)\cdot N(A,\omega)$.

În aceste condiţii, ecuaţia caracteristică a SRA sau ecuaţia balansului armonic are forma:

$$1 + H(j\omega)N(A,\omega) = 0. \qquad (10.83)$$

Ecuaţia (10.83) are două necunoscute, A şi ω, şi două ecuaţii.

Metoda funcţiei de descriere arată că soluţiile (A,ω) reprezintă aproximativ frecvenţa şi amplitudinea oscilaţiilor generate la limita de stabilitate a SRA.

Testul (10.83) poate fi utilizat grafic, în special dacă neliniarităţile sunt fără memorie. În acest caz, $N(A,\omega)$ este real, nenegativ şi independent de ω, iar (10.83) capătă forma:

$$1 + H(j\omega)N(A) = 0. \qquad (10.84)$$

Grafic această ecuaţie este rezolvată în planul Nyquist (fig. 10.33).

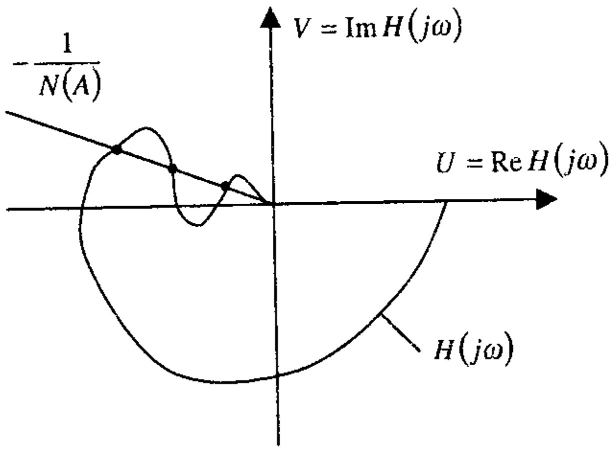


Fig. 10.33

Punctele de intersecţie ale locului Nyquist cu locul invers $-\frac{1}{N(A)}$ evidenţiază frecvenţa oscilaţiilor pe locul Nyquist şi amplitudinea acestora pe locul invers al funcţiei de descriere.

Prin deplasarea de-a lungul curbei $-\frac{1}{N(A)}$ în direcţia creşterii amplitudinii A, pentru sistemul deschis stabil, soluţia periodică va deveni

instabilă la punctul de intersecţie a celor două curbe (locul de transfer şi $-\frac{1}{N(A)}$). În figura 10.34 se prezintă cazul general al SRA cu neliniarităţi aproximate prin funcţii de descriere $N(A, j\omega)$, unde curba ce reprezintă $-\frac{1}{N(A, j\omega)}$ este parametrizată în A.

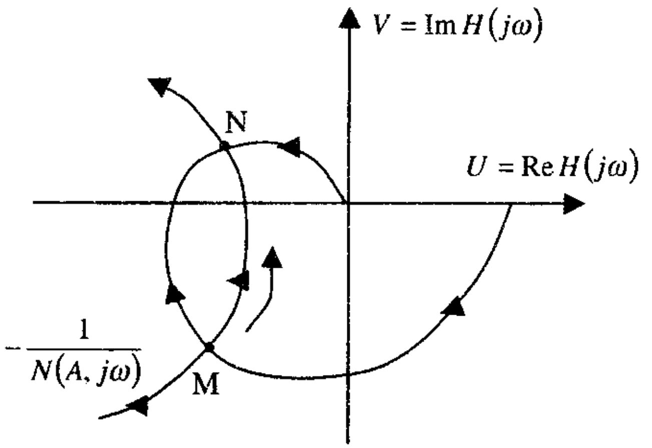


Fig. 10.34

Punctele M şi N în figura 10.34 corespund la soluţii periodice stabile, respectiv instabile. Porţiunea MN a curbei $-\frac{1}{N(A, j\omega)}$ evidenţiază instabilitatea SRA. Pentru amplitudini A mai mari decât cele ataşate punctului N sistemul este stabil.

Punctele M şi N definesc cicluri limită pentru funcţionarea SRA, cu observaţia că ciclul limită ce apare în punctul M este un ciclu limită instabil, iar ciclul limită ce apare în punctul N este un ciclu limită stabil.

Metoda funcţiei de descriere poate fi folosită nu numai pentru analize SRA neliniare, ci şi pentru proiectarea acestora.

Metodele de compensare utilizate în cazul sistemelor liniare pot fi extinse şi la sistemele neliniare. Astfel, metoda reducerii amplificării, metoda compensării folosind reţele de tip anticipaţie-întârziere şi metoda compensării prin reacţie după viteză în paralel cu reacţia de poziţie, pot fi utilizate cu bune rezultate în proiectarea sistemelor neliniare.

Pentru a evidenţia modul de aplicare a metodelor menţionate, în figura 10.35 se prezintă în planul amplitudine-fază cele două modele pentru partea liniară şi partea neliniară.

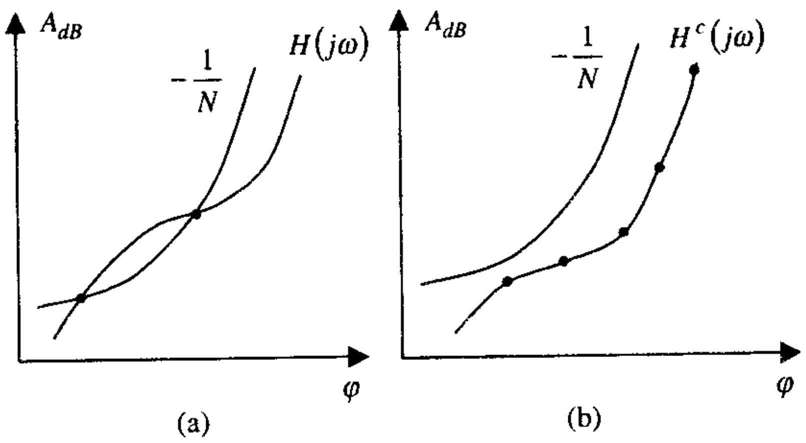


Fig. 10.35

Prin alegerea corespunzătoare a metodei de compensare se asigură deplasarea caracteristicii $H^c(j\omega)$, care asigură stabilitatea SRA.

10.5. Stabilitatea sistemelor neliniare

Problema stabilităţii sistemelor dinamice a reprezentat o reală provocare pentru matematicieni, fizicieni şi astronomi, care au încercat să formuleze problema stabilităţii sistemului solar sau problema stabilităţii celor N corpuri. Torricelli (1608-1647) a formulat pentru prima dată *principiul energiei totale minime,* care arată că un sistem de corpuri are un punct de echilibru stabil dacă acesta are energia totală minimă. La mijlocul secolului al XVIII-lea, Laplace şi Lagrange au arătat că, dacă un sistem este conservativ (conservă energia totală alcătuită din energie cinetică şi potenţială), atunci o stare care corespunde la energie cinetică zero şi energie potenţială minimă este un punct de echilibru stabil. Prima tratare riguroasă a stabilităţii sistemelor dinamice se datorează matematicianului rus A. M. Liapunov, care în 1892 formulează „Problema generală a mişcării" şi defineşte stabilitatea soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale cunoscută şi sub denumirea „Stabilitate în sens Liapunov" [84].

10.5.1. Stabilitatea sistemelor neliniare

În cele ce urmează, ne vom referi, mai întâi, la sisteme dinamice neliniare descrise de modele de forma:

$$\dot{x} = f(x,t),\ x(t_0) = x_0, \tag{10.85}$$

unde $x \in \Re^n$ şi $t \geq 0$. Sistemul definit în (10.85) este autonom sau invariant în timp dacă f nu depinde explicit de timp.

Sistemul este liniar dacă $\dot{x} = A(t)x$ pentru $A(\cdot): \Re_+ \to \Re^{n \times n}$. Considerăm că $f(x,t)$ este continuă pe porţiuni în raport cu timpul . Notăm cu S_r o sferă de rază r cu centrul în origine, [84].

Proprietăţile sistemului (10.85) spunem că sunt adevărate:

- *local*, dacă sunt adevărate pentru toţi x_0 în S_r;
- *global*, dacă sunt adevărate pentru toţi $x_0 \in \Re^n$;
- *semiglobal*, dacă sunt adevărate pentru toţi $x_0 \in S_r$ şi r arbitrar;
- *uniform*, dacă sunt adevărate pentru toţi $t_0 \geq 0$.

Definiţia 1: Continuitate Lipschitz. Funcţia f este local continuă Lipschitz în x dacă, pentru un $r > 0$, există un $l \geq 0$, astfel ca:

$$\|f(x_1,t) - f(x_2,t)\| \leq l\|x_1 - x_2\| \tag{10.86}$$

pentru toţi $x_1, x_2 \in S_r$, $t \geq 0$. Constanta l este denumită constantă Lipschitz. Dacă inegalitatea (10.86) se menţine pentru toţi $x_1, x_2 \in \Re^n$, spunem că funcţia f este continuă Lipschitz global. Dacă f are derivate parţiale în raport cu x mărginite, atunci aceasta este o funcţie Lipschitz.

Definiţia 2: Punct de echilibru. Spunem că x^* este un punct de echilibru al ecuaţiei (10.85) dacă $f(x^*,t) \equiv 0$ pentru toţi $t \geq t_0$.

Dacă $f(x,t)$ este continuă Lipschitz în x, atunci soluţia $x(t) \equiv x^*$ pentru toţi t este denumită o *soluţie de echilibru*.

În continuare, vom considera că $x^* = 0$ reprezintă un punct de echilibru al ecuaţiei (10.85). Una dintre cele mai importante consecinţe ale continuităţii Lipschitz este că aceasta asigură limite ale vitezei de convergenţă sau divergenţă ale soluţiilor din origine.

Definiţia 3: Stabilitate în sens Liapunov. Punctul de echilibru $x = 0$ este un punct de echilibru stabil al ecuaţiei (10.85), dacă pentru toţi $t_0 \geq 0$ şi $\varepsilon > 0$ există $\delta(t_0, \varepsilon)$, astfel ca:

$$\|x_0\| < \delta(t_0,\varepsilon) \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon,\ \forall t \geq t_0, \tag{10.87}$$

unde $x(t)$ este soluţia ecuaţiei (10.85) începând din x_0 la t_0.

În figura 10.36 se ilustrează definiţia stabilităţii arătând că traiectoriile încep în sfera S_δ şi nu părăsesc sfera S_ε. Uneori această definiţie este cunoscută sub denumirea de stabilitate în sens Liapunov la timpul t_0.

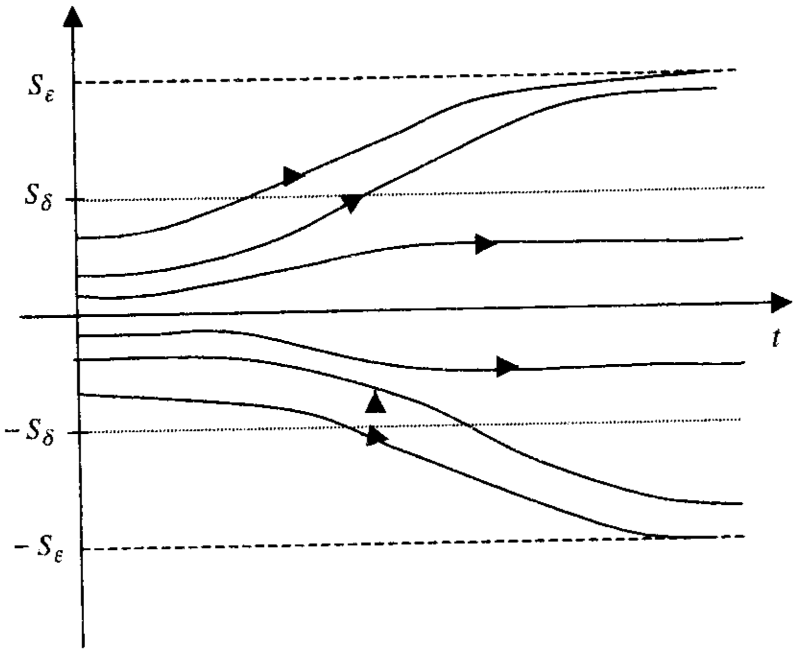


Fig. 10.36

Definiţia 4: Stabilitate uniformă. Punctul de echilibru $x = 0$ este un punct de echilibru uniform stabil al ecuaţiei (10.85) dacă δ din definiţia precedentă este independent de t_0.

Definiţia 5: Stabilitate asimptotică. Punctul de echilibru $x = 0$ este un punct de echilibru asimptotic stabil al ecuaţiei (10.85) dacă:

- $x = 0$ este un punct de echilibru;
- $x = 0$ este atractiv, adică pentru oricare $t_0 \geq 0$ există un $\delta(t_0)$

astfel ca $\|x_0\| < \delta \Rightarrow \lim\limits_{t \to \infty} \|x(t)\| = 0$.

Această definiţie cere, pe lângă stabilitatea punctului de echilibru, ca traiectoriile să tindă la punctul de echilibru când $t \to \infty$. Convergenţa traiectoriilor în origine nu implică totdeauna stabilitatea punctului de echilibru.

Definiția 6: Stabilitatea asimptotică uniformă. Punctul de echilibru $x=0$ este un punct de echilibru asimptotic stabil uniform pentru (10.85), dacă:

- $x=0$ este un punct de echilibru uniform stabil;
- traiectoria $x(t)$ converge uniform la zero, adică există $\delta>0$ și o

funcție $\gamma(\tau,x_0):\Re_+\times\Re^n\to\Re_+$, astfel ca:

- $\lim_{t\to\infty}\gamma(\tau,x_0)=0$ pentru toți $x_0\in S_\delta$ și
- $\|x_0\|<\delta\Rightarrow\|x(t)\|\le\gamma(t-t_0,x_0)$, $\forall t\ge t_0$. (10.88)

Definiția 7: Stabilitate asimptotică globală. Punctul de echilibru $x=0$ este un punct de echilibru global asimptotic stabil, dacă este stabil și $\lim_{t\to\infty}x(t)=0$ pentru toți $x_0\in\Re^n$.

Definiția 8: Stabilitate asimptotică uniform globală. Punctul de echilibru $x=0$ este un punct de echilibru global uniform asimptotic stabil dacă este global asimptotic stabil și dacă, în plus, convergența în origine a traiectoriilor este uniformă în timp; aceasta înseamnă că există o funcție $\gamma:\Re^n\times\Re_+\to\Re$, astfel ca:

$$\|x(t)\|\le\gamma(x_0,t-t_0),\ \forall t\ge0. \tag{10.89}$$

Pentru sistemele liniare invariante în timp, viteza de convergență a traiectoriilor la origine este exponențială, însă pentru sisteme variante în timp și sisteme neliniare viteza de convergență poate lua diferite forme.

Definiția 9: Stabilitate exponențială, viteză de convergență. Punctul de echilibru $x=0$ este un punct de echilibru exponențial stabil, dacă există β, $\alpha>0$, astfel ca:

$$\|x(t)\|\le\beta e^{-\alpha(t-t_0)}\|x_0\| \tag{10.90}$$

pentru toți $x_0\in S_r$, $t\ge t_0\ge0$. Constanta α reprezintă viteza de convergență.

Stabilitatea global exponențială este definită prin cerințe ca ecuația (10.90) să se mențină pentru toți $x_0\in\Re^n$. În general, stabilitatea exponențială este mai puternică decât stabilitatea asimptotică, deși pentru sisteme liniare se poate arăta că stabilitatea uniform asimptotică este echivalentă cu stabilitatea exponențială.

Pornind de la aceste definiții și ținând seama că stabilitatea este o proprietate a sistemului, Liapunov a introdus o metodă, reținută în literatura de specialitate ca *metoda a doua a lui Liapunov*, pentru a determina stabilitatea sistemului (10.85) fără integrarea explicită a ecuației diferențiale.

Metoda reprezintă o generalizare a noțiunii ce ilustrează măsura disipării de energie într-un sistem și furnizează informații asupra stabilității.

Pentru aceasta se introduc următoarele funcții ce definesc „măsura energiei" într-un sistem [84].

Definiția 10: Funcții de clasă K și KR. O funcție $\alpha(\cdot):\Re_+\to\Re_+$ aparține clasei K ($\alpha(\cdot)\in K$), dacă este continuă, strict crescătoare și $\alpha(0)=0$. Funcția $\alpha(\cdot)$ se spune că aparține clasei KR dacă α este din clasa K și în plus $\alpha(p)\to\infty$ când $p\to\infty$.

Definiția 11: Funcții local pozitiv definite (f.l.p.d.). O funcție continuă $V(x,t):\Re^n\times\Re_+\to\Re_+$ este o funcție local pozitiv definită, dacă pentru un $r>0$ și un $\alpha(\cdot)$ din clasa K:

$$V(0,t)=0 \text{ și } V(x,t)\ge\alpha(\|x\|),\ \forall x\in S_r,\ t\ge0. \tag{10.91}$$

Definiția 12: Funcții pozitiv definite (f.p.d.). O funcție continuă $V(x,t):\Re^n\times\Re_+\to\Re_+$ este o funcție pozitiv definită, dacă pentru un $\alpha(\cdot)$ din clasa KR:

$$V(0,t)=0 \text{ și } V(x,t)\ge\alpha(\|x\|),\ \forall x\in\Re^n,\ t\ge0 \tag{10.92}$$

și $\alpha(p)\to\infty$ când $p\to\infty$.

O funcție continuă $V(x,t):\Re^n\times\Re_+\to\Re_+$ este o funcție descrescătoare dacă există o funcție $\beta(\cdot)$ din clasa K, astfel ca:

$$V(x,t)\le\beta(\|x\|),\ \forall x\in S_r,\ t\ge0. \tag{10.93}$$

Analog se introduce noțiunea de *funcție negativ definită*.

Dacă funcția V, fără să-și schimbe semnul, se anulează și în alte puncte decât originea, atunci se numește *funcție de semn constant*.

Teorema de bază a lui Liapunov stabilește că dacă $V(x,t)$ este o funcție pozitiv definită sau local pozitiv definită și $\frac{dV(x,t)}{dt}\le0$, atunci putem aprecia stabilitatea sau instabilitatea punctului de echilibru. Derivata în timp a funcției $V(x,t)$ este luată de-a lungul traiectoriilor ecuației (10.85), adică:

$$\frac{dV(x,t)}{dt}=\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial V(x,t)}{\partial x}f(x,t). \tag{10.94}$$

TEOREMA 10.1. Pentru sistemul:

$\dot{x}(t)=f(x,t)$

dacă se poate găsi o funcţie $V(x,t)$ cu proprietăţile:

- $V(x)$ este o funcţie local pozitiv definită
- $\dot{V}(x,t)\le 0$, $\forall t \ge t_0$, $\forall x \in S_r$
- $V(0)=0$

atunci spunem că sistemul este stabil în sens Liapunov.

Demonstraţie:

Deoarece $V(x,t)$ este o funcţie local pozitiv definită, avem pentru $\alpha(\cdot)\in K$:

$$V(x,t)\ge \alpha(\|x\|),\ \forall x\in S_s. \tag{10.95}$$

De asemenea, şi din condiţia $\dot{V}(x,t)\le 0$, $\forall t\ge t_0$, $\forall x\in S_r$ alegem $\delta>0$ astfel ca:

$$\beta(t_0,\delta):=\sup_{\|x\|\le\delta} V(x,t_0)<\alpha(\varepsilon_1),$$

unde $\varepsilon_1=\min(\varepsilon,r,s)$ cu $\varepsilon>0$.

Astfel, există întotdeauna δ, deoarece $\beta(t_0,\delta)$ este o funcţie continuă de δ şi $\alpha(\varepsilon_1)>0$.

Admitem că $\|x(t_0)\|\le\delta$ implică $\|x(t)\|<\varepsilon_1$, $\forall t\ge t_0$. Demonstrăm prin contradicţie.

Dacă nu este adevărat că $\|x(t)\|<\varepsilon_1$ pentru toţi t, punem $t_1>t_0$ să fie timpul pentru care $\|x(t)\|\ge\varepsilon_1$. Atunci:

$$V(x(t_1),t_1)\ge\alpha(\varepsilon_1)>V(x(t_0),t_0), \tag{10.96}$$

ceea ce reprezintă o contradicţie deoarece $\dot{V}(x(t),t)\le 0$ pentru toţi $\|x\|<\varepsilon_1$.

Deoarece:

$$\alpha|x(t_0)|\le V(x(t_0),t_0)<\alpha(\varepsilon_1),$$

urmează că $\|x(t_0)\|<\varepsilon_1$.

Astfel, $\|x(t)\|<\varepsilon_1$, $\forall t\ge t_0$.

TEOREMA 10.2. Un sistem neliniar de forma (10.85) este uniform asimptotic stabil dacă se găseşte o funcţie Liapunov $V(x,t)$ care are proprietăţile:

- $V(x,t)$ este local pozitiv definită;
- $-\dot{V}(x,t)$ este local pozitiv definită.

TEOREMA 10.5: Punctul de echilibru $x=0$ al ecuaţiei (10.101) este stabil dacă toate valorile proprii ale matricei A sunt în $\mathbb{C}^-$ şi cele plasate pe axa imaginară sunt zerouri simple ale polinomului minimal al matricei A.

O posibilitate de a studia stabilitatea sistemului (10.101) este de a alege o funcţie Liapunov

$$V(x)=x^T Px$$

unde $P\in\Re^{n\times n}$ este o matrice simetrică pozitiv definită sau

$$V(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}P_{ij}x_i x_j$$

cu

$$\dot{V}(x)=x^T\left[A^T P+PA\right]x. \tag{10.102}$$

Dacă există o matrice simetrică, pozitiv definită $Q\in\Re^{n\times n}$, astfel ca:

$$A^T P+PA=-Q, \tag{10.103}$$

atunci $\dot{V}(x)$ este o funcţie negativ definită.

Ecuaţia (10.103) care este o ecuaţie liniară de forma:

$$L(P)=Q \tag{10.104}$$

unde L este o transformare din $\Re^{n\times n}\mapsto\Re^{n\times n}$ este o ecuaţie Liapunov.

Fiind dată o matrice simetrică $Q\in\Re^{n\times n}$, se poate arăta că (10.103) are o soluţie unică simetrică $P\in\Re^{n\times n}$ când L este inversabilă, aceasta dacă toate cele n^2 valori proprii ale transformării liniare L sunt diferite de zero.

Pentru a demonstra această teoremă, observăm că funcţia $V(x)$ este o funcţie pozitiv definită (prin alegere) iar funcţia $\dot{V}(x)=-x^T Qx$ este o funcţie negativ definită.

Demonstrarea necesităţii se bazează pe considerarea unei matrice P de forma:

$$P=\int_0^\infty e^{A^T t}Qe^{At}dt$$

care este bine definită, deoarece matricea A are toate valorile proprii cu parte reală negativă iar integrala este convergentă.

Pe de altă parte, are loc relaţia:

$$A^T P+PA=\int_0^\infty\left(A^T e^{A^T t}Qe^{At}+e^{A^T t}Qe^{At}A\right)dt=\int_0^\infty\frac{d}{dt}\left[e^{A^T t}Qe^{At}\right]dt=$$

$$=e^{A^T t}Qe^{At}\Big|_0^\infty=-Q.$$

Astfel, matricea P considerată verifică ecuaţia Liapunov şi teorema este demonstrată.

Matricea Q poate fi aleasă, de exemplu, matricea unitate.

Prin intermediul teoremei lui Liapunov se poate reformula problema stabilităţii asimptotice a unui sistem liniar invariant autonom descris prin ecuaţia de stare (10.101). Astfel, sistemul (10.101) este asimptotic stabil dacă şi numai dacă pentru orice matrice Q simetrică pozitiv definită există o matrice P simetrică pozitiv definită care satisface ecuaţia Liapunov (10.103).

Dacă există o soluţie P diferită de zero pentru ecuaţia matriceală (10.103) cu o matrice simetrică $Q \geq 0$, atunci originea pentru (10.101) este stabilă. Acest rezultat derivă din faptul că $\dot{V}$ este garantată a fi cel puţin negativ semidefinită.

Se poate aprecia, pe baza celor menţionate mai sus, că pentru sistemele liniare invariante formele pătratice pentru funcţiile Liapunov reprezintă reale opţiuni.

Pentru un sistem de ordinul doi caracterizat prin ecuaţiile de stare:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

alegem matricele P şi Q

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \text{ şi } Q = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix}$$

iar ecuaţia matriceală Liapunov are forma:

$$PA + A^T P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_n^2 \\ 1 & -2\xi\omega_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= -\begin{bmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix}$$

Pentru q_{11} şi q_{22} aleşi şi pentru ξ şi ω_n daţi se determină p_{ij}.

10.5.3. Stabilitatea absolută

Vom studia stabilitatea unei clase largi de sisteme neliniare cu partea directă liniară şi partea cu reacţie neliniară fără memorie (posibil variantă în timp) (fig. 10.38).

Dacă $x(t) \in \Re^n$, $u(t) \in \Re$ şi $y(t) \in \Re$ reprezintă starea, intrarea şi ieşirea părţii liniare, modelul sistemului închis este:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= c^T x \qquad\qquad (10.105) \\ v &= -u = -\varphi(y(t), t) \end{aligned}$$

unde neliniaritatea $\varphi(\cdot,\cdot)$ satisface

$$\begin{aligned} &\varphi(0,t) = 0, \ \forall t \geq 0 \text{ şi} \\ &\sigma\varphi(\sigma,t) \geq 0, \ \forall \sigma \in \Re, \ t \geq 0 \qquad\qquad (10.106) \end{aligned}$$

ceea ce arată că se găseşte în cadranele I şi III.

Problema care se pune este de a găsi condiţiile pentru $H(s)$ sau pentru (A, b, c^T), astfel ca punctul de echilibru 0 să fie global asimptotic stabil pentru o clasă de neliniarităţi definite prin $\varphi(\sigma,t)$.

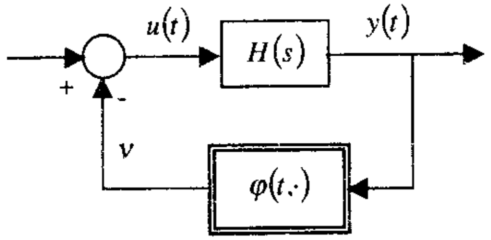


Fig. 10.38

Această problemă este cunoscută sub denumirea de *problema stabilităţii absolute* deoarece ne propunem să demonstrăm stabilitatea globală a sistemului (10.106) pentru o întreagă clasă de neliniarităţi plasate în reacţie.

Presupunem îndeplinite următoarele condiţii:

a) (A, b, c^T) este minimal, adică sistemul este controlabil şi observabil;

b) matricea A are toate valorile proprii în C^-;

c) neliniaritatea $\varphi(\cdot,t)$ aparţine sectorului $[k_1, k_2]$ pentru $k_2 \geq k_1 \geq 0$:

$$k_1\sigma^2 \leq \sigma\varphi(\sigma,t) \leq k_2\sigma^2.$$

Este natural să presupunem acum problema: dacă se dă o neliniaritate continuă univocă, fiind cuprinsă în sectorul (k_1, k_2), este stabil sistemul cu structura dată în figura 10.38 ?

Problema stabilităţii absolute a fost formulată de N.A. Aizerman [34] astfel: dându-se un sistem format dintr-o parte liniară (stabilă şi cu factor de amplificare unitar) şi o parte neliniară, să se găsească sectorul maximal (k_1, k_2), astfel încât sistemul să fie global asimptotic stabil.

10.5.3.1. Criteriul cercului

În aceste ipoteze, originea în ecuaţia (10.106) este global asimptotic stabilă dacă:

$$\text{Re}\left[1 + kH(j\omega)\right] > 0, \ \forall\omega \qquad (10.107)$$

Pentru demonstrarea acestei propoziții, considerăm o funcție Liapunov de forma $V(x)=x^T Px$, cu $P>0$ și P simetrică.

Ținând seama de (10.106) rezultă:

$$\dot V(x)=\dot x^T Px+x^T P\dot x=x^T\left(A^T P+PA\right)x+2x^T Pbu \quad (10.108)$$

Folosind (10.105) și multiplicând pe ambele părți ale ecuației $y=c^T x$ cu ku și adăugând și scăzând u^2 se obține:

$$0=kuc^T x+u^2-u(ky+u). \quad (10.109)$$

Scăzând ecuația (10.109) din (10.108) obținem:

$$\dot V(x)=x^T\left(A^T P+PA\right)x+2ux^T\left(Pb-\frac{1}{2}kc^T\right)-u^2+u(ky+u) \quad (10.110)$$

sau

$$\dot V(x)\le x^T\left(A^T P+PA\right)x+2ux^T\left(Pb-\frac{1}{2}kc^T\right)-u^2 \quad (10.111)$$

întrucât, deoarece φ aparține sectorului $[0,k]$, $(\sigma\equiv y)$.

$$0\le\frac{\varphi(y,t)}{y}\le k \text{ pentru toți } y\ne 0,$$

rezultă că $\varphi(y,t)$ și $ky-\varphi(y,t)$ au totdeauna același semn, adică

$$\varphi(y,t)[ky-\varphi(y,t)]\ge 0 \text{ pentru toți } y\in\Re$$

și

$$u[ky-u]\le 0 \text{ întrucât } u=-\varphi(y,t).$$

Dacă funcția de transfer $\left[1+kc^T(sI-A)^{-1}b\right]$ este real pozitivă, atunci prin lema Kalman-Yacubovici-Popov (KYP) [84] urmează că $\exists P,Q>0$ și $q\in\Re^n$ și $\varepsilon>0$ astfel ca:

$$\begin{aligned}A^T P+PA&=-qq^T-\varepsilon Q\\ Pb-\frac{1}{2}kc^T&=q\end{aligned} \quad (10.112)$$

cu ε un scalar.

Din (10.112) și (10.111) pe baza lemei (KYP) [46, 84] rezultă:

$$\begin{aligned}\dot V(x)&\le-\varepsilon x^T Qx-x^T qq^T x+2ux^T q-u^2\\ &\le-\varepsilon x^T Qx-\left(x^T q-u\right)^2\\ &\le-\varepsilon x^T Qx\ .\end{aligned}$$

Astfel, rezultă că $-\dot V$ este o funcție pozitiv definită și originea este global asimptotic stabilă. Condiția impusă pentru a genera funcția Liapunov

este ca $[1+kH(s)]$ să fie *strict real pozitivă*. Aceasta este echivalent cu $\mathrm{Re}[H(j\omega)]\ge-\frac{1}{k}$, deoarece k este strict pozitiv.

De notat că cerința de stabilitate a sistemului închis pentru toate neliniaritățile $\varphi(\cdot,t)$ în sectorul $[0,k]$ forțează sistemul deschis să fie stabil (deoarece $\varphi(\cdot,t)$ poate fi ales și identic zero).

Această propoziție poate fi generalizată și pentru cazul în care $\varphi(\cdot,t)$ se situează în sectorul $[k_1,k_2]$ pentru $k_2\ge k_1\ge 0$. Pentru aceasta, partea liniară va avea forma:

$$G(s)=\frac{H(s)}{1+k_1H(s)}$$

iar neliniaritatea se transformă în:

$$\Psi(\sigma,t)=\varphi(\sigma,t)-k_1\sigma$$

situată în sectorul $[0,k_2-k_1]$.

TEOREMA 10.6: Presupunem că $H(s)$ are p poli în C^+ și neliniaritatea $\varphi(\cdot,t)$ este în sectorul $[k_1,k_2]$. Atunci originea sistemului (10.106) este global asimptotic stabilă dacă:

1. locul Nyquist al lui $H(s)$ nu intersectează punctul de afix $-\frac{1}{k_1}$ și-l încercuiește de p ori în sens antiorar;
2. $$\mathrm{Re}\left[\frac{1+k_2H(j\omega)}{1+k_1H(j\omega)}\right]>0,\ \forall\omega\in\Re \quad (10.113)$$

Pentru demonstrare considerăm următoarele trei cazuri:

a) $k_1>0$. Dacă $H(j\omega)=U(j\omega)+jV(j\omega)$ obținem din (10.113):

$$\frac{(1+k_2U)(1+k_1U)+k_1k_2V^2}{(1+k_1U)^2+k_1^2V^2}>0 \quad (10.114)$$

Numitorul acestei expresii este totdeauna pozitiv, deoarece locul Nyquist nu atinge niciodată punctul $-\frac{1}{k_1}$ și deci putem scrie:

$$(1+k_2U)(1+k_1U)+k_1k_2V^2>0$$

sau

$$\left(U+\frac{1}{k_1}\right)\left(U+\frac{1}{k_2}\right)+V^2>0. \quad (10.115)$$

Această inegalitate arată că locul Nyquist al funcției $H(j\omega)$ nu intră în discul din planul complex care trece prin $-\frac{1}{k_1}$ și $-\frac{1}{k_2}$ așa cum se poate observa în figura 10.39.

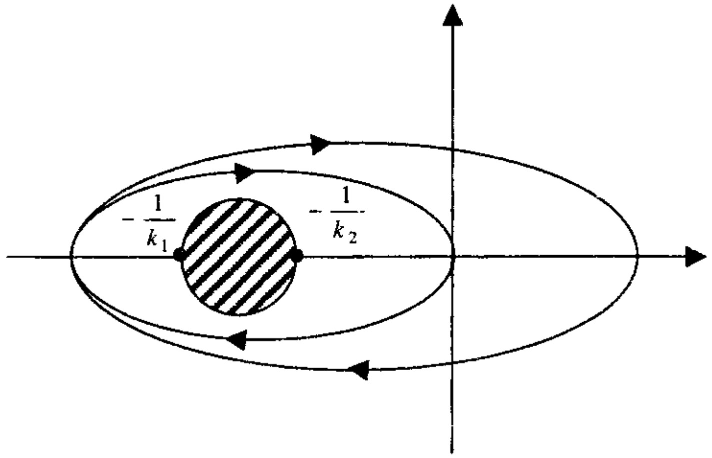


Fig. 10.39

Inecuația (10.115) evidențiază cu ușurință ecuația cercului dacă este pusă sub forma:

$$\left[U+\frac{1}{2}\left(k_1^{-1}+k_2^{-1}\right)\right]^2+V^2-\left[\frac{1}{2}\left(k_1^{-1}-k_2^{-1}\right)\right]^2>0.$$

Astfel, locul de transfer înconjoară de p ori în sens antiorar discul $D(k_1,k_2)$.

b) $k_1<0<k_2$. O condiție necesară pentru stabilitatea absolută este ca A să aibă toate valorile proprii în semiplanul stâng deschis, deoarece $\varphi(\cdot,t)\equiv 0$ este o neliniaritate admisibilă.

Procedând ca mai sus, avem:

$$(1+k_2U)(1+k_1U)-k_1k_2V^2>0$$

sau

$$\left(U+\frac{1}{k_1}\right)\left(U+\frac{1}{k_2}\right)+V^2<0 \qquad (10.116)$$

deoarece $k_1k_2<0$.

Inegalitatea (10.116) arată că locul Nyquist nu intersectează sau atinge $-\frac{1}{k_1}$ (deoarece $p=0$) și se situează în interiorul discului $D(k_1,k_2)$ (fig. 10.40).

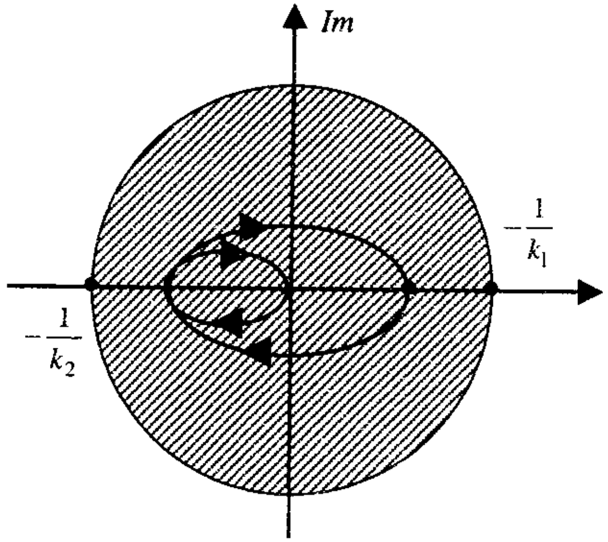


Fig. 10.40

c) $k_1<k_2<0$. Rezultatele din primul caz pot fi extinse la acest caz dacă înlocuim $H(s)$ prin $-H(s)$, k_1 prin $-k_1$ și k_2 prin $-k_2$. Rezultatele sunt prezentate în figura 10.41.

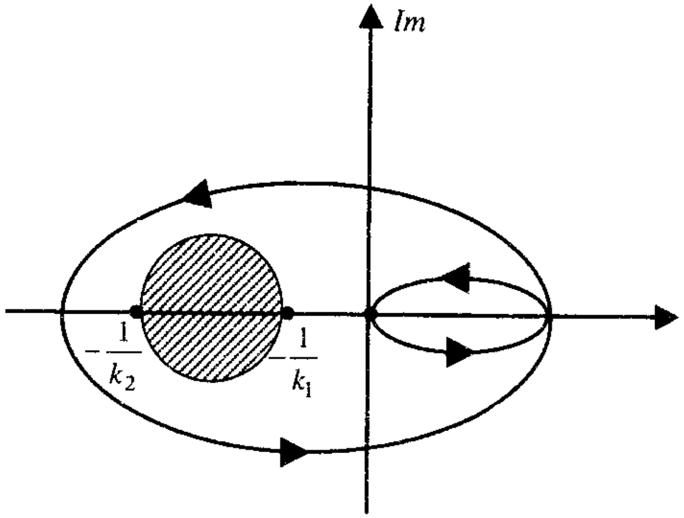


Fig. 10.41

10.5.3.2. Criteriul lui Popov

Criteriul cercului pentru verificarea stabilității absolute a unei familii de sisteme de forma (10.106) implică utilizarea funcției pătratice Liapunov $V = x^T Px$.

În cele ce urmează, considerăm că $\varphi(\cdot,t)$ se situează în sectorul $[0,k]$ cu $k>0$.

Criteriul de stabilitate absolută al lui Popov afirmă că echilibrul în origine este global asimptotic stabil dacă există $q_0>0$, astfel încât $[1+k(1+q_0 s)H(s)]$ este strict real pozitivă, unde $H(s)=c^T(sI-A)^{-1}b$.

Testul grafic pentru criteriul lui Popov se obține pornind de la condiția de real-pozitivitate particularizată în frecvență:

$$\mathrm{Re}\left[(1+q_0 j\omega)H(j\omega)\right] > -\frac{1}{k}, \text{ pentru } \omega \ge 0 \qquad (10.117)$$

care, în esență, reprezintă condiția ca o familie de sisteme neliniare să fie absolut stabile.

Dacă ținem seama că $H(j\omega)=U(\omega)+jV(\omega)$ și înlocuim în (10.117), obținem:

$$U(\omega)-q_0\omega V(\omega) > -\frac{1}{k} \qquad (10.118)$$

sau

$$U^*(\omega)-q_0V^*(\omega) > -\frac{1}{k}, \qquad (10.119)$$

unde $U^*(\omega)\equiv U(\omega)$ și $V^*(\omega)=\omega V(\omega)$.

Dacă reprezentăm grafic, în planul complex, ecuația:

$$U^* - q_0V^* + \frac{1}{k} = 0$$

obținem dreapta cu panta $\frac{1}{q_0}$ care trece prin punctul $-\frac{1}{k}$ pe axa reală. Această dreaptă poartă denumirea de *„dreapta lui Popov"*.

În figura 10.42 se reprezintă dreapta lui Popov și locul Nyquist modificat în planul (U^*,V^*).

Condiția ca sistemul (10.106) să aibă un punct de echilibru în origine, global asimptotic stabil, este ca locul de transfer modificat să se situeze sub dreapta de pantă variabilă $1/q_0$ și care intersectează axa reală în punctul de coordonate $[-1/k\ ,\ 0]$.

Extensia criteriului pentru neliniarități situate în sectorul (k_1,k_2) este imediată dacă realizăm transformarea:

$$G(s)=\frac{H(s)}{1+k_1H(s)}$$

$$\Psi(\sigma,t)=\varphi(\sigma,t)-k_1\sigma\ .$$

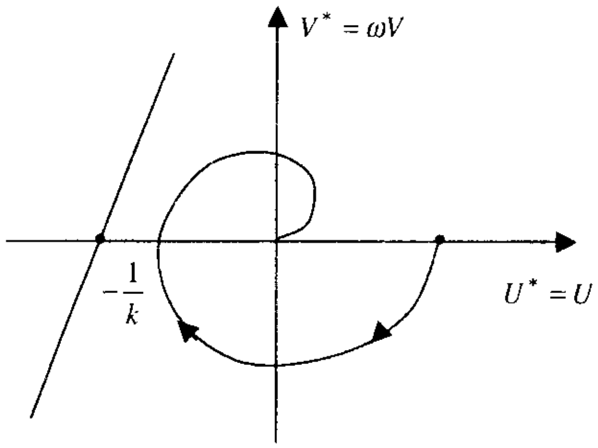


Fig. 10.42

În aceste condiții, criteriul lui Popov se reduce la a cere să existe $q_0>0$, astfel încât funcția de transfer $\frac{1}{k_2-k_1}+(1+q_0s)G(s)$ să fie strict real pozitivă.

Demonstrația criteriului lui Popov este dată în [84, 88].

Exemplul 10.4:

Se consideră partea liniară a sistemului neliniar descrisă prin:

$$H(s)=\frac{K_0}{(1+sT_0)^3},\ K_0>0,\ T_0>0.$$

Se cere să se determine sectorul maxim de stabilitate absolută apelând la criteriul Popov.

Trasăm locul modificat:

$$H(j\omega)=\frac{K_0(1-j\omega T_0)^3}{\left(1+\omega^2T_0^2\right)^3}=\frac{K_0\left(1-3\omega^2T_0^2\right)}{\left(1+\omega^2T_0^2\right)^3}+j\frac{K_0\left(\omega^3T_0^3-3\omega T_0\right)}{\left(1+\omega^2T_0^2\right)^3}$$

$$\begin{cases} U^* = K_0 \dfrac{1-3\omega^2 T_0^2}{\left(1+\omega^2 T_0^2\right)^3} \\ V^* = K_0 \dfrac{\omega T_0 \left(\omega^2 T_0^2 - 3\right)}{\left(1+\omega^2 T_0^2\right)^3} \end{cases} \qquad \omega \in [0,\infty).$$

Se observă că intersecţiile locului cu axa absciselor se obţine pentru $\omega = 0$, *respectiv* $\omega^2 T_0^2 = 3$, *obţinându-se punctele:*

$$U^* = K_0$$

respectiv:

$$U^* = -\frac{K_0}{8}.$$

Intersecţia cu axa ordonatelor se obţine pentru pulsaţia:

$$\omega^2 T_0^2 = \frac{1}{3}$$

adică în punctul:

$$V^* = -\frac{9K_0}{8\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{8} K_0.$$

Locul modificat apare în figura 10.43.

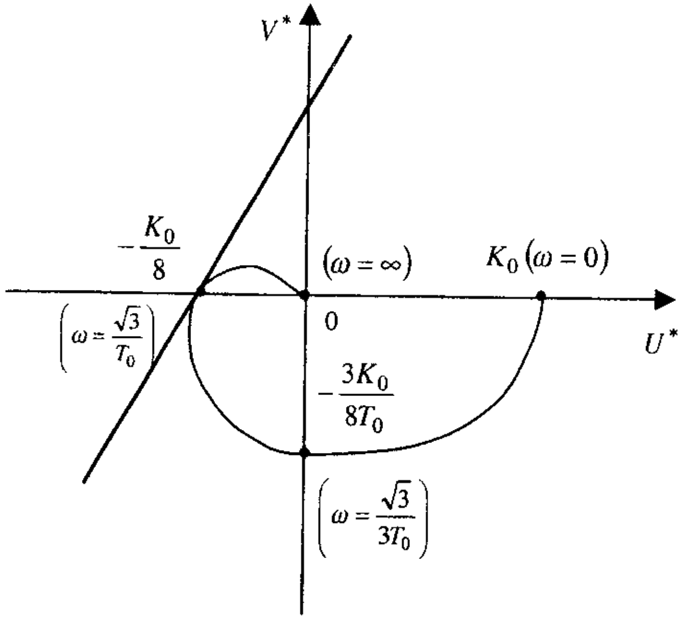


Fig. 10.43

Se observă că locul modificat este o curbă convexă şi că dreapta Popov, care să lase locul modificat de aceeaşi parte cu originea, trece prin punctul $\left(0, -\frac{K_0}{8}\right)$, *corespunzător unui parametru* $K_{\lim}$ *determinat din relaţia:*

$$-\frac{1}{K_{\lim}} = -\frac{K_0}{8},$$

deci:

$$K_{\lim} = \frac{8}{K_0}.$$

10.6. Tehnici de conducere a sistemelor neliniare

Aşa cum s-a menţionat în introducere, procesele reale sunt caracterizate prin modele neliniare, cel mai adesea variante în timp. În cazul în care modelele de forma (10.1) pot fi liniarizate în jurul unor puncte de funcţionare, pot fi proiectate regulatoare liniare care să asigure performanţe impuse pentru regimul de funcţionare ales. Ieşirea din zona admisibilă de variaţie a mărimilor de intrare şi ieşire ale procesului conduc la degradarea performanţelor sau cel mai adesea la instabilitatea SRA. În aceste condiţii, regulatorul proiectat are un ridicat nivel de fragilitate şi în consecinţă soluţia adoptată are o robusteţe redusă.

10.6.1. Conducere multi-model

Pentru a ne menţine în domeniul reglării liniare a proceselor neliniare se poate adopta soluţia „conducerii multi-model". Această strategie de conducere presupune descompunerea unei probleme complexe dificil de rezolvat în mai multe probleme mai simple, pentru care se pot determina soluţii analitice şi care asigură soluţia problemei originale complexe. Astfel, se pot descompune problemele de modelare şi conducere pentru diferite regimuri de funcţionare ale procesului. Diferite modele locale şi corespunzător regulatoare sunt aplicate sub diferite regimuri de funcţionare.

Printr-un sistem de supervizare se pot selecta modele şi regulatoare sau combinaţii ale acestora cu ponderi adecvate pentru a genera comenzi în funcţie de regimul de funcţionare al procesului.

În figura 10.44 se prezintă structura de conducere multi-model.

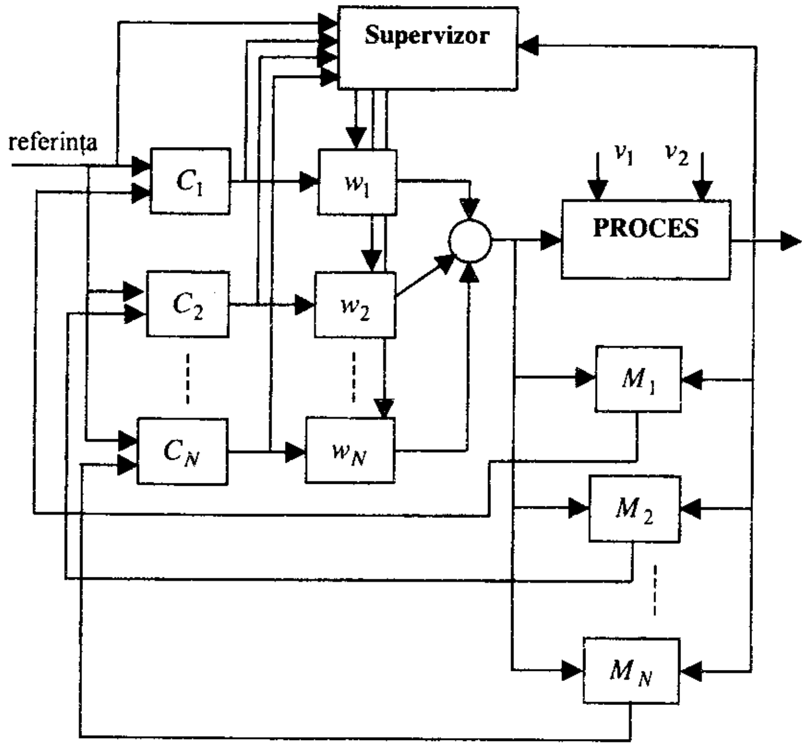


Fig. 10.44

Ponderile w_i aplicate comenzilor locale generate de regulatoarele C_i se calculează la nivelul supervizorului în funcție de regimul de funcționare al procesului și de modelul adoptat pentru acel regim. Dacă schimbarea regimului de funcționare este lină (netedă) și comportarea procesului se schimbă lin cu regimul de funcționare, pot fi adoptate modele liniarizate local, deși procesul conține neliniarități complexe dacă este analizat global. O asemenea abordare a conducerii unui proces neliniar complex permite o interpretare și o mai bună înțelegere calitativă și cantitativă apelând la metode inginerești tradiționale.

Combinația între un model liniar și un regulator liniar poate asigura comanda necesară asigurării cerințelor impuse unui regim de funcționare selectat.

Procedura de conducere bazată pe multiple modele presupune parcurgerea următoarelor etape:

– se descompune întreg domeniul de funcționare în regimuri de funcționare și se identifică variabilele ce pot fi utilizate pentru a caracteriza regimurile de funcționare;

– se aleg modele locale M_i sau structuri de regulatoare C_i în cadrul fiecărui regim de funcționare. Aceste structuri vor fi determinate pe baza cunoștințelor relevante despre proces disponibile, pentru diferite condiții de funcționare;

– structurile locale de modele sau regulatoarele sunt parametrizate în anumite variabile ce trebuie determinate;

– se alege metoda de combinare a modelelor locale sau/și a regulatoarelor în funcție de regimul de funcționare selectat.

Dacă prin $z(t)$ notăm punctul de funcționare al procesului, un algoritm PID neliniar va avea forma:

$$u(t) = K_R\left(z(t)\right)\left[\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i\left(z(t)\right)}\int_0^t \varepsilon(\tau)d\tau + T_d\left(z(t)\right)\frac{d\varepsilon}{dt}\right], \qquad (10.120)$$

unde parametrii de acord sunt funcție de regimul de funcționare. Dacă se selectează punctele de funcționare $z_1, z_2, \ldots, z_n$ iar regimul de funcționare este în vecinătatea acestor puncte atunci se poate folosi un algoritm PID de forma:

$$u(t) = K_R^i\left[\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i^i}\int_0^t \varepsilon(\tau)d\tau + T_d^i\frac{d\varepsilon}{dt}\right] \qquad (10.121)$$

când $z(t)$ este în vecinătatea punctului z_i, $i = 1,2,\ldots,n$.

Proiectarea acestor algoritmi este mai simplă decât proiectarea unui algoritm neliniar chiar dacă există un model dinamic neliniar al procesului.

Tratarea problemelor de conducere pentru procese neliniare complexe fără o abordare simplificată corelată cu regimurile de funcționare impuse, necesită luarea în considerație a unor tehnici neconvenționale bazate pe modelare calitativă, rețele neuronale, sisteme expert, logică fuzzy și raționamente probabilistice. Aceasta reprezintă în esență tendința ce se manifestă în dezvoltarea unei noi generații de sisteme de conducere inteligente cu ridicată autonomie.

Principalele probleme ce trebuie rezolvate în cazul conducerii multi-model sunt legate de *identificarea regimurilor de funcționare* și de *transferul între regulatoare fără șocuri pentru proces.*

Prima problemă este adesea rezolvată dacă există variabile măsurate ce reprezintă un indicator esențial al dinamicii (comportării) procesului. Pentru a exemplifica, în cazul conducerii performante a avioanelor se folosesc numărul Mach și altitudinea ca variabile pentru planificarea regulatoarelor.

Cea de-a doua problemă necesită ca fiecare regulator să opereze stabil, indiferent dacă este sau nu este instalat în regim automat pe proces. Această cerință poate fi realizată printr-o strategie de tipul „anti-wind-up" [46].

O altă modalitate de a asigura comutarea regulatoarelor fără şocuri este prezentată în figura 10.45.

Regulatorul descris prin $\overline{H}_R^i(s)$ este folosit pentru a asigura că ieşirea regulatorului i urmăreşte intrarea reală în proces. Supervizorul va selecta din cele n regulatoare unul pentru a genera comanda spre proces, celelalte fiind în stare de aşteptare. Toate regulatoarele în rezervă sunt conectate în reacţie ca în figura 10.45, astfel încât ieşirile lor să urmărească ieşirea regulatorului activ.

În figura 10.45 comanda $u(t)$ reprezintă ieşirea regulatorului activ, iar $H_R^i(s)$ un regulator în aşteptare având semnalul de referinţă $r(t)$ pentru o ieşire particulară $y(t)$. Regulatorul $\overline{H}_R^i(s)$ reprezintă regulatorul pentru regulatorul i. Astfel, regulatorul $\overline{H}_R^i(s)$ este un regulator-regulator. Pentru acest regulator-regulator, semnalele $r(t)$ şi $y(t)$ acţionează ca perturbaţii. O asemenea metodă poate fi folosită cu bună eficienţă în cazul saturării elementelor de execuţie, în cazul sistemelor adaptive şi al sistemelor cu amplificare planificată.

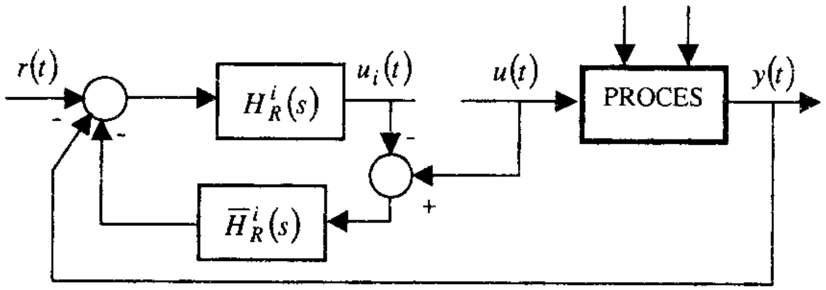


Fig. 10.45

Comanda $u(t)$ poate fi şi o combinaţie a ieşirilor regulatoarelor:

$$u(t)=\sum_{i=1}^{n} w_i(t)\cdot u_i(t) \tag{10.122}$$

unde $w_i \in [0,1]$ şi $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$, $\forall t$.

Aceasta poate fi folosită când supervizorul generează decizii de comutare soft prin generarea ponderii de confidenţă ataşată fiecărui posibil regulator. Aceste ponderi pot fi, de exemplu, probabilitatea ca fiecare regulator să fie corect sau pot fi alte funcţii de apartenenţă.

Evidenţierea modelelor locale pentru caracterizarea diferitelor regimuri de funcţionare şi, în mod corespunzător. a unor algoritmi de reglare

asociaţi acestor regimuri poate reprezenta baza pentru configurarea sau reconfigurarea dinamică a strategiilor de conducere în cadrul sistemelor cu ridicată autonomie. Neliniaritatea şi complexitatea proceselor în aceste condiţii nu reprezintă neajunsuri majore pentru rezolvarea problemei conducerii dacă se apelează la principiul descompunerii unei probleme complexe în mai multe probleme mai simple, dacă este posibil.

10.6.2. Conducere neliniară bazată pe model intern

Principiul reglării cu model intern poate fi extins la procese neliniare caracterizate prin modele stabile şi cu inversul acestora de asemenea stabil. Arhitectura SRA cu model intern este prezentată în figura 10.46, unde procesul neliniar este modelat prin operatorul $H_p\langle\cdot\rangle$ iar perturbaţiile acţionează la intrarea şi ieşirea procesului.

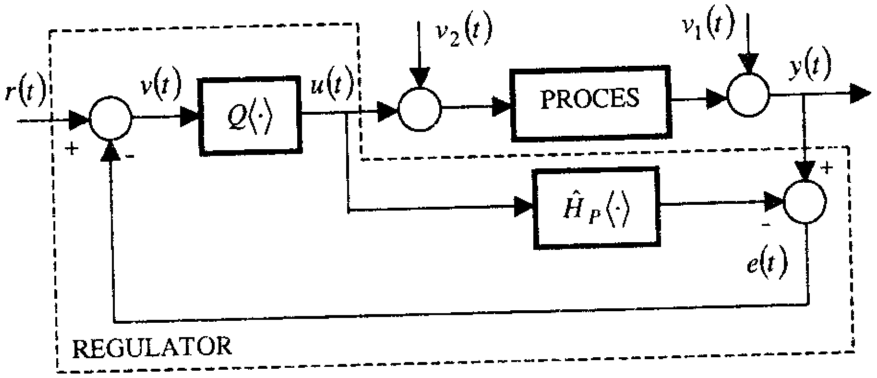


Fig. 10.46

Admiţând că procesul este stabil în buclă deschisă şi cunoscând că $v_2(t)\equiv 0$, eroarea $e(t)$ va converge (în cazul modelarii exacte) la valoarea perturbaţiei $v_1(t)$. Reamintim (v. § 6) că pentru procese caracterizate prin modele liniare stabile de fază minimă regulatorul s-a ales de forma:

$$Q(s)=F_Q(s)\left[\hat{H}_p(s)\right]^{-1} \tag{10.123}$$

unde $F_Q(s)$ reprezintă un filtru stabil ce trebuie ales.

Cea mai simplă alegere a fost astfel încât $\left[F_Q(s)\right]^{-1}$ să fie un polinom stabil al cărui grad este egal cu gradul relativ al lui $H_p(s)$. În cazul liniar aceasta conduce la rezultatul:

$$y(t)=F_Q\langle v(t)\rangle \tag{10.124}$$

Acelaşi principiu poate fi aplicat la sisteme neliniare. Cea mai simplă situaţie apare când procesul are o neliniaritate statică la intrare şi perturbaţia acţionează numai la ieşirea procesului. În acest caz, ieşirea modelului nominal este:

$$y(t)=\hat{H}_p\langle u(t)\rangle+v_1(t) \tag{10.125}$$

sau

$$y(t)=\bar{\hat{H}}_p\langle\varphi(u)\rangle+v_1(t),$$

unde $\bar{\hat{H}}_p$ este un operator liniar şi $\varphi(\cdot)$ este o funcţie de u statică inversabilă. Dacă introducem $\bar{F}_Q$ ca un operator liniar stabil de grad relativ corespunzător, versiunea neliniară a relaţiei (10.123) devine:

$$Q\langle 0\rangle=\varphi^{-1}\left[\bar{\hat{H}}_p^{-1}\langle\bar{F}_Q\langle 0\rangle\rangle\right]. \tag{10.126}$$

În aceste condiţii se obţine comanda sub forma:

$$u(t)=\varphi^{-1}\left[\bar{\hat{H}}_p^{-1}\langle\bar{F}_Q\langle v(t)\rangle\rangle\right], \tag{10.127}$$

ceea ce evidenţiază un model invers aproximativ al procesului neliniar care conduce direct la o ieşire a sistemului:

$$y(t)=\bar{F}_Q\langle v(t)\rangle+v_1(t). \tag{10.128}$$

În acest caz modelul paralel cu procesul se poate construi uşor ţinând seama de inversabilitatea modelului.

PROBLEME

10.1. Se consideră un proces în mişcare de rotaţie cu modelul liniar sub forma:

$$H_p(s)=\frac{1}{s^2}.$$

Se cere:

a) modelul de stare cu variabilele de stare poziţia şi viteza unghiulară;

b) portretul de fază pentru comenzi discontinue cu valori normalizate egale cu $+1$ şi respectiv -1;

c) sinteza legii de comandă neliniară care asigură răspunsul minimal în timp.

10.2. Se consideră structura de SRA cu regulator neliniar tripoziţional şi proces modelat prin $H_p(s)=\dfrac{K_p}{s(T_p s+1)}$ (fig. 10.49).

Se cere:

a) modelul de stare ataşat sistemului;

b) portretul de fază pentru $K_p=1$ şi $T_p=4s$;

c) funcţia de descriere ataşată regulatorului neliniar;

d) valorile limită ale parametrilor K_p şi T_p pentru care SRA este stabil.

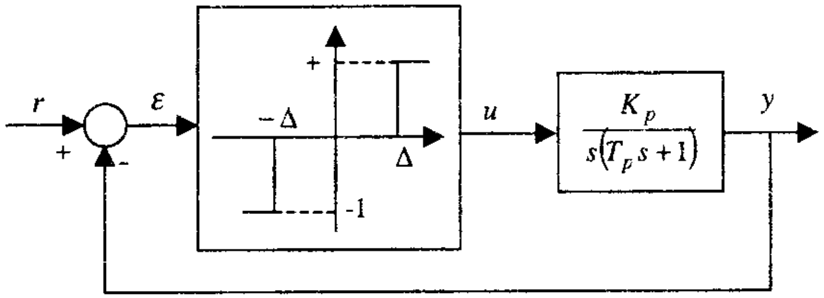


Fig. 10.49

10.3. Se consideră un sistem mecanic ce prezintă histerezis mecanic (fig. 10.50).

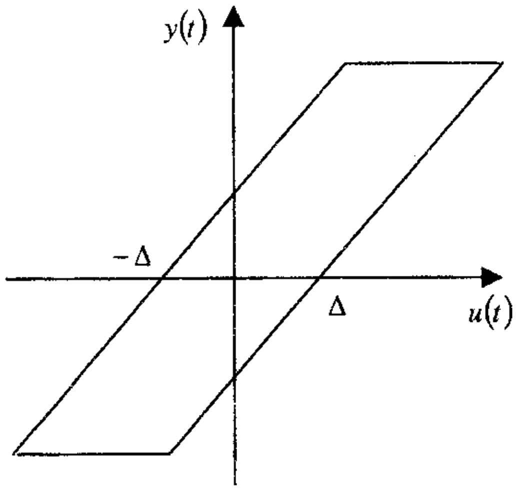


Fig. 10.50

Se cere:

a) funcţia de descriere ataşată acestei neliniarităţi pentru $u(t)=A\sin\omega t$;

b) caracteristicile de frecvenţă $(N(A/\Delta))$ şi $(\Psi(A/\Delta))$.

10.4. Se consideră un sistem mecanic având caracteristica statică reprezentată în figura 10.51.

Se cere funcţia de descriere pentru $u(t) = A\sin\omega t$.

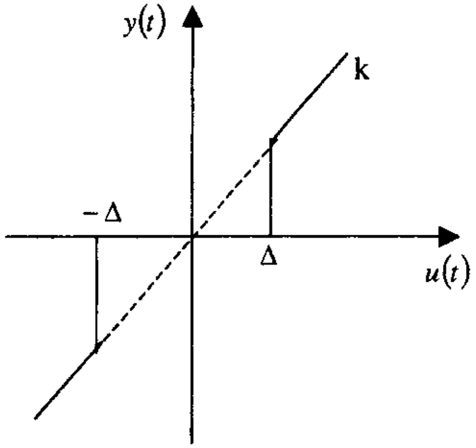


Fig. 10.51

10.5. Se consideră un SRA care conţine un element neliniar cu histerezis mecanic şi un element liniar caracterizat prin funcţia de transfer

$$H(s) = \frac{K}{s(0.5s+1)^2}.$$

Se cere:

a) frecvenţa ω şi Δ / A la intersecţia ciclurilor limită care apar pentru $K = 5$ şi $K = 10$;

b) valoarea amplificării K pentru care se obţine o margine de amplitudine de $6dB$.

10.6. Se consideră sistemul neliniar:

$$\dot{x}_1 = 10x_1 - 10x_2$$
$$\dot{x}_2 = 15x_1 - 12x_2 - 0.1\left(u - \tan^{-1} x_2\right)$$
$$y = x_2 + v_1$$

unde v_1 reprezintă perturbaţia combinată ce acţionează la ieşire.

Se cere:

a) să se arate că sistemul nu este stabil inversabil;

b) să se arate că sistemul este stabil în buclă deschisă;

c) să se proiecteze o lege de comandă care liniarizează prin reacţie şi asigură urmărirea referinţei constante şi rejecţia perturbaţiei v_1.

10.7. Se consideră un sistem caracterizat prin:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} x(t).$$

Se cere:

a) să se selecteze care dintre funcţiile de mai jos sunt funcţii Liapunov pentru acest sistem:

$$V_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2,$$
$$V_2(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_2^2,$$
$$V_3(x_1, x_2) = x_2^2,$$
$$V_4(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2;$$

b) funcţie Liapunov corespunzătoare pentru care sistemul este global asimptotic stabil.

10.8. Se consideră sistemul caracterizat prin:

$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_1\left(x_1^2 + x_2^2 - 1\right)$$
$$\dot{x}_2 = x_1 + x_2\left(x_1^2 + x_2^2 - 1\right)$$

şi o funcţie Liapunov:

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2.$$

Se cere să se verifice stabilitatea sistemului.

10.9. Pentru sistemele invariante descrise prin modelele:

$$H_1(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$$
$$H_2(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$
$$H_3(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)}$$

se cere a determina limitele parametrilor K_1, K_2 sau K pentru neliniarităţile sectoriale $\varphi(y) \in [K_1, K_2]$ sau $\varphi(y) \in [0, K]$ pentru care sistemele în buclă închisă sunt stabile.

11. SISTEME ADAPTIVE

11.1. Introducere

Sistemele adaptive reprezintă o nouă categorie de sisteme de conducere caracterizate prin capacitatea de a compensa modificările structurale sau parametrice ale obiectului condus prin modificări corespunzătoare ale structurii sau ale parametrilor algoritmului de conducere. Este cunoscut faptul că structurile convenționale de reglare/conducere sunt performante în măsura în care informația inițială despre procesul condus (inclusiv informații asupra mărimilor exogene) este cât mai completă. Regulatoarele robuste sunt proiectate pe baza unui model matematic precizat și o clasă de incertitudini bine definită.

În condițiile în care informația inițială despre proces este redusă, modelul matematic ce caracterizează procesul și mărimile exogene este incomplet, neliniar și variant în timp, apare în mod natural cerința adoptării unor noi concepte de conducere a procesului, care să includă funcții suplimentare. Astfel, într-un sistem adaptiv, se regăsesc funcțiile:

- de completare a informației despre proces și mărimile exogene;
- de proiectare on-line a strategiei de conducere, având la bază un model matematic sau informația cât mai completă despre proces;
- de elaborare a comenzii, în concordanță cu cerințele de performanță impuse.

Sistemele adaptive au avut o evoluție spectaculoasă în ultimii 40 de ani, începând cu anii 1960, când s-a definit capacitatea unui regulator de a modifica parametrii de acord. Primele regulatoare adaptive au fost concepute pentru aplicații în domeniul aviației [5]. Rezultate semnificative în cercetarea sistemelor adaptive au fost obținute în deceniul al 7-lea. Astfel, s-a fundamentat teoria controlului dual [52], s-au dezvoltat proceduri recursive de identificare și estimare a parametrilor [5], s-au formulat principii recursive în controlul adaptiv [5, 58].

Evoluția sistemelor adaptive în ultimii 20 de ani este strâns legată de evoluția structurilor cu microprocesoare capabile să implementeze proceduri avansate de conducere, inclusiv proceduri adaptive. Din punct de vedere conceptual, sistemele adaptive au cunoscut o dezvoltare semnificativă în ultimii ani ai secolului al XX-lea. Astfel, au fost elaborate proceduri de proiectare a sistemelor adaptive pe baza teoriei stabilității și hiperstabilității [5, 45, 52, 87, 88], au fost dezvoltate noi metode de proiectare robustă a sistemelor și noi proceduri robuste de estimare în timp real a parametrilor. În ultimii ani, a fost finisată o largă clasă de proceduri de proiectare a sistemelor adaptive, asigurând robustețe soluțiilor și o reală implementabilitate. Au fost dezvoltate noi concepte de conducere adaptivă robustă multimodel și au fost propuse soluții viabile pentru conducerea în timp real a unor procese complexe caracterizate prin modele neliniare.

Cele mai multe sisteme adaptive de conducere pot fi grupate în două mari grupe:

- *sisteme adaptive în circuit deschis* (feedforward adaptive controllers);
- *sisteme adaptive în circuit închis* (feedback adaptive controllers).

Structura generală a unui sistem adaptiv cu adaptare în circuit deschis este prezentată în figura 11.1.

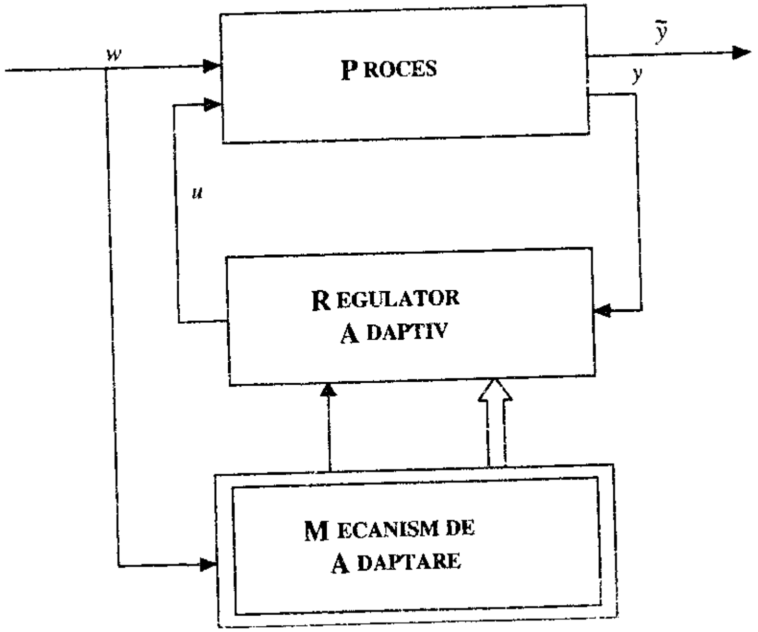


Fig. 11.1

Adaptarea structurii sau/şi a parametrilor regulatorului se realizează în funcţie de mărimile exogene w (referinţe, perturbaţii) măsurabile. Pentru a realiza adaptarea în buclă deschisă, se impune a fi cunoscută influenţa semnalelor externe măsurabile asupra comportării procesului şi a buclei de reglare. Din această categorie de sisteme adaptive fac parte structurile de conducere cu „planificarea amplificării" (gain scheduling), aplicate în conducerea avioanelor. În cadrul acestor structuri, factorul de amplificare al regulatorului se proiectează în avans pentru semnalele măsurabile care descriu condiţiile de funcţionare cu aproximaţie şi semnalele externe, care se modifică lent în comparaţie cu dinamica procesului.

Procedura poate fi extinsă şi pentru regulatoare cu mai mulţi parametri de acord. Parametrii calculaţi pentru anumite condiţii de funcţionare sunt memoraţi sub formă de tabele şi pot fi utilizaţi atunci când condiţiile de funcţionare sunt identice sau apropiate cu cele pentru care au fost calculaţi prin proiectare.

Avantajul esenţial al acestor structuri de sisteme adaptive este reacţia rapidă la modificările procesului, întrucât comportarea procesului este cunoscută înainte şi nu se identifică pe baza măsurărilor efectuate asupra intrărilor şi ieşirilor din proces.

Ca dezavantaj al acestor structuri se menţionează faptul că se neglijează semnalele nemăsurabile şi numărul mare al parametrilor ce trebuie memoraţi pentru a acoperi cât mai multe condiţii de funcţionare.

Cea de a doua categorie de sisteme adaptive (cea mai utilizată) are la bază principiul reacţiei, iar legea de reglare adaptivă se determină pe baza informaţiilor ce definesc comportarea procesului. Structura generală a unui astfel de sistem adaptiv este prezentată în figura 11.2.

Informaţia măsurabilă din proces este folosită pentru a construi un model comportamental al procesului, iar pe baza acestuia se proiectează noua strategie de conducere. În acest caz, regulatorul adaptiv îşi modifică on-line structura sau parametrii în funcţie de modelul obţinut şi în concordanţă cu cerinţele de performanţă impuse prin funcţia obiectiv I.

Schema detaliată a unui sistem adaptiv în circuit închis este prezentată în figura 11.3.

Astfel, în afara *reacţiei negative*, care are rolul de a asigura satisfacerea performanţelor pentru informaţii apriorice date despre proces, este inclusă o nouă buclă de adaptare care, pe baza rezultatelor identificării procesului condus sau a întregului sistem, asigură adaptarea comenzii la varianţa sau necunoaşterea parametrilor sau/şi a structurii obiectului condus. În acest caz, incertitudinile parametrice sau structurale sunt compensate prin *proiectarea on-line* a legii de comandă pe baza informaţiilor obţinute prin identificare.

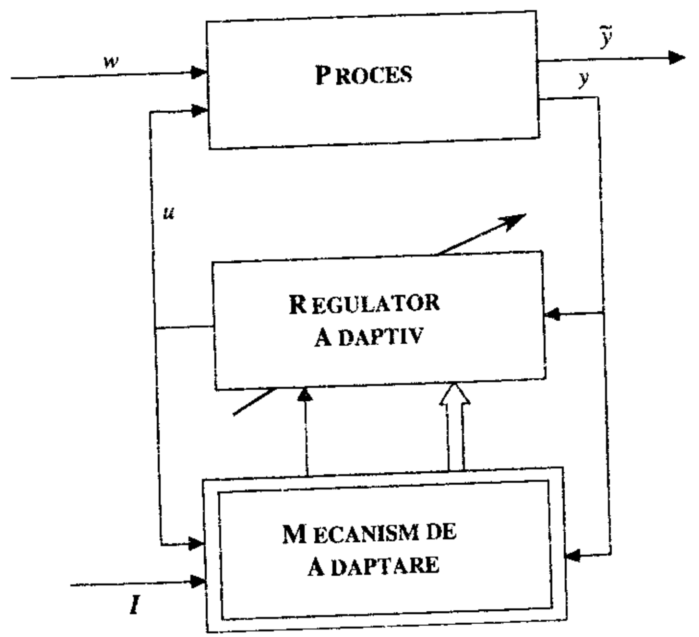


Fig. 11.2

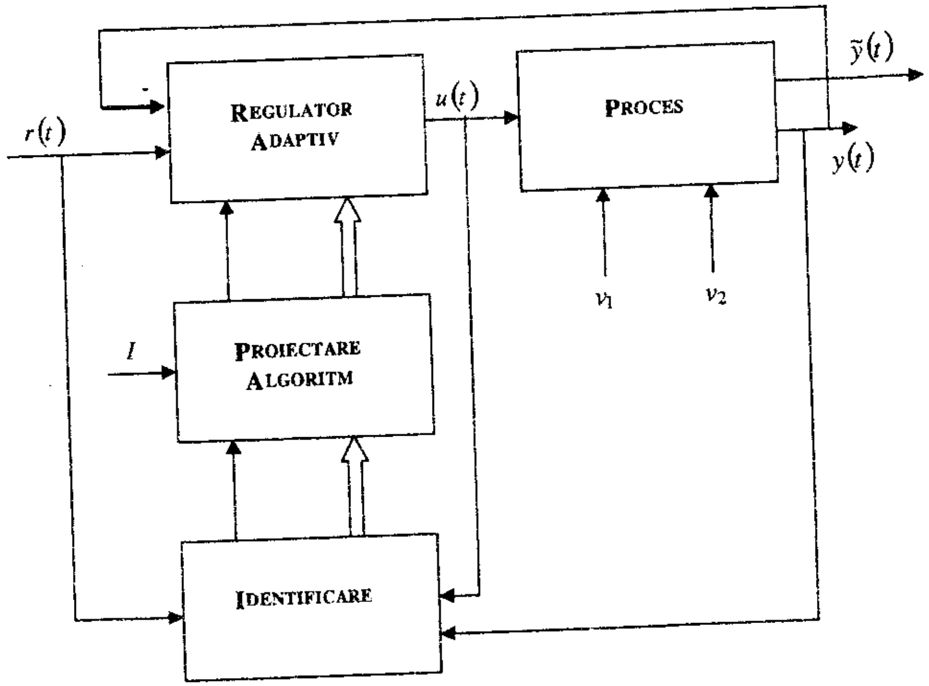


Fig. 11.3

Mecanismul de adaptare în acest caz asigură identificarea procesului şi proiectarea on-line a regulatorului (structură şi/sau parametrii algoritmului de reglare).

În practică. sunt multe procese pentru care modelele matematice ce caracterizează funcţionarea lor sunt modele ce includ incertitudini parametrice şi/sau structurale (roboţi, sisteme energetice, sisteme de navigaţie, procese metalurgice şi chimice, ş.a.).

O clasificare a sistemelor adaptive în circuit închis este prezentată în [52, 58].

În cadrul acestui capitol, sunt prezentate două mari categorii de sisteme adaptive: ***sisteme adaptive cu model de referinţă*** (SAMR) şi ***sisteme adaptive cu identificarea modelului procesului*** (SAIM). Aceste două tipuri de sisteme adaptive fac parte din categoria sistemelor adaptive „NEDUALE“ caracterizate prin faptul că regulatorul se proiectează prin minimizarea unui criteriu de performanţă, luând în consideraţie numai valorile prezente şi trecute ale semnalelor din bucla de reglare şi informaţia curentă despre proces, stare sau semnale estimate.

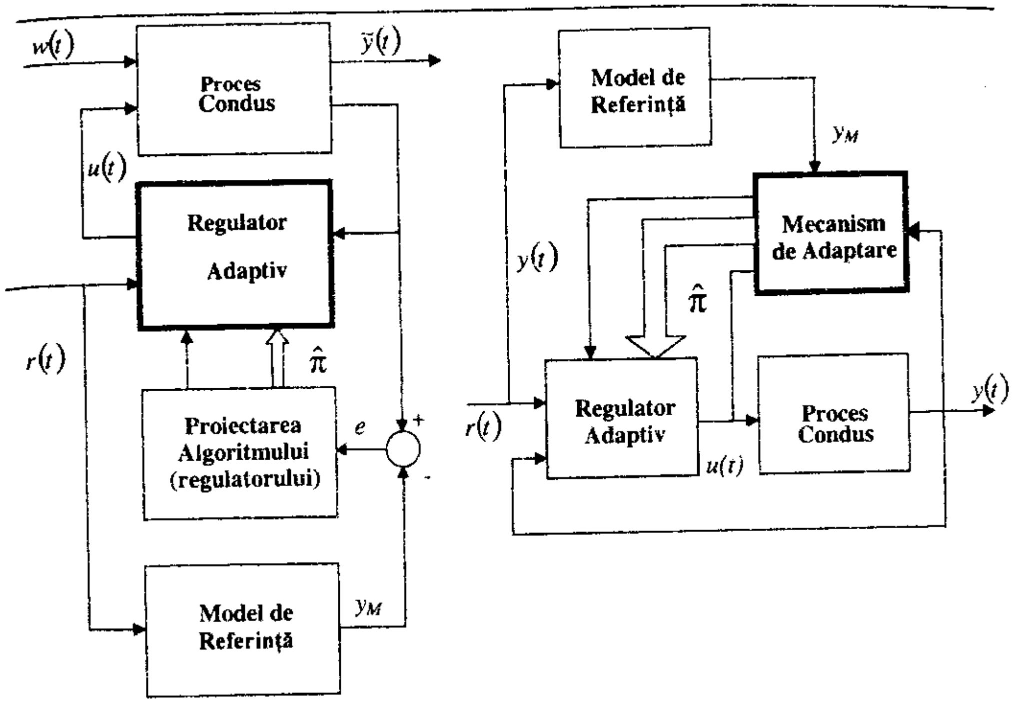
Cele două categorii de sisteme adaptive fac parte din clasa sistemelor adaptive în circuit închis, legea de comandă adaptivă se determină pe baza informaţiilor obţinute despre procesul condus.

Strategia de proiectare a regulatoarelor adaptive *neduale* este asociată cu *principiul separării* şi cu *principiul echivalenţei certe* (certainty equivalence principle).

Principiul separării presupune separarea funcţiilor de identificare şi de elaborare a comenzii adaptive, iar principiul echivalenţei certe presupune că modelul identificat al procesului este cunoscut fără incertitudini.

Structura generală a unui sistem adaptiv cu model de referinţă este prezentată în figura 11.4.

Modelul de referinţă caracterizează comportarea dorită a sistemului de reglare pentru o clasă dată de intrări. Mecanismul de adaptare în acest caz forţează comportarea SRA spre o comportare impusă, prin alegerea corespunzătoare a modelului de referinţă. Mecanismul de adaptare asigură proiectarea algoritmului de reglare, asigurând minimizarea unui criteriu de performanţă definit în funcţie de eroare $e = y - y_M$, unde y_M este ieşirea modelului de referinţă. Alegerea modelului de referinţă reprezintă o etapă a fazei de proiectare a sistemului adaptiv, aceasta răspunzând, atât cerinţelor de performanţă impuse de comportarea ideală dorită a întregului sistem, cât şi cerinţelor structurale impuse de particularităţile procesului. Regulatorul este uzual parametrizat printr-un număr de parametri ajustabili $\hat{\pi}$, operând astfel ca o familie de regulatoare destinată unei clase de procese.



a) b)

Fig. 11.4

Atunci când parametrii procesului sunt exact cunoscuţi, parametrii corespunzători ai regulatorului fac posibil ca ieşirea procesului să fie identică cu ieşirea modelului de referinţă.

Când parametrii procesului nu sunt cunoscuţi, mecanismul de adaptare va ajusta parametrii regulatorului, astfel ca urmărirea asimptotică să fie cât mai exact realizată. Dacă legea de reglare este liniară în parametri ajustabili, spunem că *regulatorul* este *liniar parametrizat*. Cele mai utilizate sisteme adaptive sunt proiectate având la bază o parametrizare liniară a regulatorului, aceasta asigurând mecanismului de adaptare stabilitate şi convergenţa urmăririi.

Astfel, *mecanismul de adaptare în cadrul sistemelor adaptive cu model de referinţă asigură convergenţa la zero a erorii de urmărire*, prin modificarea parametrilor sau structurii regulatorului, cu asigurarea stabilităţii sistemului de reglare. Se poate uşor observa că *SAMR* are în componenţă două bucle: *o buclă interioară*, care este compusă din regulator şi proces şi o *buclă exterioară*, care ajustează parametrii regulatorului în direcţia anulării erorii de urmărire.

Pentru a compara o structură de SRA cu regulator fix şi cu regulator adaptiv, considerăm un proces de ordinul I şi un regulator proporţional cu două grade de libertate:

$$\dot{y}(t)=(a_p+\Delta)y(t)+u(t) \tag{11.1}$$

$$u(t)=-K_P y(t)+r(t) \tag{11.2}$$

unde Δ reprezintă incertitudinea asupra parametrului a_p cu valori cuprinse între două limite Δ_m şi Δ_M ($\Delta\in[\Delta_m,\Delta_M]$).

Modelul de referinţă selectat pentru acest SRA este caracterizat prin:

$$\dot{y}_m=-a_m y_m+r(t),\ a_m>0. \tag{11.3}$$

Presupunând că a_p este cunoscut, iar incertitudinea Δ este precizată ($\Delta\in[-20,10]$), se poate obţine K_P care asigură robusteţea stabilităţii.

Astfel, din (11.1) şi (11.2) rezultă:

$$\dot{y}(t)=(a_p+\Delta-K_P)y(t)+r(t) \tag{11.4}$$

iar condiţia de stabilitate a SRA rezultă:

$$a_p+\Delta-K_P<0, \tag{11.5}$$

sau

$$K_P>a_p+10.$$

Comportarea în regim staţionar a SRA se poate studia dacă se calculează eroarea $e(t)=y(t)-y_m(t)$ în regim staţionar ($e_{st}=\lim_{t\to\infty}e(t)$).

Din (11.4) se obţine:

$$\dot{y}(t)=-a_m y(t)+(a_p+\Delta-K_P+a_m)y(t)+r(t)$$

sau prin aplicarea transformatei Laplace în condiţii iniţiale nule:

$$Y(s)=\frac{1}{s+a_m}R(s)+\frac{a_p+\Delta-K_P+a_m}{s+a_m}Y(s).$$

Dacă ţinem seama de (11.3) şi (11.4) obţinem eroarea de urmărire:

$$E(s)=Y(s)-Y_m(s)=\frac{a_p+\Delta-K_P+a_m}{s+a_m}\cdot\frac{1}{s-a_p-\Delta+K_P}R(s). \tag{11.6}$$

În regim staţionar, dacă alegem la limită $K_P=a_m+a_p-10$ şi considerăm $a_m=1$ şi $R(s)=\frac{1}{s}$, se obţine:

$$e_{st}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\frac{\Delta-10}{11-\Delta}.$$

Valoarea maximă a erorii de urmărire se obţine pentru $\Delta_m=-20$ ($e_{st}=-30/31$), iar valoarea minimă se obţine pentru $\Delta=10$ ($e_{st}=0$).

Astfel, regulatorul fix (11.2) poate fi folosit pentru un domeniu cunoscut al incertitudinii Δ şi nu asigură urmărirea asimptotică pentru referinţe diferite de zero.

Pentru a_p cunoscut şi $\Delta=0$ legea de comandă poate fi:

$$u(t)=-\hat{K}_P y(t)+r(t)$$

iar $\hat{K}_P=a_p+a_m$, ceea ce asigură o ecuaţie a erorii sub forma:

$$\dot{e}(t)=-a_m e(t),\ e(0)=y(0)-y_m(0).$$

În cazul în care a_p este necunoscut, legea de reglare nu poate fi implementată deoarece $\hat{K}_P$ este necunoscut. În aceste condiţii, legea de reglare poate avea forma:

$$u(t)=-K_P(t)y(t)+r(t)$$

unde $K_P(t)$ reprezintă o estimare a parametrului $\hat{K}_P$.

Dacă introducem notaţia:

$$\tilde{K}_P:=K_P(t)-\hat{K}_P$$

atunci ecuaţia erorii de urmărire devine:

$$\dot{e}(t)=-a_m e(t)+\tilde{K}_P y(t),\ t\ge 0. \tag{11.7}$$

Pentru e determina legea de variaţie a parametrului $K_P(t)$ care asigură convergenţa asimptotică la zero a erorii de urmărire, alegem pentru sistemul (11.7) funcţia Liapunov:

$$V(e,\tilde{K}_P)=e^2(t)+\tilde{K}_P^2(t)$$

a cărei derivată în timp este:

$$\dot{V}=\frac{d}{dt}V(e,\tilde{K}_P)=2\left[e(t)\dot{e}(t)+\tilde{K}_P(t)\dot{\tilde{K}}(t)\right]. \tag{11.8}$$

Deoarece $\hat{K}_P$ este constant şi ţinând seama de (11.7), ecuaţia (11.8) devine:

$$\dot{V}=-2a_m e^2(t)+2e(t)y(t)\tilde{K}_P(t)+2\tilde{K}_P(t)\dot{\tilde{K}}_P(t).$$

Stabilitatea asimptotică a sistemului (11.7) se obţine pentru $\dot{V}<0$, ceea ce implică alegerea legii de ajustare a factorului de proporţionalitate K_P sub forma:

$$\dot{K}_P(t)=-e(t)y(t),\ t\ge 0$$

sau

$$K_P(t) = -\int_0^t e(\tau)y(\tau)d\tau + K_P(0), \qquad (11.9)$$

unde $K_P(0)$ este o estimaţie iniţială a parametrului necunoscut $\hat{K}_P$. O asemenea lege de ajustare a parametrului K_P asigură $\dot{V} = -2a_m e^2(t) < 0$, ceea ce asigură stabilitatea sistemului pentru o clasă largă de incertitudini parametrice cu urmărirea asimptotică a modelului de referinţă.

Sistemele adaptive cu model de referinţă sunt definite ca sisteme neliniare şi variante în timp.

Pentru aplicaţii practice, adaptarea poate fi împărţită în trei etape:

- compararea comportării sistemului închis cu comportamentul unui sistem impus prin modelul de referinţă;
- calculul parametrilor sau structura regulatorului pe baza legii de adaptare;
- ajustarea regulatorului.

Diferenţele între diversele structuri de sisteme adaptive cu model de referinţă sunt determinate de procedurile de proiectare a legii de adaptare.

Sistemele adaptive cu model de referinţă au capacitatea de adaptare rapidă la semnalele de intrare definite, putând fi proiectate pe baza teoriei stabilităţii sistemelor neliniare.

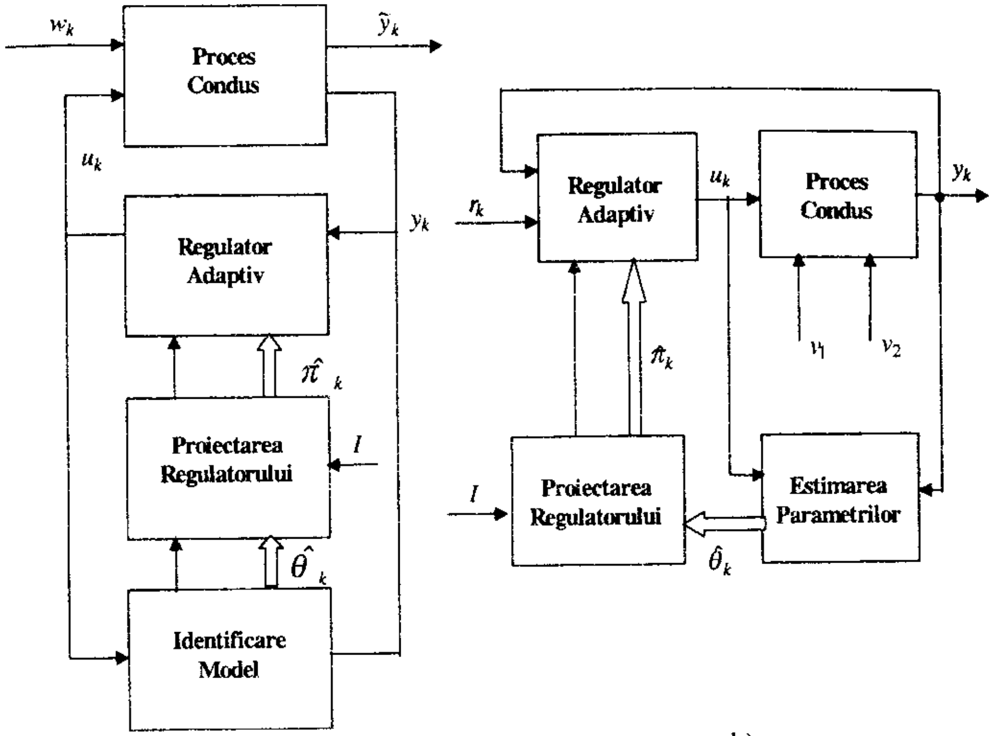
Structura generală a unui sistem adaptiv cu identificarea modelului matematic al procesului este prezentată în figura 11.5.

Sistemele adaptive cu identificarea modelului matematic (**SAIM**) sunt cunoscute şi sub denumirea de *sisteme adaptive cu autoacordare*.

În cadrul structurilor SAIM identificăm cu uşurinţă o procedură de identificare a modelului procesului şi o procedură de proiectare on-line a regulatorului.

Aceste sisteme sunt bazate pe principiul separării (echivalenţei certe) şi pe aproximarea că parametrii estimaţi ai modelului sau variabilele de stare sunt identici cu parametrii reali sau variabilele de stare reale ale procesului condus. Parametrii reali ai procesului sau variabilele reale ale acestuia sunt înlocuiţi prin estimaţiile lor obţinute on-line.

Sistemele adaptive cu identificarea modelului pot fi divizate în două clase, în funcţie de tipul modelelor matematice identificate: *modele parametrice* sau *modele neparametrice*.



a) b)

Fig. 11.5

Mecanismul de adaptare din figura 11.5*b* conţine o procedură de estimare recursivă a parametrilor obiectului condus şi o procedură de proiectare a regulatorului pe baza rezultatelor estimării. Astfel, se evidenţiază în cadrul acestei structuri o buclă convenţională de reglare ce se constituie într-un prim nivel de reglare şi o buclă de adaptare ce reprezintă cel de-al doilea nivel ierarhic în conducerea procesului. Parametrii obiectului condus, a cărui structură se presupune cunoscută, se estimează la fiecare moment de timp şi sunt utilizaţi pentru proiectarea parametrilor regulatorului. Comanda se calculează pe baza parametrilor determinaţi şi în funcţie de semnalele funcţionale măsurate y_k şi u_k.

Dacă se notează prin $\hat{\theta}_k$ vectorul parametrilor estimaţi la momentul k şi prin $\hat{\pi}_k$, vectorul parametrilor regulatorului, iar prin φ_k vectorul de regresie ce conţine informaţia funcţională curentă şi trecută, obţinută prin măsurarea variabilelor y_k şi u_k, un sistem adaptiv cu autoacordare poate fi definit prin relaţiile:

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + F\left(\hat{\theta}_{k-1}, \varphi_k, y_k\right)$$

$$\hat{\pi}_k = f(\hat{\theta}_k) \tag{11.10}$$

$$u_k = g(\hat{\pi}_k, \varphi_k)$$

unde funcțiile F, f și g definesc proceduri de estimare a parametrilor, de proiectare a algoritmului de reglare și de elaborare a comenzii.

Estimarea parametrilor poate fi înțeleasă simplu, ca un proces de găsire a unui set de parametri ce filtrează datele de intrare-ieșire disponibile din proces. Pentru procese liniare, există multe tehnici disponibile pentru a estima parametrii necunoscuți ai procesului. Există, de asemenea, multe proceduri de proiectare a algoritmilor de reglare pe baza modelului procesului (alocare de poli, PID, regulator liniar pătratic (LQR), minimă varianță sau tehnici H^∞ de proiectare). Prin combinarea diferitelor proceduri de estimare și de proiectare a legilor de comandă se obține o mare varietate de regulatoare cu autoacordare (*self-tuning*).

Pentru modele liniare, regulatoarele sunt parametrizate liniar, iar comanda se generează sub forma:

$$u_k = \hat{\pi}_k^T \cdot \varphi_k \, . \tag{11.11}$$

În cazul în care parametrii regulatorului se obțin prin calcul, pe baza parametrilor estimați ai procesului, spunem că avem un *sistem adaptiv indirect*, deoarece translația se face de la parametrii procesului la parametrii regulatorului. Dacă este posibil să se reparametrizeze procesul, astfel încât modelul să conțină parametrii regulatorului, putem realiza un *sistem adaptiv direct*. În acest caz, se estimează direct parametrii regulatorului, fără a parcurge faza de proiectare a parametrilor algoritmului.

Funcțiile de transfer atașate procesului condus și regulatorului sunt parametrizate în $\hat{\theta}_k$ și, respectiv, $\hat{\pi}_k$:

$$H_P(z,\hat{\theta}) = \frac{\hat{b}_1 z^{-1} + \hat{b}_2 z^{-2} + \cdots + \hat{b}_m z^{-m}}{1 + \hat{a}_1 \hat{z}^{-1} + \hat{a}_2 z^{-2} + \cdots + \hat{a}_n z^{-n}}, \tag{11.12}$$

respectiv

$$H_R(z,\hat{\pi}) = \frac{\hat{q}_0 + \hat{q}_1 z^{-1} + \cdots + \hat{q}_n z^{-n}}{1 + \hat{p}_1 z^{-1} + \cdots + \hat{p}_n z^{-n}}. \tag{11.13}$$

Parametrii estimați ai procesului definesc vectorul:

$$\hat{\theta}_k = \left[\hat{b}_1 \;\; \hat{b}_2 \cdots \hat{b}_m \;\; \hat{a}_1 \;\; \hat{a}_2 \;\; \hat{a}_n\right]^T, \tag{11.14}$$

iar parametrii regulatorului determinați în funcție de $\hat{\theta}_k$ formează vectorul $\hat{\pi}_k$:

$$\hat{\pi}_k = [\hat{q}_0 \;\; \hat{q}_1 \cdots \hat{q}_n \;\; \hat{p}_1 \cdots \hat{p}_n]^T \tag{11.15}$$

la iterația k.

Relațiile între parametrii $\hat{\theta}_k$ și $\hat{\pi}_k$ sunt definite prin procedura de proiectare, iar comanda u_k se generează la fiecare iterație în funcție de rezultatele estimării parametrilor procesului condus.

În cazul reglării adaptive directe, se determină direct parametrii $\hat{\pi}_k$ ai regulatorului printr-o procedură de estimare, dacă se parametrizează procesul în funcție de $\hat{\pi}_k$. Astfel, se poate include în (11.12) relația:

$$\hat{\theta}_k = f^{-1}(\hat{\pi}_k) \tag{11.16}$$

dacă funcția f este inversabilă, iar y_k devine:

$$\hat{y}_k = h(\hat{\pi}_k, \varphi_k) \, .$$

Este de remarcat faptul că ambele scheme de reglare cu model de referință și cu autoacordare au în alcătuire două bucle de reacție. *Bucla interioară* este o buclă convențională de reglare, ce cuprinde procesul și regulatorul, iar *bucla exterioară* este o buclă de ajustare a parametrilor sau structurii regulatorului având la bază informațiile funcționale ale procesului (intrări, ieșiri). Metodele pentru proiectarea buclei interioare și tehnicile de ajustare a parametrilor sunt diferite pentru cele două scheme de adaptare.

În comparație cu *SAMR*, sistemele cu autoacordare (sistemele adaptive cu identificarea modelului) sunt mai flexibile, datorită posibilităților multiple de cuplare a diferitelor metode de estimare și proiectare a regulatoarelor. Totuși, stabilitatea și convergența sistemelor cu autoacordare sunt în general dificil a le garanta, adesea impunându-se ca semnalele de excitație să fie suficient de puternice pentru a se obține o estimație consistentă. Parametrii procesului sau ai regulatorului în cadrul structurilor de sisteme adaptive *SAMR* și *SAIM* sunt estimați în timp real, iar estimațiile sunt folosite pentru proiectarea regulatorului sau generarea directă a comenzii, fără a lua în considerație incertitudinile estimațiilor. În multe scheme de estimare este posibil a obține o măsură a calității estimațiilor și a folosi aceasta pentru modificarea regulatorului.

Sistemele adaptive sunt inerent neliniare, comportarea lor fiind dificil de analizat. Teoria sistemelor neliniare, teoria stabilității, identificarea sistemelor, estimarea recursivă a parametrilor, controlul optimal și stocastic contribuie la înțelegerea sistemelor adaptive.

Astfel, o abordare riguroasă a problematicii (analiza, sinteza) sistemelor adaptive presupune o înțelegere profundă a disciplinelor mai sus menționate.

Teoria sistemelor adaptive operează cu metode specifice analizei, cât și cu metode destinate proiectării sistemelor adaptive. Probleme cum sunt stabilitatea, robustețea și convergența soluțiilor sistemelor adaptive, în strânsă conexiune cu problemele implementării sistemelor adaptive, constituie în continuare teme de cercetare de reală actualitate.

11.2. Sisteme adaptive cu model de referinţă (SAMR)

11.2.1. Introducere

În figura 11.6 se prezintă structura standard a unui SAMR. Modelul de referinţă (MR) defineşte comportarea dorită a SRA pentru o referinţă specificată. Parametrii sau structura regulatorului se modifică în funcţie de eroarea dintre ieşirea y a SRA şi ieşirea y_M a modelului de referinţă. Se evidenţiază în această structură bucla de reglare clasică şi o buclă exterioară, care are rolul de ajustare a parametrilor sau a structurii regulatorului.

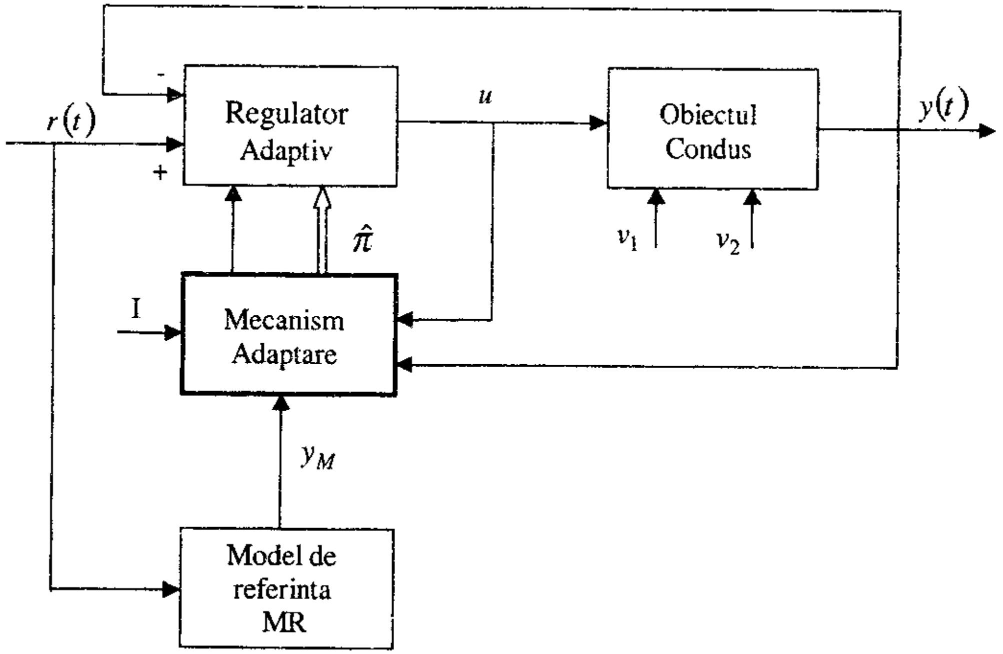


Fig. 11.6

Mecanismul de adaptare, prin ajustarea parametrilor regulatorului forţează comportarea SRA spre o comportare impusă prin modelul de referinţă. O asemenea abordare sugerează posibilitatea de a utiliza un regulator liniar pentru un model liniar al procesului şi un mecanism de adaptare neliniar care asigură menţinerea performanţelor impuse SRA prin intermediul modelului de referinţă.

Parametrii π ai regulatorului sunt ajustaţi direct prin minimizarea criteriului de performanţă $I = f(e)$ ataşat mecanismului de adaptare.

Principalele metode de analiză şi sinteză a SAMR sunt:

- metoda gradientului;
- metoda bazată pe teoria stabilităţii în sens Liapunov;
- metoda bazată pe teoria pasivităţii.

11.2.2. Urmărirea modelului

Problema sintezei SAMR se reduce în esenţă la asigurarea erorii $e = y - y_M$ cât mai mică posibil, forţând astfel SRA la comportarea impusă de modelul de referinţă. Se poate realiza o urmărire perfectă a modelului de referinţă, asigurând o eroare cât mai aproape de zero pentru toate semnalele de referinţă, eroare care depinde de model, de SRA şi de referinţă.

Minimizarea erorii presupune rezolvarea unei probleme de optimizare a parametrilor regulatorului, astfel încât ieşirea măsurată a procesului condus pentru o referinţă dată să fie cât mai apropiată de ieşirea dorită a modelului de referinţă. Performanţele dorite ale SRA sunt impuse prin alegerea modelului de referinţă MR.

Pentru un model liniar discret de forma:

$$y_k = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u_k \tag{11.17}$$

se poate recomanda un regulator liniar descris prin modelul:

$$Ru_k = Tr_k - Sy_k , \tag{11.18}$$

unde R, S, T sunt polinoame în operatorul q^{-1}. Presupunem că polinoamele A şi B sunt relativ prime, iar modelul (11.17) este propriu (în cazul continuu) sau cauzal (în cazul discret). Admitem că polinomul A este monic.

Pentru structura de SRA prezentată în figura 11.17 se cere a găsi un mecanism de adaptare care să ajusteze parametrii regulatorului (r_i, t_j, s_l), astfel încât eroarea de urmărire a modelului:

$$y_m = \frac{B_m(q^{-1})}{A_m(q^{-1})} r_k \tag{11.19}$$

să fie minimă în prezenţa incertitudinilor ce caracterizează polinoamele A şi B.

Din (11.17) şi (11.18) rezultă ecuaţia:

$$y_k = \frac{BT}{AR + BS} r_k . \tag{11.20}$$

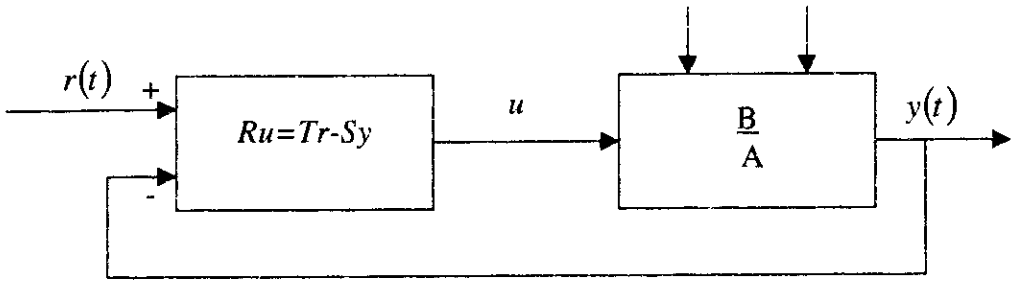


Fig. 11.7

Ținând seama de (11.19), pentru a obține răspunsul dorit al SRA cu regulatorul (11.18), A_M trebuie să dividă polinomul caracteristic, iar zerourile procesului (date de $B=0$) vor fi incluse ca zerouri ale sistemului închis, indiferent dacă pot fi compensate de polii sistemului închis.

Deoarece zerourile instabile sau foarte aproape de cercul unitar nu pot fi compensate, polinomul B se factorizează sub forma

$$B = B^+B^-, \tag{11.21}$$

unde B^+ conține acei factori ce pot fi compensați, iar B^- conține factorii ce nu pot fi compensați. Se presupune că B^+ este monic și conține zerourile stabile.

În aceste condiții și ținând seama că gradul polinomului caracteristic este mai mare decât gradul polinomului A_mB^+, se include printre divizorii acestuia și polinomul caracteristic α_e al estimatorului de stare.

Astfel, polinomul caracteristic conține trei tipuri de factori: zerourile stabile ale procesului prin B^+, polii modelului dorit dați prin polinomul A_m și polii estimatorului dați prin polinomul α_e.

În aceste condiții:

$$AR + BS = B^+\alpha_e A_m \tag{11.22}$$

reprezintă o ecuație diofantică (v.§ 8.3).

Din această identitate, urmează că B^+ divide polinomul R, deci:

$$R = B^+R_1 \tag{11.23}$$

și ecuația (11.22) capătă forma:

$$AR_1 + B^-S = \alpha_e A_m. \tag{11.24}$$

Din (11.20) și (11.19) rezultă că B^- trebuie să dividă B_m:

$$B_m = B^-B_m'$$

și, în consecință:

$$T = \alpha_e B_m'. \tag{11.25}$$

Condițiile pentru existența soluției ecuației diofantice (11.22) sunt date în § 8.3.

Legea de reglare cu două grade de libertate definită prin relația (11.18) cu polinoamele R, S și T date prin relațiile (11.23), (11.24) și (11.25) asigură urmărirea perfectă a modelului de referință, dacă sunt îndeplinite condițiile de compatibilitate pentru obținerea soluției ecuației diofantice (11.22).

11.2.3. Metoda gradientului (Regula MIT)

Procedura de ajustare a parametrilor conform acestei metode este cunoscută și sub denumirea de regula MIT [5].

Problema ajustării parametrilor în acest caz se reduce la minimizarea unei funcții obiectiv $I = f(e)$, unde $e = y - y_m$.

Alegând un criteriu pătratic de forma:

$$I = \frac{1}{2}e^2, \tag{11.26}$$

rezultă

$$I = F(p_1, p_2, \ldots\ldots, p_N),$$

unde p_i sunt parametrii regulatorului, cu $\pi^T = [p_1, p_2, \ldots, p_N]$.

Pentru minimizarea criteriului (11.26), se alege ca direcție de căutare a minimului gradientul negativ al funcției obiectiv

$$\frac{d\pi}{dt} = -\gamma\frac{\partial F}{\partial \pi} = -\gamma e\frac{\partial e}{\partial \pi}. \tag{11.27}$$

Dacă admitem că parametrii se schimbă mult mai lent decât alte variabile din sistem, atunci derivata $\frac{\partial e}{\partial \pi}$ poate fi evaluată sub aproximația că π este constant.

În relația (11.27), constanta pozitivă γ caracterizează viteza de adaptare iar $\frac{\partial e}{\partial \pi}$ reprezintă sensibilitatea sistemului în raport cu parametrii regulatorului.

Exemplul 11.1:

Se consideră procesul caracterizat prin modelul $\dot{y} = -a_p y + b_p u$ *[5, 48]. Presupunem că modelul de referință este tot de ordinul întâi:*

$$\dot{y}_m = -a_m y_m + b_m r.$$

O urmărire perfectă a modelului de referință se poate realiza cu un regulator de tip P cu parametrii necunoscuți t_0 și s_0:

$$u(t) = t_0 r(t) - s_0 y(t)$$

a căror valoare se poate calcula cu relațiile:

$$t_0 = \frac{b_m}{b_p} \text{ și } s_0 = \frac{a_m - a_p}{b_p}.$$

De remarcat faptul că parametrii (a_p, b_p) ai modelului procesului sunt necunoscuți.

Pentru a deduce legea de ajustare a parametrilor t_0 și s_0 folosind regula MIT, vom calcula eroarea e și funcțiile de sensibilitate $\frac{\partial e}{\partial t_0}$ și $\frac{\partial e}{\partial s_0}$. Dacă notăm cu $H_{0m}(s)$ funcția de transfer atașată modelului de referință și prin $H_0(s)$ funcția de transfer a SRA cu regulatorul selectat, rezultă cu ușurință:

$$Y(s) = H_0(s)R(s) = \frac{b_p t_0}{s + a_p + b_p s_0} R(s)$$

și

$$Y_m(s) = \frac{b_m}{s + a_m} \cdot R(s).$$

Funcțiile de sensibilitate se obțin cu ușurință dacă se definește eroarea și se calculează $\frac{\partial e}{\partial t_0}$ și $\frac{\partial e}{\partial s_0}$, unde:

$$e = \left[\frac{b_p t_0}{p + a_p + b_p s_0} - \frac{b_m}{p + a_m}\right] r.$$

Astfel, funcțiile de sensibilitate au forma:

$$\frac{\partial e}{\partial t_0} = \frac{b_p}{p + a_p + b_p s_0} r$$

$$\frac{\partial e}{\partial s_0} = -\frac{b_p^2 t_0}{(p + a_p + b_p s_0)^2} = -\frac{b_p}{p + a_p + b_p s_0} y$$

unde p reprezintă operatorul de derivare.

Aceste relații nu pot fi utilizate deoarece parametrii a_p și b_p sunt necunoscuți.

Pentru a obține relații utilizabile pentru ajustarea parametrilor, observăm că pentru valorile optime ale parametrilor regulatorului $s_0 = \frac{a_m - a_p}{b_p}$ se asigură identitatea:

$$p + a_p + b_p s_0 = p + a_m.$$

Mai mult, parametrul b_p poate fi absorbit în factorul de adaptare γb_p. De notat că în acest caz semnul parametrului b_p trebuie cunoscut.

Cu aceste observații se obțin ecuațiile de ajustare a parametrilor sub forma:

$$\frac{dt_0}{dt} = -\gamma\left[\frac{1}{p + a_m} r\right] e$$

$$\frac{ds_0}{dt} = \gamma\left[\frac{1}{p + a_m} y\right] e$$

În figura 11.8. se prezintă structura SAMR pentru exemplul considerat.

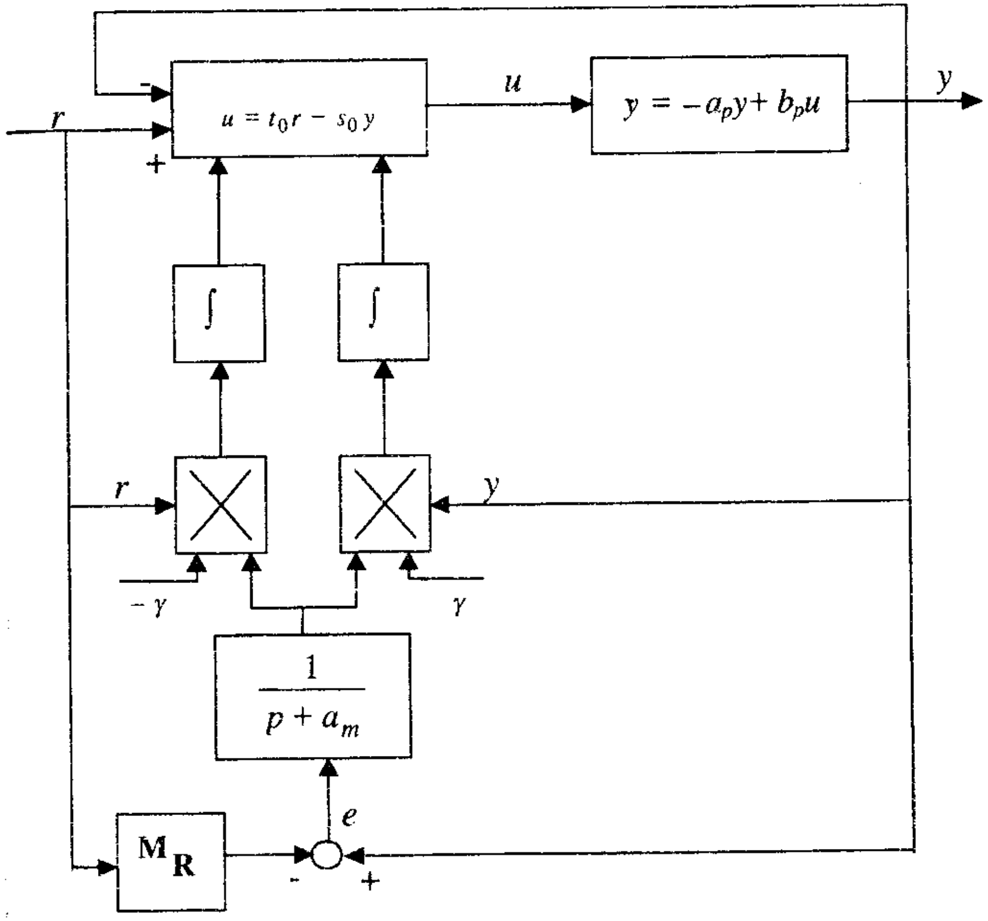


Fig. 11.8

Referitor la utilizarea regulii MIT pentru ajustarea parametrilor regulatorului, pot fi făcute următoarele remarci:

- nu este necesar a cere o urmărire perfectă a modelului;
- procedura poate fi aplicată atât sistemelor neliniare, cât şi sistemelor parţial cunoscute;
- integrarea ecuaţiilor ce definesc sensibilităţile erorii în raport cu parametrii şi efectuarea operaţiilor de multiplicare cu factorul γ şi mărimile r şi y asigură obţinerea valorilor parametrilor t_0 şi s_0;
- regula MIT asigură o bună adaptare pentru valori mici ale factorului de adaptare γ. Valori permisibile pentru γ sunt influenţate de amplitudinea referinţei şi de factorul de amplificare al procesului;
- alegerea necorespunzătoare a factorului de adaptare poate genera instabilitatea sistemului închis.

Regula MIT poate fi extinsă şi la sistemele de ordin n cu regulatoare cu două grade de libertate [5, 45, 58].

Regula MIT poate fi extinsă la optimizarea unor funcţii obiectiv mai generale decât forma pătratică.

Regulatorul adaptiv se obţine, în acest caz, parcurgând etapele:

1. Se specifică un model şi o structură de reglare cu parametri ajustabili şi performanţele sub forma unei funcţii obiectiv;
2. Se determină legea de ajustare a parametrilor prin calculul gradientului funcţiei obiectiv, în raport cu parametrii regulatorului;
3. Se alege viteza de modificare a parametrilor în direcţia opusă gradientului funcţiei obiectiv.

Utilizarea acestei proceduri presupune cunoaşterea parametrilor modelului procesului pentru a calcula funcţiile de sensibilitate, impunându-se în cazul normal estimarea parametrilor necunoscuţi ai modelului procesului.

În cazul în care modelele ataşate procesului şi modelului de referinţă sunt continue, ecuaţiile de ajustare a parametrilor r_i, s_i şi t_i conţin operatorul de derivare p în loc de operatorul de deplasare q.

11.2.4. Proiectarea SAMR pe baza teoriei stabilităţii

Aşa cum s-a menţionat în § 11.1, sistemele adaptive sunt alcătuite din două bucle de reglare: una interioară (convenţională) şi cealaltă exterioară, cu o dinamică mai lentă, care are rolul de a ajusta parametrii regulatorului, astfel încât eroarea de urmărire să tindă la zero. Asigurarea stabilităţii asimptotice a sistemului conduce în mod firesc la anularea erorii de urmărire, întrucât sistemul adaptiv are ca ieşire tocmai eroarea de urmărire. În literatură [5, 45, 87] sunt prezentate proceduri de sinteză a SAMR, apelând, fie la teorema de stabilitate Liapunov, fie la conceptul de hiperstabilitate. Pentru a ilustra ideea, vom considera în continuare un exemplu.

Exemplul 11.2:

Se consideră un proces de ordinul întâi, ai cărui parametri a_p şi b_p se presupun cunoscuţi:

$$\frac{dy}{dt} = -a_p y + b_p u$$

şi un model de referinţă caracterizat prin ecuaţia:

$$\frac{dy_m}{dt} = -a_m y_m + b_m r,\ a_m > 0$$

cu $y_m(0) = y_{m0}$ şi $r(t)$ un semnal extern limitat, ce caracterizează răspunsul dorit al sistemului.

Se cere a determina legea de variaţie a parametrilor regulatorului, punând condiţia ca SAMR să fie asimptotic stabil în sens Liapunov. Ecuaţia erorii se poate obţine pornind de la relaţia de definiţie după înlocuirea comenzii $u(t) = t_0 r - s_0 y$ în ecuaţia ce descrie funcţionarea obiectului condus:

$$\frac{de}{dt} = \frac{d}{dt}(y - y_m) = -a_m e + (a_m - a_p - b_p s_0)y + (b_p t_0 - b_m)r.$$

De notat că eroarea tinde la zero dacă parametrii regulatorului se aleg în funcţie de a_p şi b_p.

$$s_0 = \frac{a_m - a_p}{b_p} \cdot t_0 = \frac{b_m}{b_p}.$$

Astfel, dacă parametrii a_p şi b_p sunt cunoscuţi, rezultă cu uşurinţă parametrii regulatorului care asigură anularea erorii $e(t)$:

$$\dot{e} = \frac{de}{dt} = -a_m e$$

cu $e(0) = y(0) - y_{m0}$.

Obiectivul proiectării este de a determina un mecanism de ajustare a parametrilor regulatorului t_0 şi s_0, ţinând seama că a_p şi b_p sunt necunoscuţi.

Pentru acest scop, alegem o funcţie Liapunov de forma:

$$V(e, t_0, s_0) = \frac{1}{2}\left[e^2 + \frac{1}{b_p\gamma}(b_p s_0 + a_p - a_m)^2 + \frac{1}{b_p\gamma}(b_p t_0 - b_m)^2\right].$$

Această funcţie este zero când e este zero şi parametrii regulatorului egali cu valorile optimale. Derivata funcţiei V este:

$$\frac{dV}{dt}=e\frac{de}{dt}+\frac{1}{\gamma}\left(b_p s_o+a_p-a_m\right)\frac{ds_o}{dt}+\frac{1}{\gamma}\left(b_p t_o-b_m\right)\frac{dt_o}{dt}=$$

$$=-a_m e^2+\frac{1}{\gamma}\left(b_p s_o+a_p-a_m\right)\left(\frac{ds_o}{dt}-\gamma\ ye\right)+\frac{1}{\gamma}\left(b_p t_o-b_m\right)\left(\frac{dt_o}{dt}+\gamma re\right).$$

Pentru ca SAMR să fie asimptotic stabil în sens Liapunov, se impune a alege următoarele legi de ajustare a parametrilor t_0 şi s_0:

$$\frac{dt_o}{dt}=-\gamma re$$

$$\frac{ds_o}{dt}=\gamma\, ye$$

Într-adevăr prin utilizarea acestor legi de ajustare a parametrilor se obţine:

$$\frac{dV}{dt}=-a_m e^2<0$$

care evidenţiază că sistemul este asimptotic stabil în sens Liapunov, iar e va tinde către zero. De remarcat faptul că, nu în mod necesar, parametrii t_0 şi s_0 converg către valorile lor de echilibru. Din acest punct de vedere, legea de adaptare este similară cu regula MIT, însă funcţiile de sensibilitate sunt înlocuite cu alte semnale. De observat că în cadrul acestei proceduri, pentru a determina legea de adaptare, parametrii t_0 şi s_0 se consideră noile variabile de stare ale sistemului. Regula de ajustare a parametrilor t_0 şi s_0 obţinută prin aplicarea teoriei stabilităţii, este similară cu legea de ajustare obţinută prin regula MIT.

În ambele cazuri, legea de ajustare poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{d\pi}{dt}=\gamma\varphi e,$$

unde π este vectorul parametrilor regulatorului şi

$$\varphi=\left[-r,\ y\right]^T$$

sau

$$\varphi=\frac{1}{p+a_m}\left[-r,y\right]^T$$

pentru regula MIT.

Vectorul φ poate fi interpretat ca valoarea negativă a gradientului funcţiei cost.

11.2.5. Procedura generală de sinteză a SAMR

Se consideră un proces cu mai multe intrări şi mai multe ieşiri şi o structură de regulator cu parametrii necunoscuţi, astfel încât modelul de stare al sistemului închis are forma:

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t)=Ax(t)+Br(t)\ ;\ x_0\in R^{n_1}\\&y(t)=Cx(t)\end{aligned}\qquad(11.28)$$

unde $x\in R^{n_1}, r\in R^{m}, y\in R^{p}$, iar matricele A şi B de dimensiuni corespunzătoare au elementele ajustabile prin ajustarea parametrilor regulatorului.

Modelul de referinţă este descris prin ecuaţia de stare:

$$\begin{aligned}&\dot{x}_M=A_M x_M+B_M r\ ;\ x_{M_0}\in R^{n_2}\\&y_M=C_M x_M\end{aligned}\qquad(11.29)$$

unde x_M este starea ataşată MR, iar matricele A_M, B_M şi C_M asigură comportarea dorită, impusă pentru SRA. Se consideră că dimensiunea celor două sisteme este aceeaşi, vectorul eroare (ε) se calculează ţinând seama de ecuaţiile (11.28) şi (11.29):

$$\begin{aligned}&\varepsilon=x_M-x\\&\dot{\varepsilon}=A_M\varepsilon+\left(A_M-A\right)x+\left(B_M-B\right)r\end{aligned}\qquad(11.30)$$

Presupunem că toate elementele matricelor A şi B sunt ajustabile individual şi alegem o funcţie Liapunov sub forma [45, 58]:

$$\begin{aligned}V=\ &\varepsilon^T P\varepsilon+tr\left[\left(A_M-A\right)^T F_A^{-1}\left(A_M-A\right)\right]+\\&+tr\left[\left(B_M-B\right)^T F_B^{-1}\left(B_M-B\right)\right]\end{aligned}\qquad(11.31)$$

unde P, F_A^{-1}, F_B^{-1} sunt matrice pozitiv definite, ce urmează a fi determinate din condiţia de stabilitate în sens Liapunov.

Derivata funcţiei Liapunov se calculează cu relaţia:

$$\dot{V}=\dot{\varepsilon}^T P\varepsilon+\varepsilon^T P\dot{\varepsilon}-2tr\left[A_M-A\right]^T F_A^{-1}\dot{A}-2tr\left[B_M-B\right]^{-1}\dot{B}\qquad(11.32)$$

sau, dacă se ţine seama de (11.38), se obţine:

$$\begin{aligned}\dot{V}=\ &\left[\varepsilon^T A_M^T+x^T\left(A_M-A\right)^T+r^T\left(B_M-B\right)^T\right]P\varepsilon+\\&+\varepsilon^T P\left[A_M\varepsilon+\left(A_M-A\right)x+\left(B_M-B\right)r\right]-\\&-2tr\left[A_M-A\right]^T F_A^{-1}\dot{A}-2tr\left(B_M-B\right)^T F_B^{-1}\dot{B}\end{aligned}\qquad(11.33)$$

Dacă alegem P astfel încât să fie satisfăcută ecuaţia matricială

$$A_M^T P + PA_M = -Q \tag{11.34}$$

unde Q este o matrice pozitiv definită:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -\varepsilon^T Q\varepsilon + 2tr\left[(A_M - A)^T\left(P\varepsilon x^T - F_A^{-1}\dot{A}\right)\right] + \\ &+ 2tr\left[(B_M - B)^T\left(P\varepsilon\, r^T - F_B^{-1}\dot{B}\right)\right]\end{aligned} \tag{11.35}$$

Dacă se alege matricea A_M ca o matrice cu toate valorile proprii în semiplanul stâng (matrice Hurwitz), atunci se poate alege o matrice Q, astfel încât să poată fi utilizată ecuaţia (11.34) (vezi § 10.9).

În ecuaţia (11.35) primul termen este negativ definit pentru toţi $\varepsilon(t) \neq 0$, iar al doilea şi al treilea termen devin egali cu zero dacă alegem:

$$\begin{aligned}\dot{A} &= F_A[P\varepsilon] \,.\, x^T \\ \dot{B} &= F_B[P\varepsilon] \,.\, r^T\end{aligned} \tag{11.36}$$

Cele două ecuaţii reprezintă legile de modificare a parametrilor ajustabili ai regulatorului.

Dacă introducem funcţia $\varepsilon_a = P\varepsilon(t)$ în ecuaţiile (11.36), după integrare, obţinem:

$$\begin{aligned}A(t_1) &= \int_0^{t_1} F_A . \varepsilon_a(t) \,.\, x^T dt \\ B(t_1) &= \int_0^{t_1} F_B \,.\, \varepsilon_a(t) \,.\, r^T dt\end{aligned} \tag{11.37}$$

Un sistem asimptotic global stabil se obţine alegând matricele F_A şi F_B pozitiv definite.

Legea de adaptare s-a obţinut direct din funcţia Liapunov aleasă arbitrar. Aceasta arată că legea de adaptare care a rezultat face parte dintr-o mulţime. De remarcat, de asemenea, că matricele Q, F_A şi F_B se aleg arbitrar.

Procedura prezentată a presupus că starea sistemului este accesibilă măsurării.

Un rezultat similar se poate obţine apelând la conceptul de hiperstabilitate a unui sistem neliniar [58, 87].

Sistemele adaptive cu model de referinţă au o largă aplicabilitate în domeniul roboticii, industriei chimice, industriei energetice şi în domeniul aviaţiei.

Printre caracteristicile SAMR [58], remarcăm următoarele:

- Alegerea MR necesită o cunoaştere cât mai precisă a modelului procesului, informaţia apriorică trebuie să fie cât mai bogată;
- Un SAMR forţează bucla de reglare la o comportare impusă de MR, chiar dacă este posibilă o comportare mai bună;
- Pentru ajustarea parametrilor regulatorului, semnalul extern măsurabil $r \in \Re$ trebuie modificat continuu pentru a excita valorile proprii ale sistemului;
- Pentru cazul în care modelul procesului este liniar şi are o structură cunoscută precis, SAMR pot fi proiectate, astfel încât să fie global stabile;
- SAMR au multe elemente la alegere, impunându-se astfel testarea în mediu simulat înainte de a fi implementat pe proces;
- Când parametrii procesului sunt constanţi, în prezenţa zgomotelor, parametrii regulatorului nu trebuie modificaţi;
- SAMR se recomandă pentru sisteme cu modificarea continuă a referinţei şi pentru procese supuse zgomotelor de amplitudini mici.

11.3. Sisteme adaptive cu identificarea modelului (sisteme adaptive cu autoacordare - SAA)

Într-un sistem adaptiv se consideră că parametrii regulatorului sunt ajustaţi tot timpul. Aceasta arată că parametrii regulatorului urmăresc modificările parametrilor procesului. Problemele de analiză a convergenţei şi stabilităţii acestor sisteme sunt dificile, ceea ce impune a considera parametrii procesului constanţi, însă necunoscuţi. Dacă parametrii procesului sunt cunoscuţi, procedura de proiectare specifică un set de parametri doriţi ai regulatorului. Regulatorul adaptiv ar putea converge la valorile acestor parametri, chiar dacă procesul este necunoscut. *Regulatorul* care are această proprietate este denumit **cu autoacordare** (self-tuning) *deoarece în mod automat se acordează la cerinţele de performanţă cerute.* Regulatorul cu autoacordare (*RAA*) este bazat pe ideea separării funcţiei de estimare a parametrilor de procedura de proiectare a

regulatorului. Parametrii necunoscuţi sunt estimaţi on-line, apelând la o procedură de estimare recursivă (§ 2.7). Parametrii estimaţi sunt trataţi ca şi când ar fi parametrii reali, neluându-se în consideraţie incertitudinile parametrice.

Pentru proiectare pot fi folosite diferite metode: *alocarea polilor, minimă varianţă, urmărirea modelului* etc. Metoda de proiectare este aleasă în concordanţă cu specificaţiile de performanţă şi particularităţile modelului matematic ataşat obiectului condus.

Diferite combinaţii dintre metodele de estimare şi cele de proiectare conduc la regulatoare cu diferite proprietăţi. În cazul în care cele două proceduri de estimare a parametrilor şi de proiectare a regulatorului sunt separate, spunem că regulatorul realizează o **reglare adaptivă indirectă**. Astfel, parametrii regulatorului se obţin indirect, pe baza parametrilor estimaţi ai procesului. *Dacă modelul procesului se reparametrizează direct, în funcţie de parametrii regulatorului, este posibil astfel a determina direct parametrii regulatorului printr-o procedură de estimare.* Avem în acest caz un **algoritm adaptiv direct sau implicit**.

Analiza proprietăţilor asimptotice ale unui regulator direct cu autoacordare a fost realizată pentru prima dată în 1973 de Aström şi Wittenmark [5].

11.3.1. Regulatoare cu autoacordare indirectă

Vom aproxima modelul procesului sub forma:

$$A(q^{-1})y_k = B(q^{-1})u_{k-d} + C(q^{-1})v_k \tag{11.38}$$

unde $grad[A] = grad[C] = n$, $grad[B] = m$, iar d este timpul mort al procesului, exprimat ca număr întreg de perioade de discretizare. Pentru cazul determinist ($v_k = 0$), se pot utiliza diverse metode recursive de estimare a parametrilor (a_i, b_i). Estimatorul celor mai mici pătrate cu factor de uitare exponenţial este descris prin [57]:

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_k &= \hat{\theta}_{k-1} + \gamma_k \varepsilon_k \\
\varepsilon_k &= y_k - \varphi_{k-1}^T \hat{\theta}_{k-1} \\
\gamma_k &= P_{k-1}\varphi_{k-1}\left[\lambda + \varphi_{k-1}^T P_{k-1}\varphi_{k-1}\right]^{-1} \\
P_k &= \left(I - \gamma_k \varphi_{k-1}^T\right)P_{k-1}/\lambda
\end{aligned} \tag{11.39}$$

unde $\theta^T = [b_0 \; b_1 \; b_2 \; \dots \; b_m \; a_1 \; \dots \; a_n]$ reprezintă vectorul parametrilor necunoscuţi, iar

$$\varphi_{k-1}^T = [u_{k-d} \dots u_{k-d-m} - y_{k-1} - y_{k-n}]$$

reprezintă vectorul de regresie ce conţine informaţia funcţională măsurabilă.

În cazul sistemelor stocastice cu $C(q^{-1}) \neq 0$ şi deci o secvenţă de semnale Gaussiene independente, egal distribuite, care acţionează asupra procesului, se pot utiliza estimatoare recursive specifice pentru determinarea inclusiv a parametrilor c_i.

Aşa cum s-a arătat în §2.7, dacă semnalul de intrare în proces este suficient de puternic şi structura modelului estimat este apropiată de realitate, estimaţiile vor converge la valori reale dacă sistemul închis este stabil. Condiţiile de convergenţă pentru diferite metode de estimare sunt de mare importanţă.

Pentru proiectare vom putea utiliza diverse metode. În cele ce urmează considerăm **metoda alocării polilor**.

Regulatorul considerat are forma:

$$R(q^{-1})u_k = T(q^{-1})r_k - S(q^{-1})y_k \tag{11.40}$$

pentru un model al procesului:

$$A(q^{-1})y_k = B(q^{-1})u_k .$$

Dacă presupunem că sistemul închis are o comportare dorită, descrisă prin modelul:

$$A_m(q^{-1})y_k = B_m(q^{-1})r_k$$

în cazul în care se notează cu $\alpha_e(q^{-1})$ polinomul caracteristic al estimatorului ataşat regulatorului numeric (11.40), se pot determina polinoamele R, S şi T prin rezolvarea ecuaţiei diofantice:

$$AR + BS = \alpha_e A_m B^+ , \tag{11.41}$$

întrucât, pentru realizarea răspunsului dorit pentru întregul sistem se cere a fi satisfăcută identitatea:

$$\frac{BT}{AR + BS} = \frac{B_m}{A_m} . \tag{11.42}$$

Numitorul $AR + BS$ este polinomul caracteristic al sistemului închis. Polinomul B este factorizat ca $B = B^+B^-$, unde B^+ este un polinom monic ale cărui zerouri sunt stabile şi pot fi astfel compensate de regulator, iar B^- este un polinom ale cărui zerouri sunt instabile (când $B^+ = 1$ nu există compensare de zerouri).

Deoarece B^+ este compensat de regulator, acest polinom va trebui să se constituie printre factorii divizori ai polinomului caracteristic al sistemului închis. Alţi factori ai polinomului sunt α_e şi A_m.

Din (11.41) urmează că B^+ divide polinomul R şi astfel:

$$R = R_1 B^+ , \tag{11.43}$$

iar (11.41) capătă forma:

$$AR_1 + B^- S = \alpha_e A_m . \tag{11.44}$$

Soluţia ecuaţiei diofantice este obţinută similar cu rezolvarea unui set de ecuaţii liniare. Această ecuaţie are o soluţie unică dacă A şi B^- sunt relativ prime. Din (11.42) rezultă că B^- trebuie să dividă B_m şi deci

$$T = \alpha_e B_m / B^- . \tag{11.45}$$

• Cu aceste elemente pregătitoare, procedura de calcul pentru **algoritmul de reglare cu autoacordare**, *bazată pe metoda alocării polilor* este următoarea:

Date: Specificaţiile de performanţă ale sistemului închis, formulate prin funcţia de transfer B_m / A_m şi cu polinomul dorit α_e al observatorului de stare.

1. Estimează recursiv coeficienţii polinoamelor A, B şi C în (11.39), utilizând metoda celor mai mici pătrate sau alte metode care permit inclusiv estimarea coeficienţilor c_i ai polinomului $C(q^{-1})$.

2. Înlocuieşte A, B şi C cu estimaţiile obţinute la pasul 1 şi rezolvă ecuaţia (11.44) pentru a obţine R_1 şi S. Calculează R prin rezolvarea ecuaţiei (11.43) şi T prin rezolvarea ecuaţiei $T = \alpha_e B_m / B^- = \alpha_e B_m'$.

3. Calculează comanda u_k cu ajutorul relaţiei $Ru_k = Tr_k - Sy_k$.

4. Repetă paşii 1, 2 şi 3 la fiecare perioadă de eşantionare.

Pentru implementarea acestui algoritm se impun următoarele *condiţii de compatibilitate* [5, 58]:

B^- divide B_m

$\partial[A_m] - \partial[B_m] \geq \partial[A] - \partial[B]$

$\partial[\alpha_e] \geq 2\partial[A] - \partial[A_m] - \partial[B^+] - 1$.

Problemele ce pot apărea la implementarea acestui algoritm sunt:

– gradele polinoamelor A, B şi C sau, cel puţin, limitele lor superioare trebuie cunoscute;

– factorii comuni ai polinoamelor estimate A şi B fac imposibilă rezolvarea ecuaţiei diofantice;

– stabilitatea sistemului închis trebuie să fie garantată;

– semnalele de excitaţie la intrarea procesului trebuie să fie persistente pentru a asigura convergenţa parametrilor la valorile lor reale.

11.3.2. Regulatoare cu autoacordare directă

Proiectarea algoritmului de reglare în cazul reglării adaptive indirecte necesită un volum de calcul mai mare, iar stabilitatea poate fi analizată cu dificultate. Dacă ecuaţia diofantică (11.44) este multiplicată prin y_k şi se foloseşte modelul procesului, obţinem:

$$\begin{aligned}\alpha_e A_m y_k &= R_1 A y_k + B^- S y_k = R_1 B u_k + B^- S y_k + R_1 C v_k = \\ &= B^- \left(R u_k + S y_k + R_1 C v_k \right)\end{aligned} \tag{11.46}$$

De remarcat că (11.46) poate fi considerată ca un model al procesului parametrizat în B^-, R şi S. Estimarea acestor parametri permite de fapt obţinerea polinoamelor R şi S. De observat că modelul obţinut prin reparametrizarea modelului procesului este neliniar în parametri.

O altă cale pentru a realiza parametrizarea este de a scrie modelul (11.46) sub forma:

$$\alpha_e A_m y_k = \bar{R} u_k + \bar{S} y_k + RC v_k \tag{11.47}$$

unde

$\bar{R} = B^- R$ şi $\bar{S} = B^- S$.

Polinomul R din ecuaţia (11.46) este monic, însă $\bar{R}$ din (11.47) nu este monic. Polinoamele $\bar{R}$ şi $\bar{S}$ au un factor comun care conţine zerourile slab amortizate. Acest factor poate fi compensat înainte de calculul legii de comandă.

• **Algoritmul care stă la baza reglării cu autoacordare directă** presupune parcurgerea următoarelor etape:

ETAPE:

1. Estimează coeficienţii polinoamelor $\bar{R}$ şi $\bar{S}$ în (11.47);
2. Compensează, dacă este posibil, factorii comuni din $\bar{R}$ şi $\bar{S}$ pentru a obţine R şi S;
3. Calculează semnalul de comandă conform (11.40), unde R şi S sunt obţinute în etapa 2;
4. Repetă etapele 1, 2 şi 3 la fiecare perioadă de eşantionare.

O altă situație foarte des întâlnită în practică este aceea unde p intrări sunt selectate ca variabile primare de comandă, iar restul care rămân, $(m-p)$ intrări, sunt în relații fixate în raport cu primele p intrări.

Spre exemplu, în instalațiile de ardere, debitul de combustibil este variabila primară, iar debitul de aer necesar arderii se află într-o relație bine definită cu variabila primară.

În cazul în care $p > m$, nu pot fi controlate toate ieșirile independent, la toate momentele de timp.

Deși toate măsurătorile ar putea fi folosite pentru obținerea stării estimate, numai m cantități pot fi controlate independent.

Astfel, deși orice parte a regulatorului ce depinde de reacția după starea estimată ar putea folosi întregul set de măsurători, totuși acțiunile asupra procesului vor fi numai o submulțime de m variabile.

O altă strategie este de a defini importanța relativă a intrărilor prin folosirea unui indicator corespunzător de performanță. Spre exemplu se poate folosi un criteriu pătratic cu diferite ponderi pentru diferite intrări. De remarcat că nu pentru toate buclele se realizează eroare staționară egală cu zero.

Sistemele multivariabile sunt supuse unor specificații de proiectare pentru asigurarea decuplării dorite.

Decuplarea este legată în timp și în frecvență de direcționalitate.

De remarcat că cele mai eficiente metode de proiectare a regulatoarelor multivariabile sunt: metoda decuplării triunghiulare și metoda decuplării dinamice.

PROBLEME

12.1. Se consideră un proces cu două intrări și două ieșiri caracterizat prin:

$$H_p(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{0.1}{0.2s+1} \\ 0 & \\ \dfrac{0.2}{0.1s+1} & \dfrac{0.5}{s+0.5} \end{bmatrix}.$$

Se cere:

a) O structură de SRA care să asigure decuplarea ieșirilor.

b) Algoritmi de reglare care asigură pentru referință treaptă unitară răspuns indicial aperiodic pentru fiecare canal intrare-ieșire cu durata regimului tranzitoriu $t_t \le 2\sec$.

12.2. Se consideră procesul caracterizat prin:

$$H_p(s)=\frac{1}{(s+1)^2}\begin{bmatrix} s-2 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Se cere să se proiecteze un regulator care asigură eroare staționară nulă la referințe treaptă unitară și o bandă de frecvență $\omega_B = 0.5[rad/\sec]$ pentru ambele canale.

12.3. Se consideră procesul caracterizat prin:

$$H_p(s)=\frac{1}{(s+4)(s+5)}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0.5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Să se sintetizeze un regulator multivariabil, astfel ca polii dominanți ai SRA să fie rădăcinile ecuației $s^2+13s+100=0$.

12. 4. Se consideră procesul cu modelul nominal:

$$H_p(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{2}{s^2+3s+2} & 0 \\ \dfrac{0.5}{(s+2)(\beta s+1)} & \dfrac{6}{s^2+5s+6} \end{bmatrix}.$$

Se cere:

a) Să se proiecteze regulatorul multivariabil considerând sistemul decuplat.

b) Să se evalueze performanțele SRA pe ambele canale pentru $\beta = 0.2$ și $\beta = -0.2$.

12. 5. Se consideră procesul al cărui model nominal este:

$$H_p(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{5}{s^2+5s+5} & \dfrac{0.5}{s+5} \\ \dfrac{\beta}{s+4} & \dfrac{4(s+1)}{s^2+4s+4} \end{bmatrix}.$$

Se cere:

a) Pentru $\beta = -2$ să se construiască un precompensator pentru a realiza decuplarea;

b) Să se proiecteze regulatoare PID pentru procesul decuplat și să se evalueze performanțele;

c) Să se efectueze aceleași calcule pentru $\beta = 2$.

Deoarece B^+ este compensat de regulator, acest polinom va trebui să se constituie printre factorii divizori ai polinomului caracteristic al sistemului închis. Alţi factori ai polinomului sunt α_e şi A_m.

Din (11.41) urmează că B^+ divide polinomul R şi astfel:

$$R = R_1 B^+, \tag{11.43}$$

iar (11.41) capătă forma:

$$AR_1 + B^- S = \alpha_e A_m . \tag{11.44}$$

Soluţia ecuaţiei diofantice este obţinută similar cu rezolvarea unui set de ecuaţii liniare. Această ecuaţie are o soluţie unică dacă A şi B^- sunt relativ prime. Din (11.42) rezultă că B^- trebuie să dividă B_m şi deci

$$T = \alpha_e B_m / B^- . \tag{11.45}$$

- Cu aceste elemente pregătitoare, procedura de calcul pentru **algoritmul de reglare cu autoacordare**, *bazată pe metoda alocării polilor* este următoarea:

Date: Specificaţiile de performanţă ale sistemului închis, formulate prin funcţia de transfer B_m / A_m şi cu polinomul dorit α_e al observatorului de stare.

1. Estimează recursiv coeficienţii polinoamelor A, B şi C în (11.39), utilizând metoda celor mai mici pătrate sau alte metode care permit inclusiv estimarea coeficienţilor c_i ai polinomului $C(q^{-1})$.

2. Înlocuieşte A, B şi C cu estimaţiile obţinute la pasul 1 şi rezolvă ecuaţia (11.44) pentru a obţine R_1 şi S. Calculează R prin rezolvarea ecuaţiei (11.43) şi T prin rezolvarea ecuaţiei $T = \alpha_e B_m / B^- = \alpha_e B_m'$.

3. Calculează comanda u_k cu ajutorul relaţiei $Ru_k = Tr_k - Sy_k$.

4. Repetă paşii 1, 2 şi 3 la fiecare perioadă de eşantionare.

Pentru implementarea acestui algoritm se impun următoarele *condiţii de compatibilitate* [5, 58]:

B^- divide B_m

$\partial[A_m] - \partial[B_m] \geq \partial[A] - \partial[B]$

$\partial[\alpha_e] \geq 2\partial[A] - \partial[A_m] - \partial[B^+] - 1 .$

Problemele ce pot apărea la implementarea acestui algoritm sunt:

- gradele polinoamelor A, B şi C sau, cel puţin, limitele lor superioare trebuie cunoscute;

- factorii comuni ai polinoamelor estimate A şi B fac imposibilă rezolvarea ecuaţiei diofantice;
- stabilitatea sistemului închis trebuie să fie garantată;
- semnalele de excitaţie la intrarea procesului trebuie să fie persistente pentru a asigura convergenţa parametrilor la valorile lor reale.

11.3.2. Regulatoare cu autoacordare directă

Proiectarea algoritmului de reglare în cazul reglării adaptive indirecte necesită un volum de calcul mai mare, iar stabilitatea poate fi analizată cu dificultate. Dacă ecuaţia diofantică (11.44) este multiplicată prin y_k şi se foloseşte modelul procesului, obţinem:

$$\begin{aligned}\alpha_e A_m y_k &= R_1 A y_k + B^- S y_k = R_1 B u_k + B^- S y_k + R_1 C v_k = \\ &= B^-\left(R u_k + S y_k + R_1 C v_k\right)\end{aligned} \tag{11.46}$$

De remarcat că (11.46) poate fi considerată ca un model al procesului parametrizat în B^-, R şi S. Estimarea acestor parametri permite de fapt obţinerea polinoamelor R şi S. De observat că modelul obţinut prin reparametrizarea modelului procesului este neliniar în parametri.

O altă cale pentru a realiza parametrizarea este de a scrie modelul (11.46) sub forma:

$$\alpha_e A_m y_k = \bar{R} u_k + \bar{S} y_k + R C v_k \tag{11.47}$$

unde

$\bar{R} = B^- R$ şi $\bar{S} = B^- S$.

Polinomul R din ecuaţia (11.46) este monic, însă $\bar{R}$ din (11.47) nu este monic. Polinoamele $\bar{R}$ şi $\bar{S}$ au un factor comun care conţine zerourile slab amortizate. Acest factor poate fi compensat înainte de calculul legii de comandă.

- **Algoritmul care stă la baza reglării cu autoacordare directă** presupune parcurgerea următoarelor etape:

ETAPE:

1. Estimează coeficienţii polinoamelor $\bar{R}$ şi $\bar{S}$ în (11.47);
2. Compensează, dacă este posibil, factorii comuni din $\bar{R}$ şi $\bar{S}$ pentru a obţine R şi S;
3. Calculează semnalul de comandă conform (11.40), unde R şi S sunt obţinute în etapa 2;
4. Repetă etapele 1, 2 şi 3 la fiecare perioadă de eşantionare.

Acest algoritm evită problema estimării neliniare, însă există mai mulţi parametri ce trebuie estimaţi, deoarece parametrii polinomului B^- sunt estimaţi de două ori.

Ideea de bază în cadrul sistemelor adaptive cu autoacordare este de a separa estimarea parametrilor necunoscuţi ai procesului şi proiectarea regulatorului. Parametrii estimaţi sunt aproximaţi a fi egali cu parametrii reali atunci când se proiectează regulatorul. Prin combinarea diferitelor proceduri de estimare şi metode de proiectare se pot obţine diverse scheme de sisteme adaptive cu autoacordare cu diferite proprietăţi.

Cel mai important aspect ce trebuie evidenţiat în cadrul SAA este *parametrizarea*. O reparametrizare poate fi realizată folosind modelul procesului şi răspunsul dorit al buclei de reglare. Scopul reparametrizării este de a asigura estimarea directă a parametrilor regulatorului, care implică liniaritatea în parametri a noului model.

Pentru alegerea combinaţiei optime de metode de estimare a parametrilor şi proiectare a regulatorului este important a cunoaşte condiţiile în care se asigură stabilitatea şi convergenţa SAA. În acest context, *stabilitatea* arată că semnalele rămân limitate, iar convergenţa asigură atingerea asimptotică a comportării dorite. În [5, 45, 58] sunt prezentate rezultate teoretice şi aplicaţii ale diferitelor scheme de conducere adaptivă a poceselor.

11.4. Reglarea adaptivă cu reacţie după stare

Se consideră un model de stare pentru un proces cu o intrare şi o ieşire sub forma [45]:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=Ax(t)+bu(t)\\ y(t)&=c^T x(t)\end{aligned}, \quad x(t)\in\Re^n,\ u(t)\in\Re,\ t\ge 0 \tag{11.48}$$

cu $x(0)=x_0$, unde $A\in\Re^{n\times n}$, $b\in\Re^n$ sunt matrice cu parametri constanţi necunoscuţi.

Aproximăm că vectorul de stare $x(t)$ este disponibil pentru măsurare.

Obiectivul proiectării legii de reglare este de a proiecta o lege de reglare $u(t)$ astfel încât toate semnalele în buclă închisă să fie limitate, iar vectorul de stare $x(t)$ să urmărească asimptotic un vector de stare $x_m(t)$ generat de un model de referinţă:

$$\dot{x}_m(t)=A_m x_m(t)+b_m r(t),\ x_m(t)\in\Re^n,\ r(t)\in\Re,\ t\ge 0 \tag{11.49}$$

cu $x_m(0)=x_{m0}$, iar matricele $A_m\in\Re^{n\times n}$, $b_m\in\Re^n$ sunt cunoscute. Valorile proprii ale matricei A_m sunt situate în semiplanul stâng al planului complex. Referinţa $r(t)$ este o funcţie limitată şi continuă pe porţiuni pentru un sistem de referinţă stabil bine definit.

Pentru a atinge acest obiectiv al reglării admitem că sunt îndeplinite următoarele cerinţe:

1. există un vector constant $\hat{f}_1\in\Re^n$ şi o constantă $\hat{f}_2\in\Re$, astfel încât sunt satisfăcute ecuaţiile:

$$A+b\hat{f}_1^T=A_m,\ b\hat{f}_2=b_m;$$

2. semnul constantei $\hat{f}_2$, $sign\lfloor\hat{f}_2\rfloor$ este cunoscut.

Prima cerinţă reprezintă aşa numita condiţie de potrivire (matching) cu care dacă matricele A şi b ar fi cunoscute, legea de reglare

$$u(t)=\hat{f}_1^T x(t)+\hat{f}_2 r(t) \tag{11.50}$$

ar putea conduce la sistemul închis de forma:

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+b\left[\hat{f}_1^T x(t)+\hat{f}_2 r(t)\right]=A_m x(t)+b_m r(t),\ t\ge 0$$

al cărui vector de stare $x(t)\in L^\infty$ (adică $x(t)$ este limitat) şi eroarea de urmărire a stării satisface ecuaţia:

$$\dot{e}(t)=A_m e(t),\ e(0)=x_0-x_{m0}.$$

În aceste condiţii, eroarea tinde exponenţial la zero ($\lim_{t\to\infty} e(t)=0$), iar obiectivul reglării este atins.

Dacă parametrii matricelor A şi b sunt necunoscuţi, legea de comandă $u(t)$ poate avea aceeaşi formă, însă $f_1(t)$ şi $f_2(t)$ reprezintă estimaţii ale valorilor rezultate din calcul pentru a asigura urmărirea stării $x_m(t)$.

Astfel, legea de comandă

$$u(t)=f_1^T(t)x(t)+f_2(t)r(t)$$

presupune ajustarea parametrilor $f_1(t)$ şi $f_2(t)$, în aşa fel încât pentru o referinţă dată să se asigure obiectivele reglării.

Introducând legea de comandă în ecuaţia (11.48) se obţine:

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+b\left[f_1^T(t)x(t)+f_2(t)r(t)\right]$$

$$\dot{x}(t)=A_m x(t)+b_m r(t)+b\left[\tilde{f}_1^T(t)x(t)+\tilde{f}_2(t)r(t)\right]$$

sau

$$\dot{x}(t)=A_m x(t)+b_m r(t)+b_m\left[\frac{1}{\hat{f}_2}\tilde{f}_1^T(t)x(t)+\frac{1}{\hat{f}_2}\tilde{f}_2(t)r(t)\right] \tag{11.51}$$

unde $\tilde{f}_1=f_1-\hat{f}_1$ şi $\tilde{f}_2=f_2-\hat{f}_2$.

Ecuația erorii de urmărire se obține din (11.49) și (11.51):

$$\dot{e}(t) = A_m e(t) + b_m\left[\frac{1}{\hat{f}_2}\tilde{f}_1^T(t)x(t) + \frac{1}{\hat{f}_2}\tilde{f}_2(t)r(t)\right].$$

Întrucât $f_1(t)$ și $f_2(t)$ sunt generate printr-o lege de adaptare, vectorul de stare atașat sistemului închis este format din $e(t)$, $f_1(t)$ și $f_2(t)$.

Pentru acest sistem dinamic ce caracterizează evoluția erorii alegem o funcție pozitiv definită:

$$V\left(e, \tilde{f}_1, \tilde{f}_2\right) = e^T P e + \frac{1}{\left|\hat{f}_2\right|}\tilde{f}_1^T \Gamma^{-1}\tilde{f}_1 + \frac{1}{\left|\hat{f}_2\right|}\tilde{f}_2^2 \gamma^{-1},$$

unde $P \in \Re^{n \times n}$ este o matrice constantă și $P = P^T > 0$ care satisface ecuația matriceală:

$$PA_m + A_m^T P = -Q \qquad (11.52)$$

pentru orice matrice Q constantă, simetrică ($Q = Q^T$) pozitiv definită.

Matricea $\Gamma \in \Re^{n \times n}$ este o matrice constantă, simetrică, pozitiv definită ($\Gamma = \Gamma^T > 0$), iar γ este o constantă pozitivă.

Derivata în timp a funcției V poate fi obținută cu ușurință

$$\dot{V} = \frac{d}{dt}V\left(e, \tilde{f}_1, \tilde{f}_2\right)$$

dacă ținem seama de ecuația erorii și de ecuația matriceală (11.52):

$$\dot{V} = -e^T(t)Qe(t) + e^T(t)Pb_m\frac{2}{\hat{f}_2}\tilde{f}_1^T(t)x(t) + e^T(t)Pb_m\frac{2}{\hat{f}_2}\tilde{f}_2(t)r(t) + \frac{2}{\left|\hat{f}_2\right|}\tilde{f}_1^T(t)\Gamma^{-1}\dot{\tilde{f}}_1(t) + \frac{2}{\left|\hat{f}_2\right|}\tilde{f}_2(t)\gamma^{-1}\dot{\tilde{f}}_2(t) \qquad (11.53)$$

Pentru ca sistemul să fie asimptotic stabil, se cere ca $\dot{V} < 0$. Prin alegerea legii de adaptare a parametrilor $f_1(t)$ și $f_2(t)$ sub forma:

$$\dot{f}_1(t) = -sign\left[\hat{f}_2\right]\Gamma x(t)e^T(t)Pb_m,\ t \geq 0$$
$$\dot{f}_2(t) = -sign\left[\hat{f}_2\right]\gamma r(t)e^T(t)Pb_m,\ t \geq 0 \qquad (11.54)$$

cu $f_1(0)$ și $f_2(0)$ estimații inițiale arbitrare ale constantelor $\hat{f}_1$ și $\hat{f}_2$.

Folosind ca lege de adaptare (11.54) se obține:

$$\dot{V} = -e^T(t)Qe(t) < 0.$$

Legea de comandă după stare și referință cu $f_1(t)$ și $f_2(t)$ ajustate în conformitate cu (11.54), aplicată procesului descris prin (11.48), garantează că toate semnalele sunt limitate și eroarea de urmărire tinde asimptotic spre zero când timpul tinde spre infinit ($e(t) \in L^2$). Acest rezultat s-a obținut apelând la teoria stabilității prin alegerea funcției Liapunov V și asigurării că $\dot{V} < 0$.

Pentru implementarea legii de reglare adaptivă după stare se impune estimarea stării. Pentru modelul (11.48), presupunând că $\left(A, c^T\right)$ este o pereche observabilă se poate estima starea cu ajutorul ecuației:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + bu(t) + L\left(y(t) - c^T\hat{x}(t)\right),\ \hat{x}(0) = \hat{x}_0,\ t \geq 0 \qquad (11.55)$$

unde $\hat{x}(t)$ este estimarea stării $x(t) \in \Re^n$, iar L este un vector constant care poate fi determinat printr-o procedură de alocare a polilor, dacă ținem seama că ecuația erorii de estimare $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, are forma:

$$\dot{e}(t) = \left(A - Lc^T\right)e(t),\ t \geq 0. \qquad (11.56)$$

Prin alegerea valorilor proprii ale matricei $\left(A - Lc^T\right)$ se poate asigura viteza de convergență la zero a erorii de estimare a stării.

Ecuația estimatorului poate fi pusă și sub forma:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \left(A - Lc^T\right)\hat{x}(t) + bu(t) + Ly(t),\ t \geq 0 \qquad (11.57)$$

sau

$$\hat{X}(s) = \left(sI - A + Lc^T\right)bU(s) + \left(sI - A + Lc^T\right)^{-1}LY(s)$$

respectiv

$$\hat{X}(s) = \frac{\alpha_1(s)}{\alpha_e(s)}U(s) + \frac{\alpha_2(s)}{\alpha_e(s)}Y(s) \qquad (11.58)$$

unde:

- $\alpha_e(s) = \det\left(sI - A + Lc^T\right)$
- $\alpha_1(s)$ și $\alpha_2(s)$ sunt polinoame în operatorul s.

În aceste relații s-a presupus că $\lim_{t \to \infty} e^{\left(A - Lc^T\right)t}\hat{x}_0(0)$ tinde exponențial la zero.

Estimarea stării face posibilă utilizarea legii de reglare sub forma:

$$u(t) = \hat{f}_1^T\hat{x}(t) + \hat{f}_2 r(t) \qquad (11.59)$$

și cu satisfacerea condiției:

$$\lim_{t \to \infty}\left[\hat{f}_1^T\hat{x}(t) - \hat{f}_1^T x(t)\right] = 0.$$

Comanda după stare, în aceste condiții, poate fi parametrizată sub forma:

$$\hat{f}_1^T\hat{x}(t) = \hat{\pi}_1^T\varphi_1(t) + \hat{\pi}_2^T\varphi_2(t) \qquad (11.60)$$

unde:

- $\hat{\pi}_1 \in \Re^n$, $\hat{\pi}_2 \in \Re^n$ reprezintă parametrii constanţi care ar putea fi calculaţi dacă parametrii modelului (11.48) sunt cunoscuţi;
- $\varphi_1(s) = \dfrac{\alpha_1(s)}{\alpha_e(s)}$, $\varphi_2(s) = \dfrac{\alpha_2(s)}{\alpha_e(s)}$.

Pentru comanda adaptivă termenul $f_1^T \hat{x}(t)$ este parametrizat ca:

$$f_1^T \hat{x}(t) = \pi_1^T \varphi_1(t) + \pi_2^T \varphi_2(t) \tag{11.61}$$

unde $\pi_1(t) \in \Re^n$, $\pi_2(t) \in \Re^n$ sunt estimaţiile parametrilor constanţi necunoscuţi π_1^* şi π_2^*, care trebuie ajustaţi prin legea de adaptare.

11.5. Probleme ale implementării algoritmilor adaptivi

În paragrafele anterioare au fost dezvoltate aspectele teoretice ale reglării adaptive. La implementarea practică a unui sistem adaptiv apar multe dificultăţi generate, atât de ipotezele în care s-a dezvoltat teoria, cât şi de echipamentele pe care se implementează algoritmii. Astfel, pe lângă algoritmul propriu zis, obţinut printr-o procedură de proiectare, se impune a considera situaţii specifice pornirii, opririi, comutării regimurilor de funcţionare manual şi automat etc.

Multe dintre aceste aspecte practice au soluţii ad-hoc, care adesea depind de aplicaţia considerată. Ele sunt frecvent verificate prin experimentare extensivă şi simulare deoarece problemele sunt complexe şi nu se dispune de o teorie adecvată.

Unele probleme specifice sistemelor adaptive trebuie luate în considerare la implementarea acestora şi anume:

- informaţia iniţială despre proces şi modul de utilizare a acesteia;
- selectarea cerinţelor de performanţă pentru sistemul de reglare şi realizabilitatea acestora;
- robusteţea estimării parametrilor şi considerarea incertitudinilor structurale prin neglijarea constantelor de timp mici şi foarte mici;
- considerarea fenomenelor de comutare fără şocuri de la un regim de funcţionare la alt regim de funcţionare;
- considerarea neliniarităţilor introduse de elementele de execuţie şi de procesul condus.

Multe dintre aceste probleme nu sunt specifice numai reglării adaptive şi sunt importante pentru implementarea regulatoarelor în general. Implementarea trebuie să includă multe trăsături ce au fost probate cu bune rezultate în practică, însă fără a fi complet acoperite din punct de vedere teoretic.

În cele ce urmează, sunt prezentate câteva elemente specifice implementării regulatoarelor adaptive.

11.5.1. Implementarea estimatorului

Obţinerea unor modele bune presupune utilizarea unor date bune şi o structură adecvată a modelului. Modelele utilizate sunt simplificate (liniare şi de ordin redus). Astfel, cel mai adesea, dinamica de înaltă frecvenţă este nemodelată. Este cunoscut din teoria identificării sistemelor că estimaţiile obţinute în prezenţa dinamicii nemodelate vor depinde crucial de proprietăţile semnalului de intrare [5, 45]. Când se determină structura şi complexitatea regulatorului, se cer cunoştinţe apriorice despre proces (complexitate, timp mort şi tipuri de semnale exogene).

Presupunem că procesul este descris prin modelul discret:

$$y_k = H_c(q)u_k + H_v(q)v_k + d_k,$$

unde raţionalele $H_c(q)$ şi $H_v(q)$ depind de perioada de discretizare T, perturbaţia v_k este aproximată a fi zgomot alb de medie zero, iar d_k este un semnal determinist de formă cunoscută, însă de amplitudine necunoscută (d_k poate fi sarcină, rampă sau un semnal sinusoidal). Pentru cazul în care vom considera perturbaţiile d_k generate prin impulsuri care se aplică unor sisteme dinamice cunoscute, eliminarea acestora se poate realiza într-un spectru de frecvenţă bine definit, prin includerea unor filtre cu atenuare ridicată la frecvenţe înalte.

O proprietate interesantă a sistemelor adaptive este că parametrii sunt estimaţi în buclă închisă. Nemodelarea dinamicii de înaltă frecvenţă poate genera probleme dificile, concretizate în estimaţii la valori nerezonabile. Filtrarea semnalelor înainte ca ele să fie introduse în estimator este o posibilitate de a atenua efectele nemodelării dinamicii de înaltă frecvenţă. Pentru a obţine o modelare robustă este necesar ca modelul să fie precis în jurul frecvenţei de tăiere. Pentru a estima un model redus cu această proprietate, este esenţial ca semnalul de intrare să aibă suficientă energie în jurul frecvenţei de tăiere şi să fie un semnal de excitaţie persistent. Gradul necesar de persistenţă al excitaţiei este legat de complexitatea modelului estimat. Aceasta necesită ca cerinţele asupra semnalelor de intrare să devină mai severe când ordinul este crescut. Deoarece semnalul de intrare este generat prin reacţie, nu există garanţia că

el va fi persistent. Pentru a garanta un model bun, este astfel necesar a monitoriza excitaţia şi energia semnalului de intrare în benzile de frecvenţă relevante. Când excitaţia la intrarea procesului nu este persistentă sau când energia semnalului este prea scăzută, parametrii estimaţi vor fi imprecişi. Pentru a elimina acest neajuns, fie se injectează semnale perturbatoare, fie se deconectează bucla de adaptare când excitaţia este prea săracă. O altă problemă ce trebuie avută în vedere la implementarea estimatorului este capacitatea de urmărire a parametrilor. Pentru a realiza această funcţie, este necesar a uita datele vechi. O cale pentru a rezolva această problemă este a utiliza uitarea exponenţială. Când factorul de uitare $\lambda = 1$, toate datele au aceeaşi pondere, însă cu $\lambda < 1$, datele recente sunt ponderate mai mult decât cele vechi. Este posibil a generaliza metode cu uitare exponenţială şi a folosi diferiţi factori de uitare pentru diferiţi parametri. Această tehnică operează bine numai dacă procesul este corespunzător excitat tot timpul [58].

11.5.2. Implementarea regulatorului

În toate aplicaţiile de reglări numerice este important a avea o filtrare corespunzătoare a semnalelor înainte de a fi eşantionate. *Fenomenul „aliasing"* ce apare în procesul de eşantionare impune utilizarea unor *filtre „antialiasing"*, care constau din unul sau mai multe filtre în cascadă de forma:

$$H_f(s) = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2}.$$

Asemenea filtre vor asigura filtrarea ieşirii printr-o alegere corespunzătoare a structurii şi a parametrilor ζ şi ω, asigurându-se în acelaşi timp obţinerea unor modele matematice, în faza de estimare, valide într-un domeniu corect de frecvenţe.

Filtrarea naturală obţinută prin eşantionare ajută estimatorul a obţine modele mai bune. Ieşirea convertorului numeric-analogic este un semnal constant pe porţiuni. Aceasta arată că semnalul de comandă transmis la elementul de execuţie este compus dintr-o serie de trepte, unde cea mai mică treaptă este dată de rezoluţia convertorului. Pentru unele sisteme, ca servosistemele hidraulice pentru controlul zborului şi alte sisteme cu răspuns puternic oscilant, treptele de comandă excită aceste moduri cu slabă amortizare. În asemenea cazuri este avantajos a utiliza un filtru pentru netezirea semnalului generat de convertorul *CNA*. Asemenea filtru este denumit *filtru post-eşantionare*.

Una dintre problemele căreia trebuie să i se acorde atenţie la implementarea algoritmului este saturarea componentei integrale. Uneori integratorul poate genera valori mari ce conduc la saturarea comenzii. Acest

fenomen de saturare este denumit *„reset windup"*, sau *„integrator windup"*. Pentru a se elimina acest fenomen nedorit, cu implicaţii asupra performanţelor sistemului de reglare, se impun o serie de *precauţii la implementare*.

Dacă ne referim la algoritmul cu două grade de libertate (11.18), prin adăugarea pe ambele părţi a termenului $A_0(q^{-1})u_k$ se obţine:

$$A_0 u_k = Tr_k - Sy_k + (A_0 - R)u_k.$$

Un regulator cu compensarea saturării („anti-reset windup") este dat prin:

$$A_0 v_k = Tr_k - Sy_k + (A_0 - R)u_k \qquad (11.62)$$
$$u_k = sat[v_k]$$

unde $sat[\bullet]$ este *funcţia saturaţie*.

Acest regulator este echivalent cu ecuaţia (11.18) atât timp cât semnalul de comandă nu se saturează. Polinomul A_0 este stabil şi poate fi interpretat ca dinamica observerului regulatorului.

În figura 11.9 se prezintă o schemă bloc pentru ecuaţia (11.62). Pentru $A_0 = 1$ (corespunzător pentru observer dead-beat) algoritmul de reglare este:

$$u_k = sat[Tr_k - Sy_k + (1 - R)u_k].$$

Un aspect căruia se impune a i se acorda atenţie la implementarea algoritmilor adaptivi îl constituie *alegerea intervalului de discretizare*. Viteza de eşantionare influenţează multe proprietăţi ale sistemului, ca urmărirea referinţei, rejecţia perturbaţiilor şi a zgomotului de măsură, precum şi sensibilitatea în raport cu modelarea imprecisă a procesului.

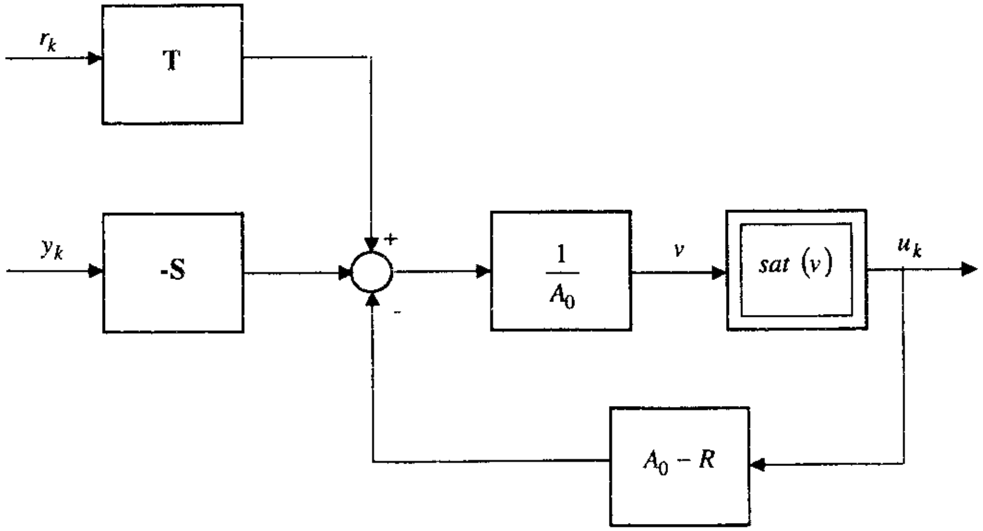


Fig. 11.9

O regulă empirică de alegere a perioadei de discretizare T pentru metodele de proiectare deterministe recomandă

$$\omega_0 T = 0.1 \div 0.5$$

unde ω_0 este frecvenţa naturală a polilor dominanţi ai sistemului închis. Dacă polul dominant este real, se poate recomanda $T / T_0 = 0.1 \div 0.5$, unde T_0 este constanta de timp a polului dominant. Aceste reguli implică un timp de răspuns la treaptă de cel puţin (5-20) eşantioane.

În cadrul sistemelor adaptive, deoarece procedura de proiectare este on-line, este necesar a acoperi toate posibilităţile şi regimurile de lucru oferite de un sistem de reglare automată.

Astfel, se impune a şti dacă modelul procesului este sau nu de fază minimă sau dacă există divizori comuni ai polinoamelor $A(q^{-1})$ şi $B(q^{-1})$. Combinaţia optimă a metodelor de estimare şi proiectare a algoritmilor adaptivi va urmări asigurarea *convergenţei*, *stabilităţii* şi *robusteţii* sistemelor adaptive în condiţiile definirii clasei de mărimi exogene şi a delimitării nivelului incertitudinilor în construcţia modelelor. De remarcat faptul că sistemul adaptiv are o structură ierarhică cu două bucle ce interacţionează şi operează la scale diferite de timp.

O *condiţie necesară pentru* **stabilitatea sistemelor adaptive** este ca *sistemul închis să fie stabil, în cazul în care parametrii de acord sunt fixaţi la valorile lor exacte*. Pentru a satisface această condiţie, trebuie luate în consideraţie problemele legate de compensarea polilor şi a zerourilor, probleme ce au în vedere, atât structura procesului condus, cât şi a algoritmului de reglare. Condiţia suficientă ca sistemul adaptiv să fie stabil este ca toţi parametrii estimaţi, ceruţi pentru proiectarea algoritmilor de reglare, să conveargă la valorile lor reale.

Prin convergenţă înţelegem că obiectivul reglării este atins asimptotic şi toate variabilele sistemului rămân mărginite pentru o clasă de condiţii iniţiale. Analiza proprietăţii de convergenţă a sistemelor este utilă nu doar pentru faptul că furnizează informaţii privind stabilitatea sistemului, ci şi pentru faptul că uşurează distincţia dintre algoritmii de reglare performanţi sau mai puţin performanţi, sugerând totodată modalităţi prin care performanţele sistemelor adaptive pot fi îmbunătăţite.

În [5, 45, 58] sunt prezentate metode de analiză a stabilităţii şi a convergenţei sistemelor adaptive. Performanţele sistemului de reglare vor influenţa conţinutul frecvenţial al semnalelor de intrare şi de ieşire ale procesului ce urmează a fi identificat, apărând unele situaţii conflictuale între cele două bucle – bucla de reglare şi bucla de adaptare.

Este de remarcat faptul că cele două bucle de reglare şi adaptare interacţionează, deşi operează cu perioade diferite de discretizare, cu două scale de timp diferite.

Utilizarea celor două scale de timp într-un sistem adaptiv presupune că parametrii procesului variază lent. Aceasta arată că parametrii estimaţi la momentul anterior de eşantionare sunt utilizaţi pentru calculul comenzii curente.

Pentru a iniţializa un **algoritm cu autoacordare** există mai multe căi, în funcţie de informaţia apriorică disponibilă despre proces. În cazul că nu se cunoaşte nimic despre proces, valorile iniţiale ale parametrilor în estimator pot fi alese egale cu zero, astfel ca regulatorul iniţial să fie proporţional sau integral cu amplificare redusă.

Intrările şi ieşirile procesului ar putea fi scalate pentru a avea aceeaşi amplitudine, astfel încât să se asigure condiţii numerice mai bune, atât pentru estimare, cât şi pentru partea de reglare propriu-zisă. În faza iniţială, adăugarea unui semnal perturbator poate creşte viteza de convergenţă a estimatorului. Situaţia este diferită dacă procesul a fost controlat înainte cu un regulator convenţional sau unul adaptiv. În acest caz, valorile iniţiale se iau cele corespunzătoare regulatorului utilizat înainte. Pornirea unui asemenea algoritm cu autoacordare trebuie făcută cu precauţie, pentru a evita, atât transmiterea spre elementul de execuţie a unor comenzi foarte mari, cât şi o funcţionare necorespunzătoare a estimatorului, în cazul în care comenzile transmise procesului nu sunt persistente şi puternic excitante pentru proces.

Implementarea algoritmilor adaptivi presupune includerea în algoritmi a unor *„reţele de siguranţă"* (*safety nets*). Algoritmul de reglare trebuie să includă limitarea comenzii şi desaturarea componentei integrale (anti reset windup).

Ţinând seama de dificultăţile şi multiplele precauţii la implementarea sistemelor adaptive apare ca o necesitate organizarea acestor sisteme pe trei niveluri ierarhice, aşa cum se arată în figura 11.10. Nivelul ierarhic superior are rolul de supervizare a funcţionării normale a buclei de adaptare.

Printre funcţiile acestui nivel reţinem:

- alegerea optimă a perioadei de eşantionare;
- alegerea metodei de estimare a parametrilor modelului;
- estimarea timpului mort;
- alegerea metodei de proiectare;
- verificarea stabilităţii sistemului de reglare;
- conectarea sau deconectarea buclei de adaptare etc.

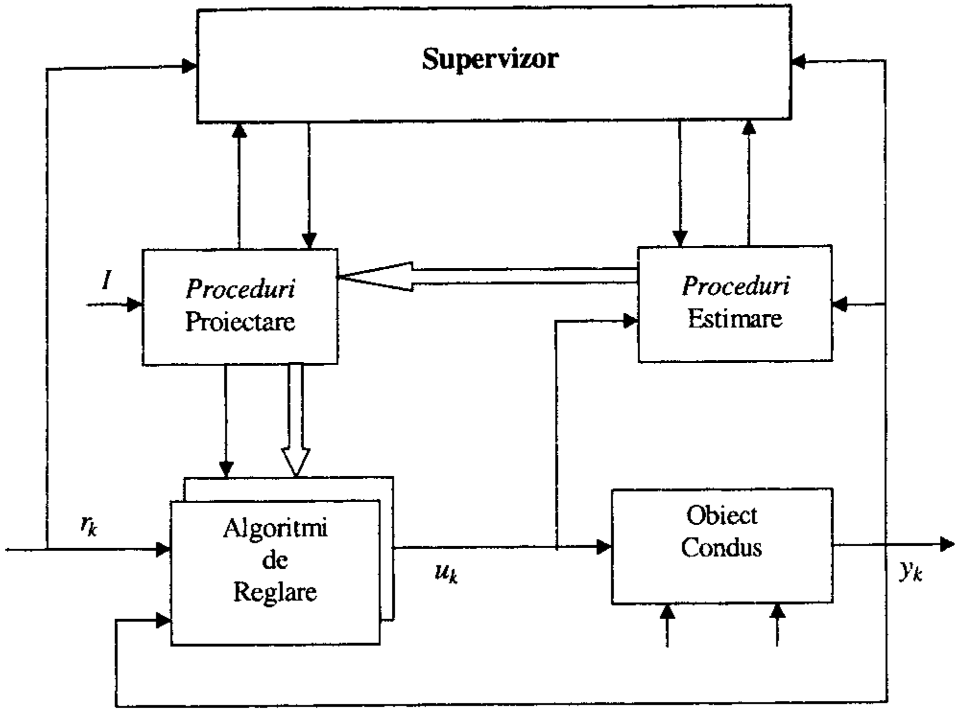


Fig. 11.10

Completarea funcţiilor supervizorului cu funcţii specifice operatorului uman, apelând inclusiv la tehnici euristice de decizie, asigură sistemului adaptiv un grad de autonomie mai ridicat şi, în consecinţă, un nivel de inteligenţă corespunzător.

O funcţie ce apare tot mai frecvent în structurile adaptive de conducere o reprezintă funcţia de identificare automată a defectelor şi reconfigurarea dinamică hardware şi software a sistemului. Supervizorul în acest caz poate prelua această sarcină complexă de organizare a întregului sistem de conducere cu evoluţie într-un mediu necunoscut apriori. Astfel, se includ în sistem funcţii ce-i conferă toleranţă la defecte şi implicit autonomie în funcţionare.

Sistemele adaptive robuste cu ridicată autonomie reprezintă o primă generaţie de sisteme inteligente de conducere. O structură avansată de sistem adaptiv este reprezentată în figura 11.11, unde procesul este descris de modele diferite pentru diverse regimuri de funcţionare, iar regulatoarele se selectează şi combină pentru asigurarea cerinţelor de performanţă impuse prin intermediul supervizorului.

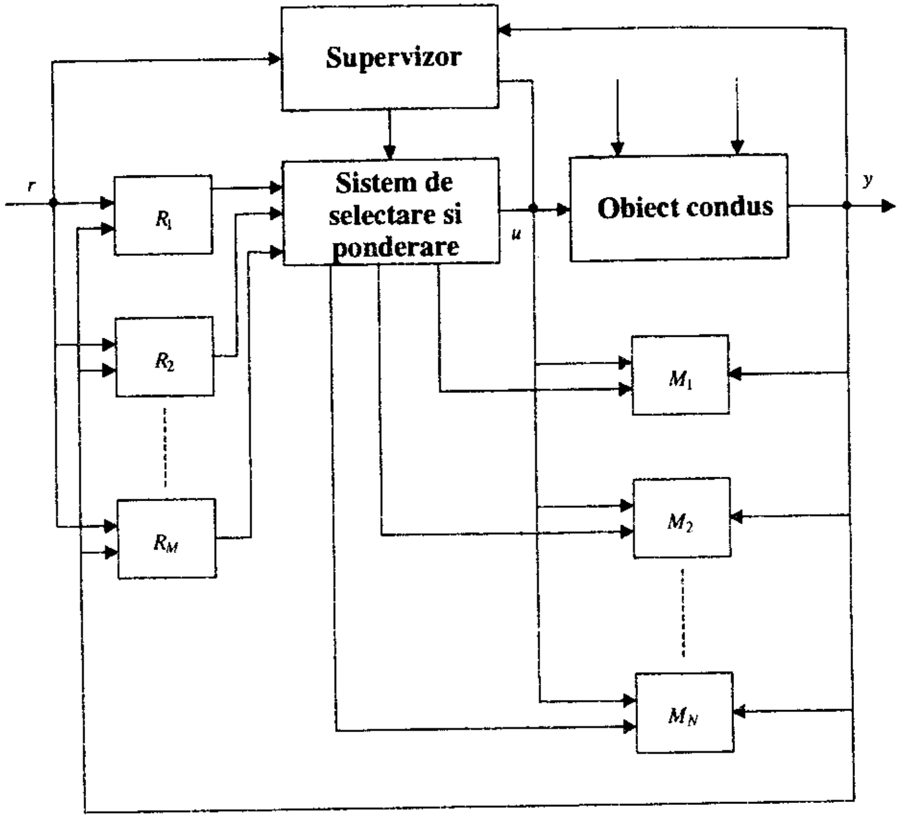


Fig. 11.11

În această structură se prezintă doar o modalitate de configurare a sistemului adaptiv prin selectarea celei mai potrivite strategii de conducere în funcţie de regimul de funcţionare şi de cerinţele de performanţă. Diferitele modele M_i ataşate regimurilor de funcţionare ale procesului sunt selectate în vederea alegerii celui mai potrivit algoritm de reglare R_k pentru asigurarea performanţelor dorite ale SRA. Supervizorul stabileşte strategia de combinare a comenzilor furnizate de R_k pentru asigurarea funcţionării procesului la performanţele impuse pentru întreaga gamă de variaţie a ieşirii y_k şi a intrării u_k.

PROBLEME

11.1. Se consideră procesul caracterizat prin modelul:

$$H_P(s)=\frac{K_P}{s^2+a_1 s+a_0}$$

cu $K_P > 0$, $y(t)$ şi $\dot{y}(t)$ disponibile pentru măsurare, unde a_0, a_1 şi K_P sunt necunoscuţi.

Se cere:

a) o realizare de stare (A, b, c^T);

b) o lege de reglare după stare, astfel încât eroarea de urmărire a stării unui model de referinţă să tindă exponenţial la zero când timpul tinde către infinit;

c) legea de adaptare a parametrilor regulatorului pentru asigurarea stabilităţii asimptotice.

11. 2. Se consideră procesul caracterizat prin modelul:

$$H_P(s) = \frac{K_P}{s(s+\alpha)}$$

unde $K_P > 0$ şi $\alpha \in [-10, 10]$.

Se cere:

a. o structură de SRA, astfel încât răspunsul indicial să urmărească un răspuns impus;

b. legea de comandă care asigură urmărirea unui răspuns aperiodic cu o constantă de timp egală cu 0.5sec.

c. legea de variaţie a parametrilor regulatorului care asigură urmărirea asimptotică a ieşirii dorite furnizată de un model de referinţă.

11.3. Se consideră un sistem mecanic format din două corpuri legate printr-o articulaţie flexibilă şi amortizor descris prin:

$$J_m \ddot{\theta}_m(t) + b_m \dot{\theta}_m(t) = u(t) - u_k(t)$$

$$J_s \ddot{\theta}_s(t) + b_s \dot{\theta}_s(t) = u_k(t),$$

unde $\theta_m(t)$, J_m şi b_m reprezintă poziţia unghiulară a motorului, inerţia şi coeficientul de frecare vâscoasă, $\theta_s(t)$, J_s şi b_s sunt poziţia, inerţia şi coeficientul de frecare vâscoasă ale sarcinii, $u(t)$ este comanda (tensiunea de alimentare a motorului), iar $u_k(t)$ este forţa din articulaţie datorată flexibilităţii şi amortizării:

$$u_k(t) = K\delta(t) + b_k \dot{\delta}(t)$$

$$\delta(t) = \theta_m(t) - \theta_s(t),$$

unde $K > 0$ este coeficientul de rigidizare iar b_k este coeficientul de amortizare.

Se cere:

a. legea de comandă, în condiţiile în care parametrii modelului sunt cunoscuţi;

b. legea de adaptare a comenzii, în cazul în care parametrii sunt variabili în timp, astfel încât starea sistemului să urmărească o stare generată de un model de referinţă.

11.4. Se consideră modelul unui manipulator:

$$D(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + \Phi(q,t) = K_u u$$

unde $K_u \in \Re^{n \times n}$ este o matrice constantă necunoscută pentru $u \in \Re^n$ şi $q \in \Re^n$.

Se cere:

a. o schemă de reglare adaptivă pentru K_u diagonală şi pozitiv definită;

b. o schemă de reglare adaptivă pentru K_u diagonală şi nesingulară.

11.5. Se consideră procesul de ordinul 1:

$$\dot{y}(t) = (a_p + \Delta)y(t) + u(t)$$

unde a_p este parametrul nominal al procesului şi Δ reprezintă incertitudinea parametrică.

Dându-se un model de referinţă

$$\dot{y}_m(t) = -a_m y_m(t) + r(t), \; a_m > 0$$

se cere:

a) legea de comandă pentru modelul nominal cu o structură fixă;

b) legea de comandă adaptivă în prezenţa incertitudinii parametrice;

c) studiu comparativ pentru cele două situaţii cu evidenţierea robusteţei celor două soluţii.

12. SISTEME DE REGLARE CU INTRĂRI ŞI IEŞIRI MULTIPLE

12.1. Introducere

Multe procese industriale sunt caracterizate prin faptul că mai multe intrări generează ca efecte mai multe ieşiri (fig. 12.1) cu puternice interacţiuni între variabile.

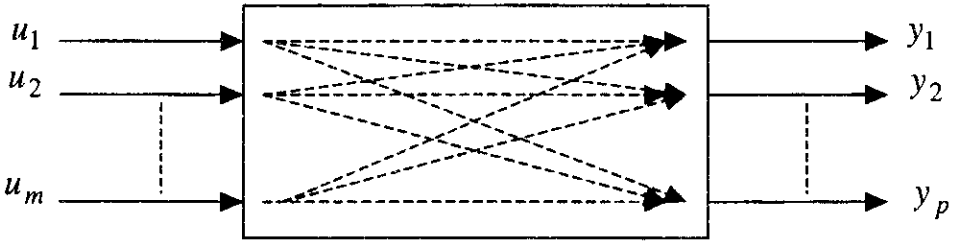


Fig. 12.1

Pentru a descrie funcţionarea unui asemenea obiect, putem utiliza în cazul liniar, funcţii de transfer H_{ij} pentru fiecare pereche intrare – ieşire:

$$\begin{aligned} Y_1 &= H_{11}(s)U_1(s)+H_{12}(s)U_2(s)+\dots\dots+H_{1m}(s)U_m(s) \\ Y_2 &= H_{21}(s)U_1(s)+H_{22}(s)U_2(s)+\dots\dots+H_{2m}(s)U_m(s) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y_p(s) &= H_{p1}(s)U_1(s)+H_{p2}(s)U_2(s)+\dots\dots+H_{pm}(s)U_m(s) \end{aligned} \qquad (12.1)$$

sau, dacă notam $Y^T(s)=[Y_1(s)\dots Y_p(s)]$ şi $U^T(s)=[U_1(s)\dots U_m(s)]$, se obţine o reprezentare matriceală:

$$Y(s)=H_P(s)\cdot U(s) \qquad (12.2)$$

unde

$$H_P(s)=\begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) & \cdots & H_{1m}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) & \cdots & H_{2m}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{p1}(s) & H_{p2}(s) & \cdots & H_{pm}(s) \end{bmatrix} \qquad (12.3)$$

În cazul particular al proceselor cu m intrări şi m ieşiri, matricea (12.3) este o matrice pătrată.

Spunem că matricea $H_p(s)$ este o „matrice proprie“ dacă fiecare funcţie de transfer $H_{ij}(s)$ este proprie.

O observaţie utilă este aceea că dacă $u_k(t)$ este un impuls Dirac, $H_{ik}(s)$ este transformata Laplace a componentei i a ieşirii $y(t)$.

Răspunsul pondere al sistemului $h(t)$ poate fi calculat ca şi în cazul sistemelor monovariabile ca transformata Laplace inversă a matricei $H_p(s)$:

$$h(t)=\begin{bmatrix} h_{11}(t) & h_{12}(t) & \cdots & h_{1m}(t) \\ h_{21}(t) & h_{22}(t) & \cdots & h_{2m}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{m1}(t) & h_{m2}(t) & \cdots & h_{mm}(t) \end{bmatrix}=L^{-1}[H_p(s)] \qquad (12.4)$$

unde

$$h_{ik}(t)=L^{-1}[H_{ik}(s)]. \qquad (12.5)$$

Modelul de stare pentru un sistem multivariabil se obţine cu uşurinţă prin evidenţierea dimensiunilor corespunzătoare ale matricelor A, B, C şi D.

Astfel, se poate utiliza o realizare de forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax+Bu \\ y &= Cx+Du\ ;\ x(t)=x_0\in R^n \end{aligned} \qquad (12.6)$$

unde $x(t)\in R^n$, $u(t)\in R^m$, $y(t)\in R^m$, $A\in R^{n\times n}$, $B\in R^{n\times m}$, $C\in R^{m\times n}$, $D\in R^{m\times m}$.

Proprietăţile structurale ale sistemelor multivariabile se definesc similar ca pentru sistemele monovariabile [46].

Relaţia între cele două modele se obţine cu uşurinţă, dacă aplicăm transformata Laplace ecuaţiei (12.6):

$$\begin{aligned} sX(s)-x(0) &= AX(s)+BU(s) \\ Y(s) &= CX(s)+DU(s) \end{aligned} \qquad (12.7)$$

Pentru $x(0)=0$ se obţine:

$$Y(s)=\left[C(sI-A)^{-1}B+D\right]U(s), \qquad (12.8)$$

iar matricea de transfer ataşată sistemului este:

$$H(s)=C(sI-A)^{-1}B+D. \tag{12.9}$$

În cele ce urmează, vom considera modele pentru procese cu două intrări şi două ieşiri, caracterizate prin matricea:

$$H_p(s)=\begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) \end{bmatrix} \tag{12.10}$$

Pentru a exemplifica un asemenea model, considerăm procesul cu două intrări şi două ieşiri (fig. 12.2). Cele două fluide ce alimentează rezervorul au temperaturi diferite, intrările în proces fiind considerate cele două debite de fluide (Q_1 şi Q_2). Ieşirile măsurabile ale procesului sunt nivelul ($y_1(t)$) şi temperatura ($y_2(t)$). Admitem că modelul matematic este liniarizat în jurul unui punct de funcţionare caracterizat prin y_{10} şi y_{20}.

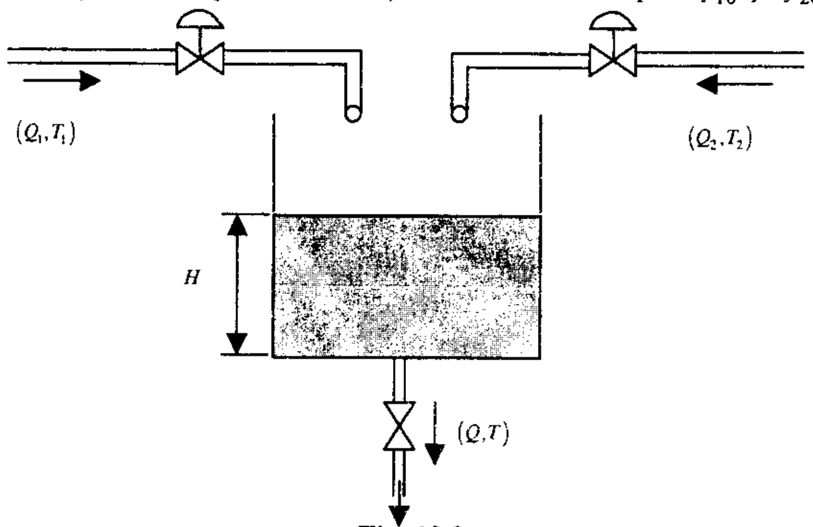


Fig. 12.2

În acest caz, este evident că cele două ieşiri pot fi obţinute sub forma:

$$\begin{aligned} Y_1(s)&=H_{11}(s)\;U_1(s)+H_{12}U_2(s) \\ Y_2(s)&=H_{21}(s)\;U_1(s)+H_{22}(s)\;U_2(s), \end{aligned} \tag{12.11}$$

iar matricea de transfer ataşată acestui proces are forma (12.10).

Funcţiile de transfer $H_{11}(s)$ şi $H_{22}(s)$ sunt denumite funcţii de transfer principale, iar $H_{12}(s)$ şi $H_{21}(s)$ sunt funcţii de transfer de cuplare.

O asemenea reprezentare se constituie în partea controlabilă şi observabilă a procesului. În cazul general, dacă funcţiile de transfer $H_{ij}(s)$ sunt în forma minimală, pentru procesul cu două intrări şi două ieşiri pot fi utilizate două structuri canonice: structura de tip P (fig. 12.3 *a*) şi structura de tip V (fig.12.3 *b*).

Pentru structura canonică V se obţin următoarele ecuaţii:

$$\begin{aligned} Y_1(s)&=H_{11}U_1(s)+H_{21}(s)Y_2(s) \\ Y_2(s)&=H_{12}Y_1(s)+H_{22}(s)U_2(s) \end{aligned} \tag{12.12}$$

sau

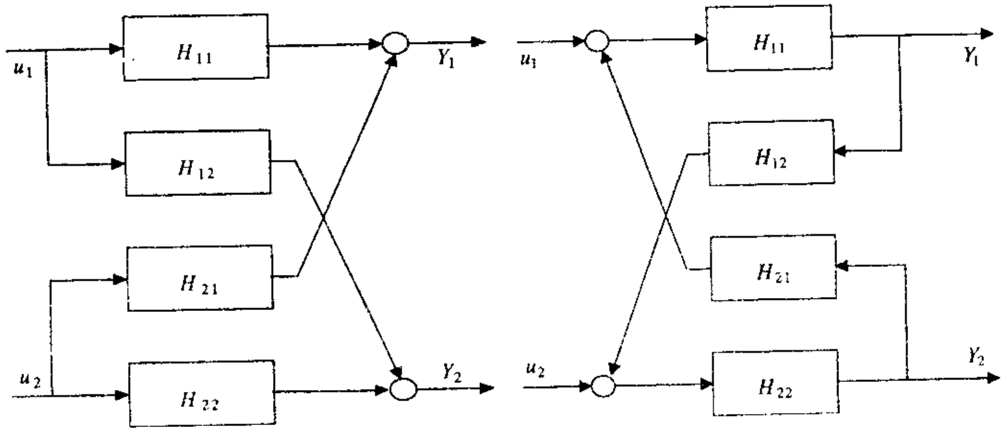
$$Y(s)=\begin{bmatrix} H_{11} & 0 \\ 0 & H_{22} \end{bmatrix}\left\{U(s)+\begin{bmatrix} 0 & H_{21} \\ H_{12} & 0 \end{bmatrix}Y(s)\right\} \tag{12.13}$$

$$Y(s)=H_d\,[U+H_cY]$$

unde

$H_d=\begin{bmatrix} H_{11} & 0 \\ 0 & H_{22} \end{bmatrix}$ este matricea diagonală şi

$H_c=\begin{bmatrix} 0 & H_{21} \\ H_{12} & 0 \end{bmatrix}$ este matricea de cuplare.



a) b)

Fig. 12.3

Matricea de transfer pentru forma canonică V este astfel:

$$H_p=[I-H_dH_c]^{-1}\cdot H_d \tag{12.14}$$

Aceasta există dacă $det[I-H_dH_c]\neq 0$.

Ambele forme canonice pot fi întâlnite în reprezentarea proceselor multivariabile, iar trecerea de la o formă la alta este uşor de realizat [57].

Comportarea proceselor multivariabile este determinată de funcţiile de transfer principale $H_{ii}(s)$ şi $H_{ij}(s)$, atât ca semn, cât şi ca poziţie.

În cazul în care $H_{ii}(s)=H_{jj}(s)$ şi $H_{ij}(s)=H_{ji}(s)$ spunem că procesul multivariabil este simetric.

Cea mai simplă soluţie pentru reglarea proceselor mutlivariabile este soluţia monovariabilă, adică pentru fiecare mărime reglată se adoptă o structură cu un singur bloc de reglare (fig. 12.4).

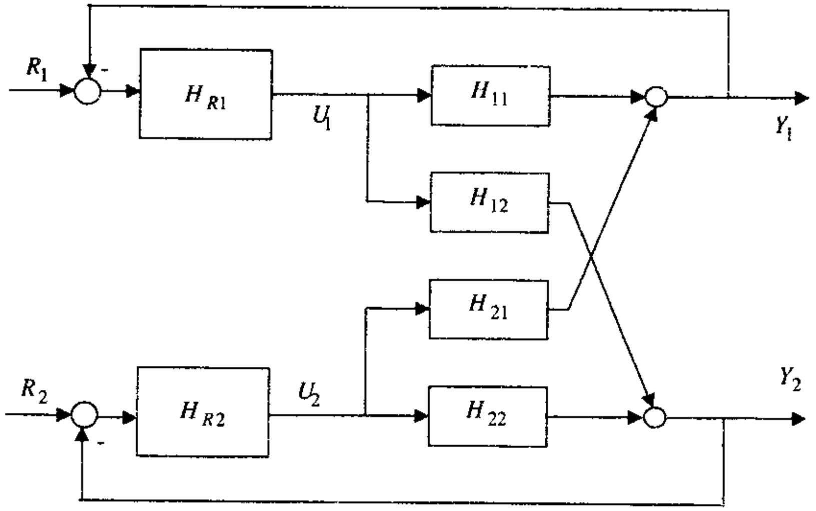


Fig. 12.4

Dacă admitem $R_1=0, R_2=0$ şi observăm că:

$$U_1=-H_{R_1}Y_1$$

$$U_2=-H_{R_2}Y_2$$

regulatorul poate fi descris prin matricea diagonală:

$$H_R=\begin{bmatrix}-H_{R_1} & 0\\ 0 & -H_{R_2}\end{bmatrix} \tag{12.15}$$

Ţinând seama de structura matricei $H_p(s)$ şi de matricea $H_R(s)$ se obţine:

$$[I-H_p(s)H_R(s)]Y(s)=0 \tag{12.16}$$

sau

$$\begin{bmatrix}1+H_{11}H_{R_1} & H_{21}H_{R_2}\\ H_{12}H_{R_1} & 1+H_{22}H_{R_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y_1\\ Y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \tag{12.17}$$

Ecuaţia caracteristică ataşată SRA se obţine cu uşurinţă din (12.17):

$$[1+H_{11}(s)H_{R1}(s)][1+H_{22}(s)H_{R2}(s)]- \\ -H_{12}(s)H_{21}(s)H_{R1}(s)H_{R2}(s)=0 \tag{12.18}$$

Expresiile $[1+H_{11}(s)H_{R1}(s)]$ şi $[1+H_{22}(s)H_{R2}(s)]$ sunt polinoamele caracteristice ale buclelor de reglare decuplate. Termenul al doilea din (12.18) exprimă influenţa cuplării celor două bucle principale de reglare, prin elementele de cuplare $H_{12}(s)$ şi $H_{21}(s)$, asupra comportării SRA. Acest termen descrie efectul indus de buclele de reglare principale prin intermediul efectului elementelor de cuplare.

Pentru a analiza efectul componentelor $H_{12}(s)$ şi $H_{21}(s)$ asupra comportării celor două bucle de reglare, rescriem (12.18) în forma:

$$[1+H_{11}H_{R1}][1+H_{22}H_{R1}]\left[1-\frac{H_{12}H_{21}H_{R1}H_{R2}}{[1+H_{11}H_{R1}][1+H_{22}H_{R2}]}\right]=0 \tag{12.19}$$

sau, dacă introducem în (12.19) expresiile funcţiilor de transfer ataşate buclelor principale (admiţând că în figura 12.4 $H_{12}=H_{21}=0$):

$$H_{01}(s)=\frac{H_{11}(s)H_{R1}(s)}{1+H_{11}(s)H_{R1}(s)}$$

şi

$$H_{02}(s)=\frac{H_{22}(s)H_{R2}}{1+H_{22}(s)H_{R2}(s)},$$

se obţine:

$$[1+H_{11}(s)H_{R1}(s)][1+H_{22}(s)H_{R2}(s)][1-K(s)H_{01}(s)H_{02}(s)]=0 \tag{12.20}$$

unde

$$K(s)=\frac{H_{12}(s)H_{21}(s)}{H_{11}(s)H_{22}(s)} \tag{12.21}$$

reprezintă factorul de cuplare dinamic.

Din (12.20) rezultă că valorile proprii ale sistemului multivariabil în structura P sunt constituite din valori proprii ale buclelor principale şi valorile proprii suplimentare cauzate de elementele de cuplare $H_{12}(s)$ şi $H_{21}(s)$.

Prin împărţirea cu $[1+H_{22}(s)H_{R2}(s)]$ în (12.18), rezultă:

$$1+H_{11}(s)H_{R1}(s)[1-K(s)H_{02}(s)]=0 \tag{12.22}$$

sau, dacă împărţim cu $[1+H_{11}(s)H_{R1}(s)]$, se obţine:

$$1+H_{22}(s)H_{R2}(s)[1-K(s)H_{01}(s)]=0. \tag{12.23}$$

Din analiza relaţiilor (12.22) şi (12.23) rezultă că efectul factorilor de cuplare asupra comportării buclelor principale poate fi evidenţiat prin înlocuirea funcţiilor de transfer $H_{11}(s)$ şi $H_{22}(s)$ cu expresiile:

$$H_{11}^c(s)=H_{11}(s)\ [1-K(s)H_{02}(s)] \tag{12.24}$$

$$H_{22}^c(s)=H_{22}(s)\ [1-K(s)H_{01}(s)].$$

BIBLIOTECA BUCUREŞTI

În figura 12.5 se reprezintă modificarea buclelor de reglare principale ca urmare a efectului cuplării.

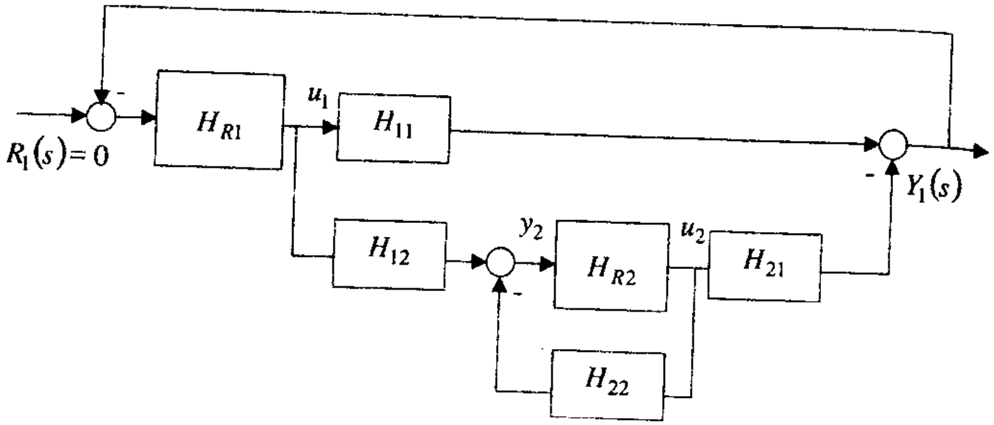


Fig. 12.5

În mod similar se obține și structura buclei de reglare cu regulatorul principal H_{R2}.

Un element important în analiza efectului interacțiunii dintre mărimile de intrare și ieșire este reprezentat de valoarea coeficientului de cuplare în regim staționar [57]:

$$K_0 = \frac{H_{12}(0)H_{21}(0)}{H_{11}(0)H_{22}(0)} = \frac{K_{12}K_{21}}{K_{11}K_{22}}, \qquad (12.25)$$

unde K_{ij} reprezintă factorii de amplificare atașați fiecărui canal intrare-ieșire, iar K_0 reprezintă factorul de cuplare în regim staționar.

De remarcat faptul că pentru canalul principal cu regulatorul $H_{R1}(s)$, factorul de amplificare nu este $H_{11}(0)$, ci:

$H_{11}(0)[1-K_0H_{02}(0)]$,

dacă ținem seama de (12.24).

Factorul $[1-K_0H_{0i}(0)]=\varepsilon_{ii}$ descrie modificarea amplificării datorită cuplării.

În figura 12.6 se prezintă dependența factorului ε_{ii} de K_0.

Din analiza graficului din figura 12.6 se pot distinge următoarele situații:

a) $K_0 < 0$; cuplare negativă $\rightarrow \varepsilon_{ii} > 1$

b) $K_0 > 0$; cuplare pozitivă

- $K_0 \in \left(0, H_{01}^{-1}(0)\right] \rightarrow \varepsilon_{ii} \in [0,1)$
- $K_0 > \dfrac{1}{H_{0i}(0)} \rightarrow \varepsilon_{ii} < 0$.

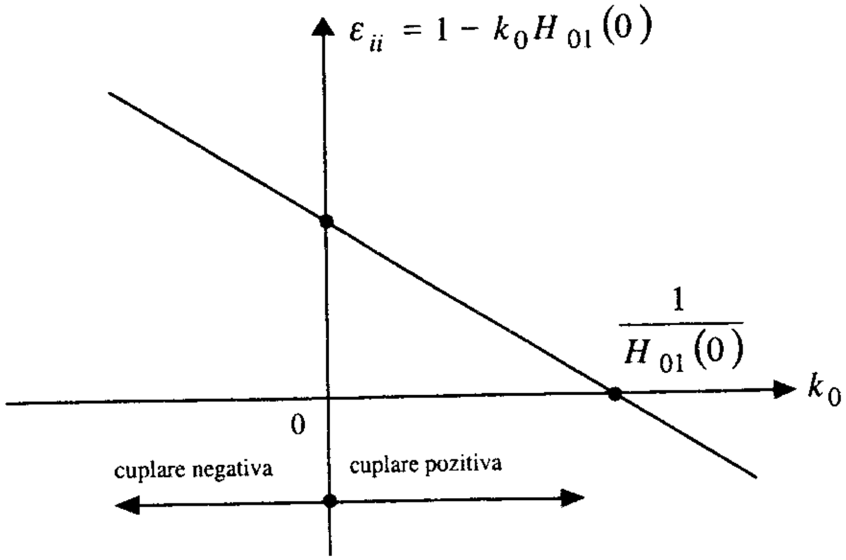


Fig. 12.6

Întrucât factorul de cuplare $K(s)$ depinde numai de funcțiile de transfer ale procesului incluzând semnele lor, cuplarea pozitivă sau negativă sunt proprietăți ale procesului cu două variabile de intrare și două variabile de ieșire.

În funcție de valoarea factorului K_0 și de constantele de timp incluse în funcțiile de transfer $H_{ij}(s)$, eficiența reglării decuplate este mai mare sau mai redusă.

Pentru o analiză completă a comportării SRA pentru procese cu două intrări și două ieșiri, vom considera în cele ce urmează efectul mărimilor exogene (referințe, perturbații). Pot fi întâlnite diferite situații posibile (fig. 12.7):

– *perturbațiile v acționează asupra ambelor bucle.* Perturbațiile v_1 și v_2 generate de v prin H_{v1} și H_{v2} pot acționa simultan, determinând schimbarea punctului de funcționare, și se materializează prin modificări ale puterii sau forțelor de comandă. Funcțiile de transfer H_{v1} și H_{v2} pot avea același semn sau semne diferite.

– *referințele pot fi modificate simultan sau independent în funcție de regimul de funcționare dorit.* În cazul particular al procesului considerat, cele două intrări se referă la nivelul dorit în rezervor și temperatura fluidului la ieșirea din rezervor. Perturbațiile pot fi cele două temperaturi ale fluidelor de alimentare a rezervorului și consumul de fluid (perturbație de tip sarcină).

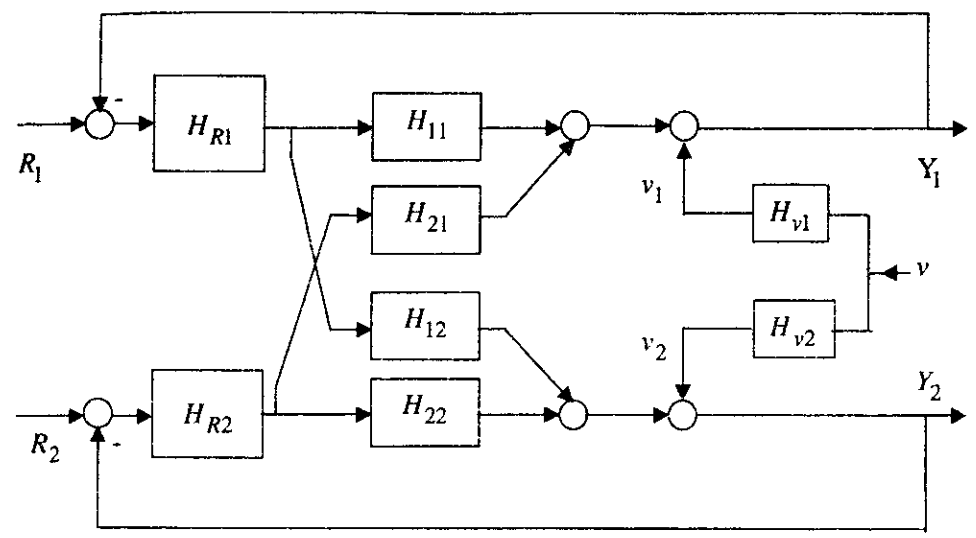


Fig. 12.7

În funcţie de excitaţiile externe (perturbaţii, referinţe) şi de funcţiile de transfer $H_{ii}(s)$ şi $H_{ij}(s)$, regulatoarele principale H_{R_1} şi H_{R_2} se pot ajuta sau bloca unul pe celalalt.

De remarcat faptul că soluţia de reglare a proceselor cu două regulatoare principale trebuie atent analizată luând în consideraţie factorul de cuplare, particularităţile şi semnul perturbaţiilor, precum şi momentele de modificare a referinţelor [46, 57].

Exemplul 12.1:

Se consideră procesul caracterizat prin modelul:

$$H_p(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{2}{2s+1} & \dfrac{0.1}{0.1s+1}\\ \dfrac{0.1}{0.2s+1} & \dfrac{0.5}{4s+1}\end{bmatrix}$$

Pentru acest proces se poate adopta o soluţie de reglare cu două blocuri de reglare, având în vedere că factorul de cuplare $K_0=\dfrac{0.1\cdot 0.1}{2\cdot 0.5}=0.01$.

Factorul de cuplare dinamic are forma:

$$K(s)=0.01\frac{(2s+1)(4s+1)}{(0.2s+1)(0.1s+1)}.$$

Admitem pentru fiecare canal principal intrare-ieşire câte un regulator PI:

$$H_{R_1}(s)=K_R\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)=4\left(1+\frac{1}{2s}\right)$$

$$H_{R_2}(s)=K_R\left(1+\frac{1}{T_2 s}\right)=8\left(1+\frac{1}{4s}\right)$$

Cu aceste blocuri de reglare se obţin funcţiile de transfer:

$$H_{01}(s)=\frac{1}{0.25s+1}$$

$$H_{02}(s)=\frac{1}{s+1}$$

şi coeficienţii de corecţie ε_{ii}

$$\varepsilon_{11}=1-K_0H_{01}(0)=1-0.01\cdot 1=0.99$$

$$\varepsilon_{12}=1-K_0H_{02}(0)=1-0.01\cdot 1=0.99$$

Rezultă cu uşurinţă că efectul cuplării în regim staţionar este neglijabil. Pentru a analiza efectul în regim dinamic se calculează:

$$H_{11}^c(s)=H_{11}(s)[1-K(s).\,H_{02}(s)]$$

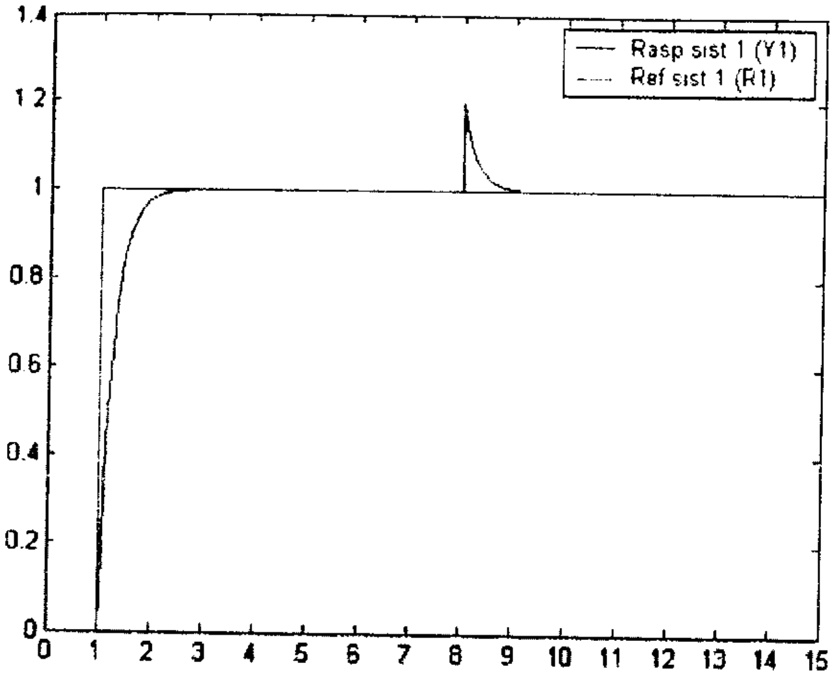
$$H_{22}^c(s)=H_{22}(s)[1-K(s).\,H_{01}(s)]$$

sau

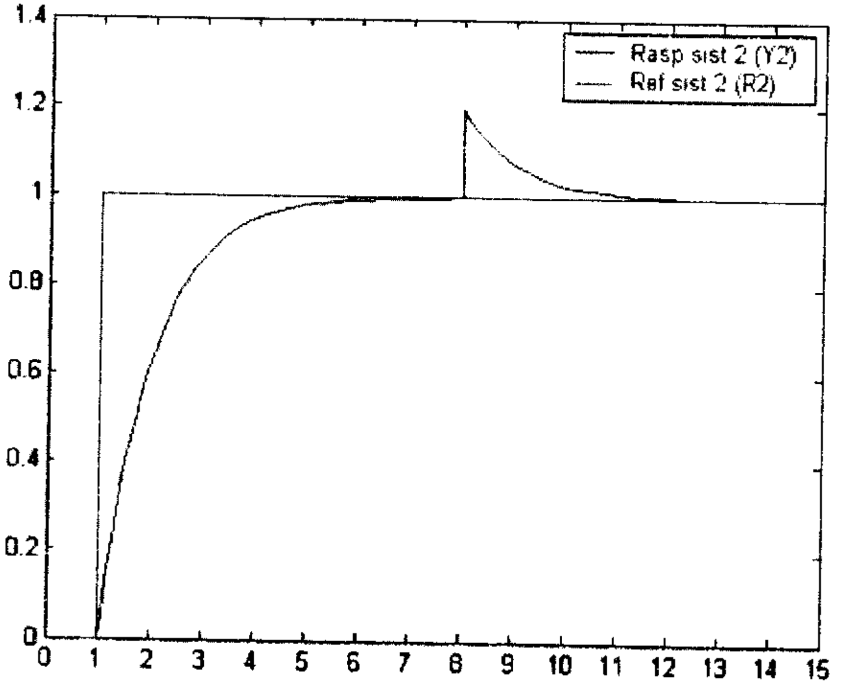
$$H_{11}^c(s)=\frac{2}{2s+1}\left[1-0.01\frac{(2s+1)\,(4s+1)}{(0.2s+1)\,(0.1s+1)}\cdot\frac{1}{(s+1)}\right]$$

$$H_{22}^c(s)=\frac{0.5}{4s+1}\left[1-0.01\frac{(2s+1)\,(4s+1)}{(0.2s+1)\,(0.1s+1)}\cdot\frac{1}{0.25s+1}\right].$$

În figura 12.8.a,b se prezintă răspunsul SRA pentru treaptă aplicată la intrare, în condiţiile în care se neglijează interacţiunea între canale, folosind două regulatoare PI. În condiţiile în care se include interacţiunea dintre cele două canale, prin luarea în calcul a funcţiilor de transfer $H_{11}^c(s)$ *şi* $H_{22}^c(s)$ *la proiectarea blocurilor de reglare, se obţin răspunsurile prezentate în figura 128.c,d.*

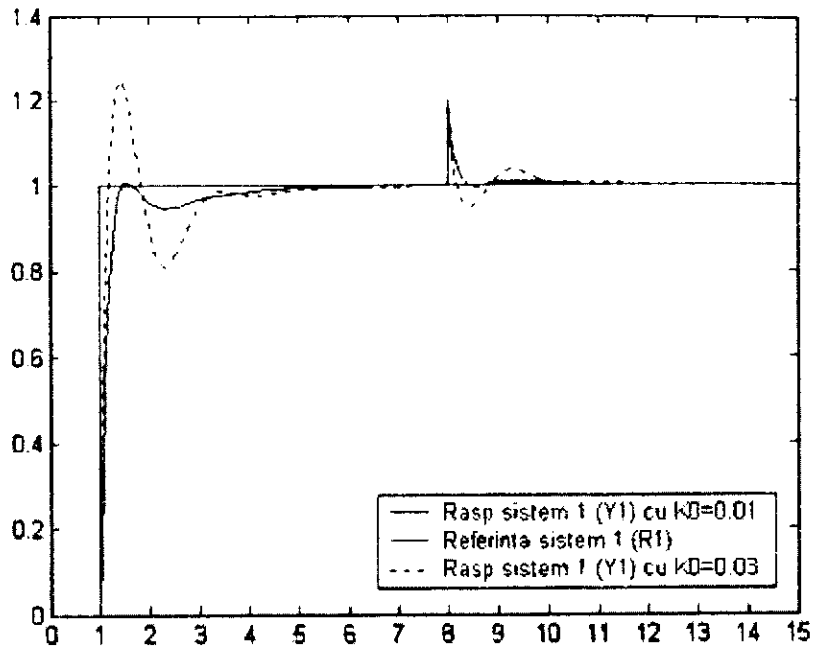


a)

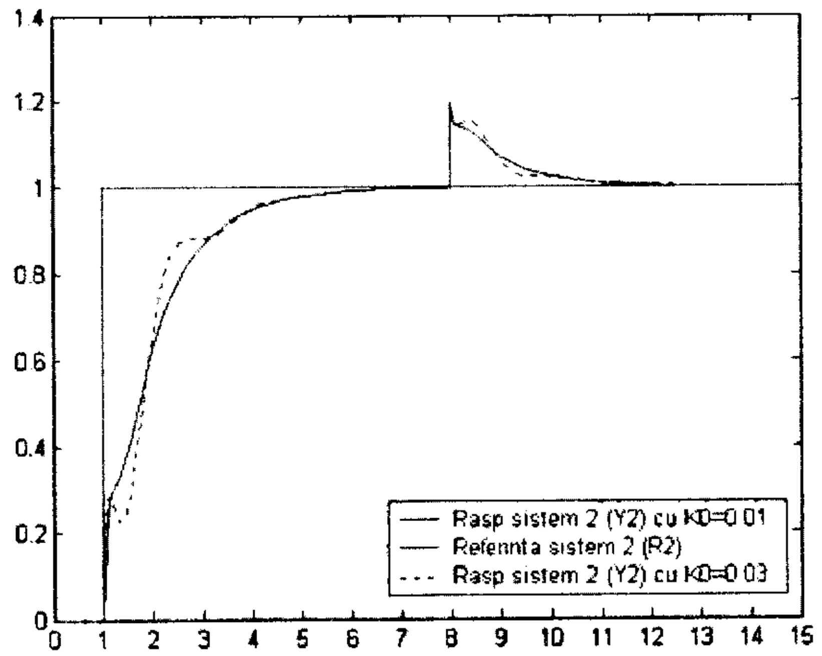


b)

Fig. 12.8



c)



d)

Fig. 12.8 (*continuare*)

12.2. Probleme ale proiectării regulatoarelor multivariabile

12.2.1. Elemente de analiză

Aşa cum s-a menţionat în §12.1, procesele multivariabile, în situaţii speciale, bine definite, pot fi controlate cu regulatoare monovariabile, descompunând SRA multivariabil într-o mulţime de bucle de reglare cu o intrare şi o ieşire. În aceste cazuri particulare, se neglijează interacţiunile între variabile şi se determină regulatoarele ca şi când procesul ar fi reprezentat printr-o matrice diagonală cu funcţiile de transfer $H_{ii}(s)$ pe diagonala principală.

În cazul general, structura SRA cu un singur grad de libertate are forma din figura 12.9, unde $H_R(s)$ şi $H_p(s)$ sunt matrice $m\times m$, dacă procesul are m intrări şi m ieşiri, iar $Y(s)$, $V_1(s)$, $U(s)$ şi $V_2(s)$ sunt vectori de dimensiune m.

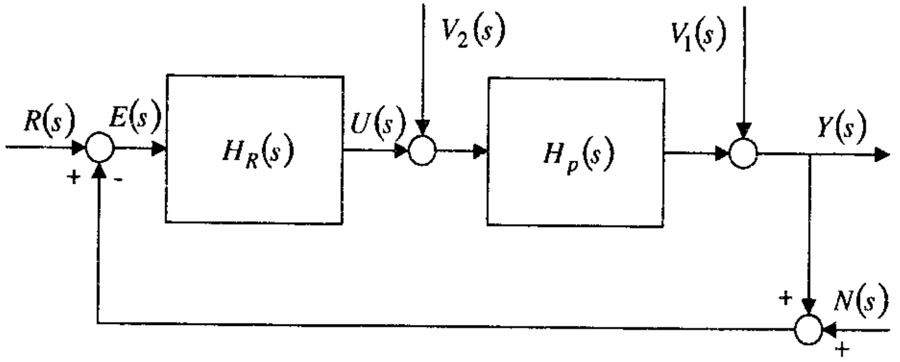


Fig. 12.9

Dacă vom extinde noţiunile de funcţie de sensibilitate $S(s)$ şi $T(s)$ introduse în analiza SRA monovariabile, obţinem următoarele relaţii pentru mărimile de interes din sistem:

$$Y(s)=T(s)R(s)-T(s)N(s)+S_1(s)V_1(s)+S_2(s)V_2(s) \quad (12.26)$$

$$U(s)=S_u(s)R(s)-S_u(s)N(s)+S_u(s)V_1(s)+S_u(s)H_p(s)V_2(s) \quad (12.27)$$

$$E(s)=S(s)R(s)-S(s)N(s)+S_u(s)V_1(s)+S_1(s)V_1(s)-S_2(s)V_2(s) \quad (12.28)$$

unde $S_u(s)$ reprezintă matricea de transfer ce conectează $R(s)$ la $U(s)$, iar $S_2(s)$ reprezintă matricea de transfer ce conectează $V_2(s)$ la $Y(s)$.

Expresiile matricelor $S(s)$, $T(s)$, $S_u(s)$ şi $S_2(s)$ pot fi obţinute cu uşurinţă:

$$S(s)=[I+H_PH_R]^{-1} \quad (12.29)$$

$$T(s)=H_PH_R[I+H_PH_R]^{-1}=[I+H_PH_R]^{-1}\cdot H_PH_R \quad (12.30)$$

$$S_u(s)=H_R[I+H_PH_R]^{-1}=H_R(s)S(s)=H_P^{-1}(s).T(s) \quad (12.31)$$

$$S_2(s)=[I+H_P(s)H_R(s)]^{-1}.H_P(s)= =H_P(s)[I+H_R(s)H_P(s)]^{-1}=S(s)H_P(s) \quad (12.32)$$

De remarcat faptul că şi în cazul sistemelor multivariabile se menţine relaţia:

$$S(s)+T(s)=I\,. \quad (12.33)$$

Cu aceste elemente introduse, se poate trece la analiza performanţelor unui SRA dat sau/şi la proiectarea regulatorului care asigură performanţele impuse într-un context exogen precizat.

Stabilitatea în buclă închisă

Spunem că un sistem MIMO este stabil dacă toţi polii sunt strict în intervalul regiunii de stabilitate (semiplanul stâng pentru sisteme continue sau discul unitate pentru sisteme discrete). Totuşi, interacţiunea sistemelor (fig. 12.9) poate conduce la moduri instabile ascunse ca urmare a unor potenţiale compensări poli-zerouri instabile.

Lema 12.1: Se consideră bucla de reglare din figura 12.9. Această buclă considerată nominală este intern stabilă dacă şi numai dacă cele patru funcţii de sensibilitate definite în (12.29) – (12.32) sunt stabile.

Demonstraţie:

Dacă toate semnalele de intrare, adică $r(t)$, $v_1(t)$, $v_2(t)$ şi $n(t)$ sunt limitate, atunci se vede din (12.26) – (12.28) că stabilitatea celor patru funcţii de sensibilitate este suficientă pentru a asigura ieşiri limitate $y(t)$, $u(t)$ şi $\varepsilon(t)$. Observăm că această condiţie este necesară, deoarece $S_u(s)=H_p^{-1}(s)T(s)$ este stabilă dacă şi numai dacă $T(s)$ este stabilă.

Precizia SRA multivariabil poate fi determinată similar ca în cazul SRA monovariabile, cu observaţia că operăm cu vectori la intrare şi ieşire. Admitem că mărimile exogene sunt trepte definite prin:

$$R(s)=K_r\cdot\frac{1}{s},\ V_1(s)=K_1\cdot\frac{1}{s},\ V_2(s)=K_2\cdot\frac{1}{s} \quad (12.34)$$

unde $K_R\in R^m$, $K_1\in R^m$, $K_2\in R^m$ sunt vectori constanţi.

Pentru un SRA stabil, prin aplicarea teoremei valorii finale se obţin:

$$y_{st} = \lim_{t\to\infty} y(t) = T(0)\ \ K_r + S(0)K_1 + S_2K_2 \qquad (12.35)$$

$$u_{st} = \lim_{t\to\infty} u(t) = S_u(0)\ \ K_r + S_u(0)K_1 - S_uH_p(0)\ \ K_2 \qquad (12.36)$$

$$\varepsilon_{st} = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = S(0)\ \ K_r - S(0)K_1 - S_2(0)\ \ K_2 \qquad (12.37)$$

Lema 12.2: Considerăm SRA multivariabil (fig. 12.9). Aproximăm că referinţa $R(s)$ este un vector de forma (12.34). Eroarea staţionară în canalul i, $\varepsilon_i(\infty)$ este egală cu zero, dacă rândul i din $S(0)$ este egal cu zero. În aceste condiţii, rândul i din $T(0)$ este vectorul elementar $v_i = [0 0 \ldots 0 1 0 \ldots 0]^T$.

Demonstraţie:

Considerând referinţa sub formă de treaptă (12.34), eroarea staţionară se calculează cu relaţia:

$$\varepsilon_i(\infty) = [S(0)]_i \ * \ K_r = 0 \qquad (12.38)$$

unde $[S(0)]_{i*}$ este rândul i al matricei $S(0)$.

Totuşi, $\varepsilon_i(\infty) = 0$ pentru orice vector constant K_r, dar (12.38) este satisfăcută numai dacă $[S(0)]_{i*}$ are toate elementele egale cu zero, adică S_0 îşi pierde rangul la $s = 0$. Aceasta este exact definiţia unui zero într-un sistem multivariabil.

Proprietatea rândului i din $T(0)$ este o consecinţă directă a identităţii $S(s)+T(s)=I$ şi proprietatea rândului i din S_0.

Rezultate similare se obţin şi pentru perturbaţii.

O reprezentare polinomială a matricei $H_p(s)$ şi, în mod corespunzător, a matricei $H_R(s)$ are forma generală:

$$H_P(s) = B_p(s)[A_p(s)]^{-1}, \qquad (12.39)$$

respectiv

$$H_R(s) = Q_R(s)[P_R(s)]^{-1}, \qquad (12.40)$$

unde B_P, A_P, Q_R şi P_R reprezintă matrice de transfer.

Matricea ataşată sistemului deschis va fi dată de produsul

$$H_d(s) = H_P(s).H_R(s), \qquad (12.41)$$

iar matricea ataşată sistemului închis are forma:

$$H_0(s) = T(s) = [I + H_P(s)\ \ H_R(s)]^{-1} \cdot H_PH_R = $$
$$= H_PH_R\ \ [I + H_PH_R]^{-1}. \qquad (12.42)$$

Matricele $H_p(s)$, $H_R(s)$, $H_d(s)$ şi $H_0(s)$ pot fi factorizate în diferite modalităţi [46].

12.2.2. Tehnici SISO în conducerea proceselor multivariabile

O primă etapă în proiectarea sistemelor multivariabile este analiza comportării sistemului decuplat proiectat prin tehnici specifice sistemelor monovariabile. Astfel, se foloseşte un regulator complet decuplat (H_R se alege ca o matrice diagonală).

Într-o asemenea abordare interacţiunile pot fi tratate ca perturbaţii. Ieşirile procesului pot fi descrise sub forma:

$$Y_i(s) = H_{ii}(s)U_i(s) + \sum_{\substack{j\neq i\\ i=1}}^{m} H_{ij}(s)U_{ji}(s), \qquad (12.43)$$

unde contribuţia fiecărei intrări $u_j \neq u_i$ se poate considera ca o perturbaţie aplicată la ieşire pentru fiecare buclă de reglare ce include regulatoarele $H_{Ri}(s)$. Această abordare este, desigur, incorectă, ţinând seama că în esenţă perturbaţiile sunt intrări independente.

Totuşi, în anumite condiţii, ţinând seama de amplitudinea şi spectrul de frecvenţă, o asemenea tratare poate conduce la rezultate acceptabile.

Pentru a exemplifica limitările acestei abordări, considerăm un proces cu două intrări şi două ieşiri cu patru regimuri de funcţionare posibile [46].

Exemplul 12.2

Se consideră procesul descris prin matricea $H_p(s)$ [46]:

$$H_P(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{s^2+3s+2} & \dfrac{K_{12}}{s+1} \\ \dfrac{K_{21}}{s^2+2s+1} & \dfrac{6}{s^2+5s+6} \end{bmatrix}.$$

Coeficienţii K_{12} şi K_{21} depind de regimul de funcţionare ataşat procesului.

Punctul de funcţionare 1 ($K_{12} = K_{21} = 0$)

Clar, în acest caz nu există interacţiune şi în consecinţă un regulator cu două componente $H_{R_{11}}$ şi $H_{R_{22}}$ poate fi utilizat.

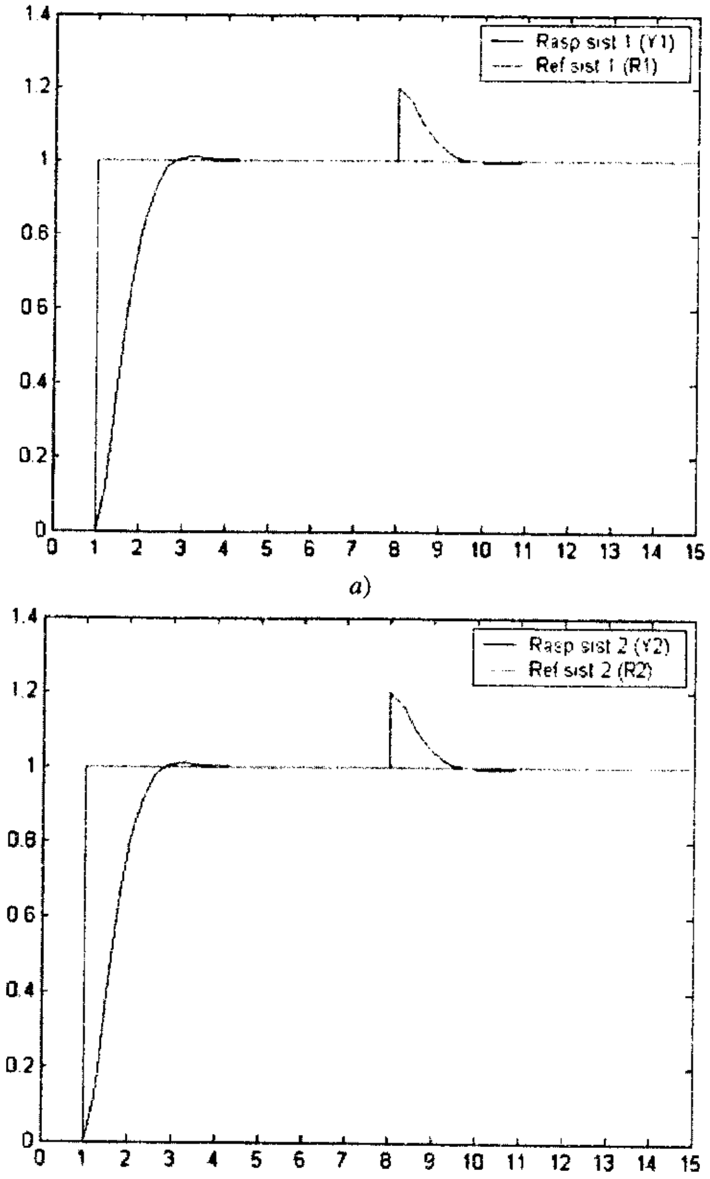
Admiţând pentru cele două bucle de reglare aceeaşi funcţie de transfer dorită

$$H_{01}(s) = H_{02}(s) = \frac{6}{s^2+4s+6},$$

se obţin funcţiile de transfer ale regulatoarelor:

$$H_{R_{11}}(s) = \frac{3(s^2+3s+2)}{s(s+4)}\ \ ;\ \ H_{R_{22}} = \frac{s^2+5s+6}{s(s+4)}.$$

Sistemul de reglare se constituie din două bucle de reglare independente, al căror răspuns la referința treaptă aplicată pe cele două canale este prezentată în figura 12.10 a,b.



a)

b)

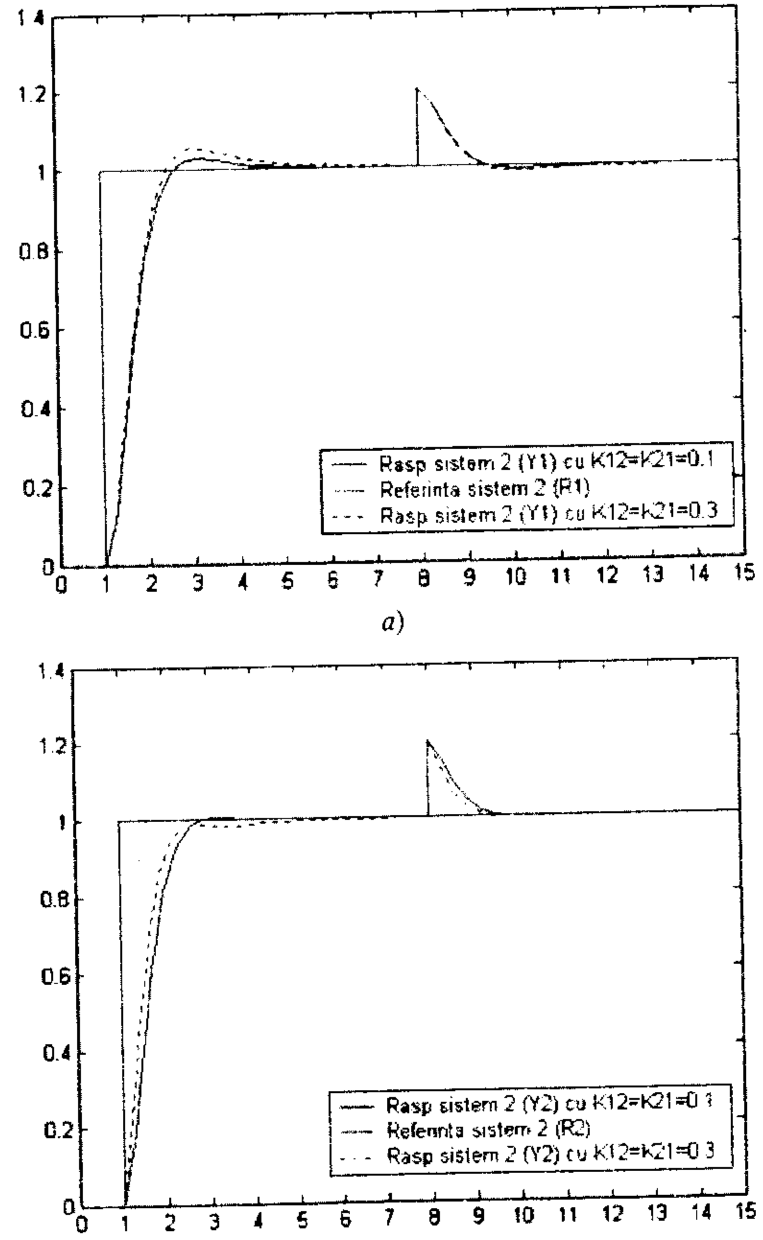
Fig. 12.10

Punctul de funcționare 2 $(K_{12} = K_{21} = 0.1)$

Considerăm regulatoarele proiectate pentru punctul de funcționare anterior. La momentul de timp $t_1 = 1s$ se aplică o treaptă unitară de referință r_1 și

la momentul de timp $t_2 = 10s$, se aplică o treaptă unitară de referință r_2. Răspunsul SRA, pentru $(K_{12} = K_{21} = 0.1)$ și pentru $(K_{12} = K_{21} = 0.3)$ este arătat în figura 12.11 a,b.

Se poate constata că interacțiunile au efecte neglijabile și, astfel, o tratare complet decuplată a sistemului este acceptabilă.



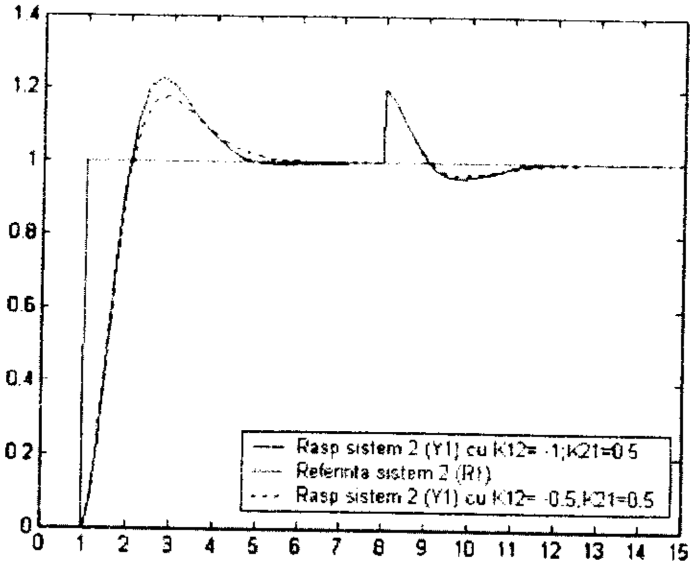
a)

b)

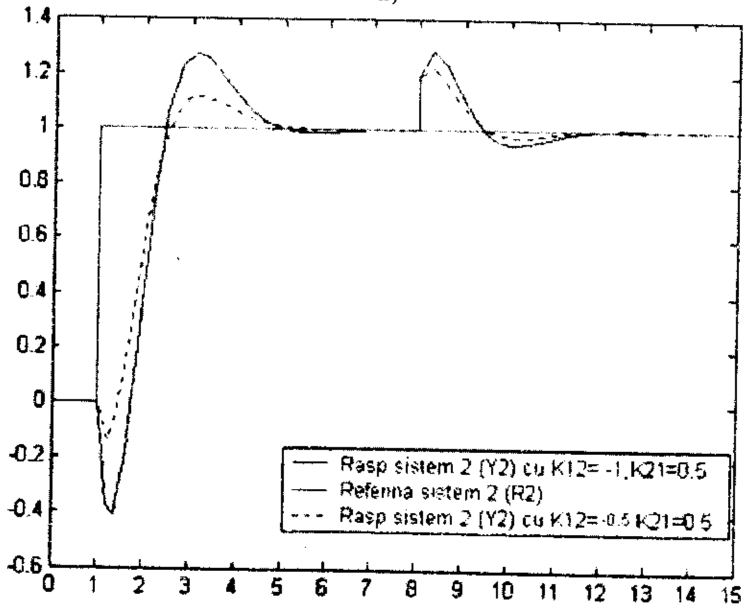
Fig. 12.11

Punctul de funcţionare 3 $(K_{12} = -1,\ K_{21} = 0.5)$

Rezultatul simulării, pentru $(K_{12} = -1,\ K_{21} = 0.5)$ *şi* $(K_{12} = -0.5,\ K_{21} = 0.5)$, *folosind aceleaşi regulatoare ca pentru punctul de funcţionare 2 şi în aceleaşi condiţii, este arătat în figura 12.12a,b. Se observă clar că schimbarea referinţei într-o buclă afectează sensibil ieşirea din cea de a doua buclă de reglare.*



a)

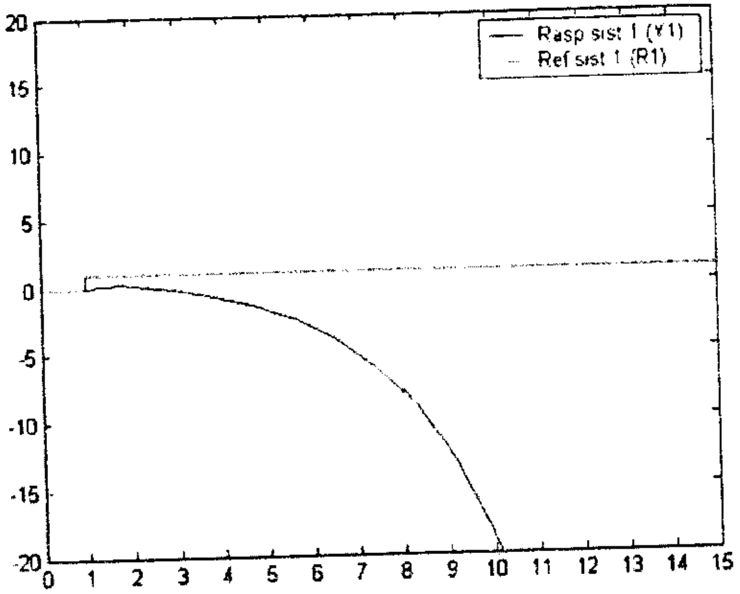


b)

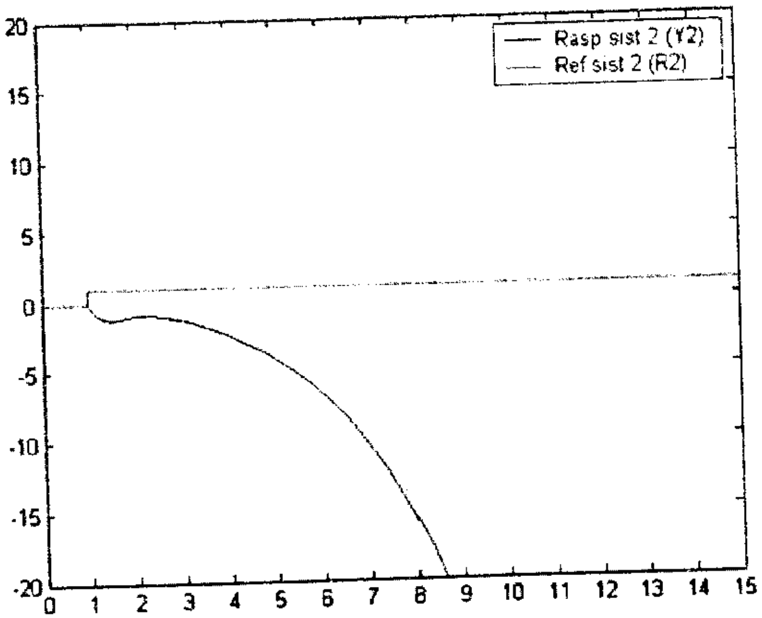
Fig. 12.12

Punctul de funcţionare 4 $(K_{12} = -2\ ,\ K_{21} = -1)$

Pentru aceleaşi condiţii de simulare (aceleaşi regulatoare şi modificări de referinţă), se poate observa din figura 12.13a,b că sistemul devine instabil şi deci inacceptabil.



a)



b)

Fig. 12.13

Pentru o analiză atentă a fenomenelor ce apar în acest ultim caz vom calcula cele două ieşiri folosind relaţiile:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = [I + H_P(s) H_R(s)]^{-1} \cdot H_P(s) H_R(s) \begin{bmatrix} R_1(s) \\ R_2(s) \end{bmatrix}$$

unde

$$H_R(s) = \begin{bmatrix} H_{R_{11}}(s) & 0 \\ 0 & H_{R_{22}}(s) \end{bmatrix}$$

iar

$$H_P(s) = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}.$$

După efectuarea calculelor, se obţine:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + H_{11} H_{R_{11}} & H_{12} H_{R_{22}} \\ H_{21} H_{R_{11}} & 1 + H_{22} H_{R_{22}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H_{11} H_{R_{11}} & H_{12} H_{R_{22}} \\ H_{21} H_{R_{11}} & H_{22} H_{R_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1(s) \\ R_2(s) \end{bmatrix}$$

sau după înlocuirea funcţiilor de transfer, matricea $H_0(s)$ are forma:

$$\frac{1}{\Delta(s)} \begin{bmatrix} 9s^4 + 40.5s^3 + 67.5s^2 - 18s - 81 & -3s^5 - 30s^4 - 105s^3 - 15s^2 - 72s \\ -4.5s^4 - 31.5s^3 - 63s^2 - 36s & 9s^4 + 40.5s^3 + 67.5s^2 - 18s - 81 \end{bmatrix}$$

unde

$$\Delta(s) = s^6 + 10s^5 + 51s^4 + 134.5s^3 + 164.5s^2 + 18s - 81.$$

Se poate observa că, deşi regulatoarele independente au fost proiectate astfel încât să fie garantată stabilitatea pentru cazul buclelor de reglare decuplate, la apariţia interacţiunii, în modelul procesului apar instabilitate şi degradarea performanţelor.

Din analiza acestui exemplu preluat din [46] se poate constata că ignorarea interacţiunilor la proiectarea regulatoarelor poate genera probleme cu puternic impact asupra performanţelor şi comportării generale a sistemului multivariabil.

În cadrul unei arhitecturi descentralizate de conducere a proceselor multivariabile cu m intrări şi m ieşiri, din cele $m!$ perechi posibile intrare – ieşire pot fi selectate acele perechi ce prezintă interes. Pentru aceasta se poate folosi metoda ariei de amplificare relativă (Relativ Gain Array – RGA) [46].

Astfel, pentru un sistem multivariabil cu matricea de transfer $H_P(s)$ se poate defini RGA sub forma unei matrice cu elementele r_{ij}:

$$r_{ij} = [H_P(0)]_{ij} [H_P^{-1}(0)]_{ji}$$

unde $[H_P(0)]_{ij}$ reprezintă elementul ij din matricea $H_P(0)$ şi, respectiv, elementul ji al inversei matricei $H_P^{-1}(0)$.

Parametrul r_{ij} furnizează o informaţie despre nivelul de sensibilitate al perechii ij intrare-ieşire (intrarea i cu ieşirea j).

Pentru exemplul anterior se poate calcula cu uşurinţă matricea **R**:

$$R = \begin{bmatrix} \frac{1}{1 - K_{12}K_{21}} & -\frac{K_{12}K_{21}}{1 - K_{12}K_{21}} \\ -\frac{K_{12}K_{21}}{1 - K_{12}K_{21}} & \frac{1}{1 - K_{12}K_{21}} \end{bmatrix}.$$

Pentru $K_{12} \in (0,1)$ şi $K_{21} \in (0,1)$ se poate observa că perechile (u_1, y_1) şi (u_2, y_2) sunt dominante. Pentru $K_{12} = -1$ şi $K_{21} = 0.5$ matricea **R** capătă forma:

$$R = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

în schimb pentru $K_{12} = -2$ şi $K_{21} = -1$ se obţine:

$$R = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},$$

ceea ce sugerează a schimba perechile de la (u_1, y_1), (u_2, y_2) la perechile (u_1, y_2) şi (u_2, y_1).

Exemplul 12.3

Se consideră ansamblul alcătuit din patru rezervoare cuplate, a cărui reprezentare schematică este dată în figura 12.14.

Ca intrări în sistem se consideră debitele de fluid Q_1 şi Q_2, iar ca ieşiri nivelul din rezervoarele 1 şi 2.

Admiţând că debitele spre rezervoarele 1 şi 4 se pot ajusta prin supapa S_1 şi debitele spre rezervoarele 2 şi 3, prin supapa S_2, se poate aproxima funcţionarea ansamblului de rezervoare printr-un model de forma:

$$H_P(s) = \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 k_1}{T_1 s + 1} & \frac{(1 - \gamma_2) k_1}{(T_1 s + 1)(T_3 s + 1)} \\ \frac{(1 - \gamma_1) k_2}{(T_2 s + 1)(T_4 s + 1)} & \frac{\gamma_2 k_2}{T_2 s + 1} \end{bmatrix}$$

unde coeficienţii γ_1 şi $1 - \gamma_1$ reprezintă proporţiile de debit de fluid de la pompa 1 care se adaugă în rezervoarele 1 şi 4, iar γ_2 şi $1 - \gamma_2$ reprezintă proporţiile de debit de fluid de la pompa 2, care se adaugă în rezervoarele 2 şi 3. Aceşti coeficienţi ajustabili au valori cuprinse între 0 şi 1, corespunzător poziţiei supapelor S_1 şi S_2.

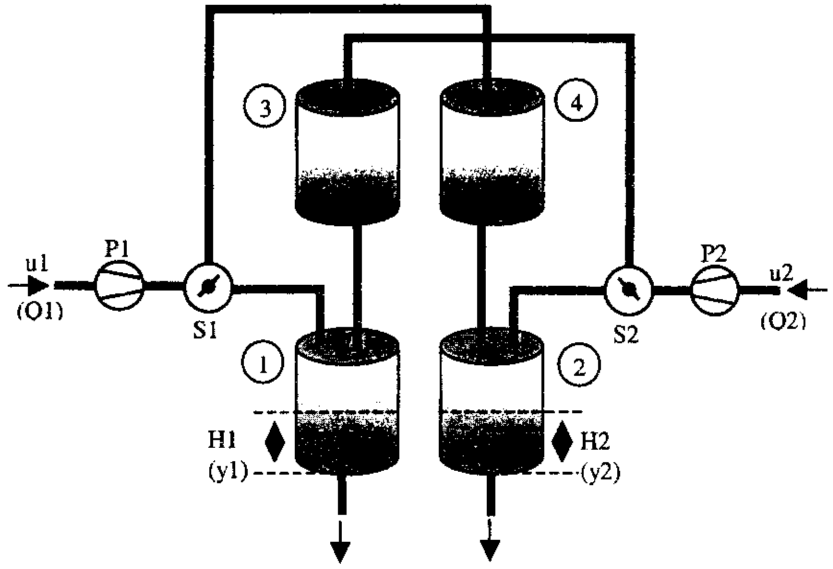


Fig. 12.14

*Pentru acest model, se poate studia efectul coeficienților γ_1 și γ_2 asupra comportării procesului și asupra poziției zerourilor acestuia. Dacă se calculează **R**, se obține:*

$$R = H_P(0)H_P^{-1}(0) = \begin{bmatrix} \gamma_1 k_1 & (1-\gamma_2)k_1 \\ (1-\gamma_1)k_2 & \gamma_2 k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_1 k_1 & (1-\gamma_2)k_1 \\ (1-\gamma_1)k_2 & \gamma_2 k_2 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Dacă admitem că parametrii modelului sunt:

$k_1 = 3$, $k_2 = 4$, $T_1 = 60s$, $T_2 = 90s$, $T_3 = 20s$, $T_4 = 30s$,

se obține:

$$R = \begin{bmatrix} \dfrac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2-1} & -\dfrac{(1-\gamma_1)(1-\gamma_2)}{\gamma_1+\gamma_2-1} \\ -\dfrac{(1-\gamma_1)(1-\gamma_2)}{\gamma_1+\gamma_2-1} & \dfrac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2-1} \end{bmatrix}.$$

Sistemul are două zerouri care satisfac $\det H_P(s) = 0$:

$$\det H_P(s) = \frac{\gamma_1 k_1 \gamma_2 k_2}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)} - \frac{(1-\gamma_1)(1-\gamma_2)k_1 k_2}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)(T_4 s+1)}$$

sau

$$(T_3 s+1)(T_4 s+1) - \frac{(1-\gamma_1)(1-\gamma_2)}{\gamma_1\gamma_2} = 0.$$

Întrucât $\gamma_1 > 0$ și $\gamma_2 > 0$, rezultă că

$$\alpha = \frac{(1-\gamma_1)(1-\gamma_2)}{\gamma_1\gamma_2} > 0.$$

Rezolvând ecuația $\det H_P(s) = 0$ pentru $\alpha > 0$, rezultă cele două zerouri:

$$z_{1,2} = \frac{-(T_3+T_4) \pm \sqrt{(T_3+T_4)^2 - 4T_3T_4(1-\eta)}}{2T_3T_4},$$

cu

$$z_1 = \frac{-(T_3+T_4) - \sqrt{\Delta}}{2T_3T_4}, \ \forall \eta$$

și

$$z_2 = \frac{-(T_3+T_4) + \sqrt{\Delta}}{2T_3T_4},$$

care este în semiplanul stâng pentru $\eta \in (0,1)$ și în semiplanul drept pentru $\eta > 1$.

Condiția $\eta \in (0,1)$ corespunde la $(\gamma_1+\gamma_2) \in (1,2)$, iar condiția $\eta > 1$ corespunde la $(\gamma_1+\gamma_2) \in (0,1)$.

Astfel, dacă $(\gamma_1+\gamma_2) \in (1,2)$ sistemul este de fază minimă. Dacă presupunem, spre exemplu, că $\gamma_1 = 0.8$ și $\gamma_2 = 0.5$, atunci:

$$R = \begin{bmatrix} 1.33 & -0.33 \\ -0.33 & 1.33 \end{bmatrix},$$

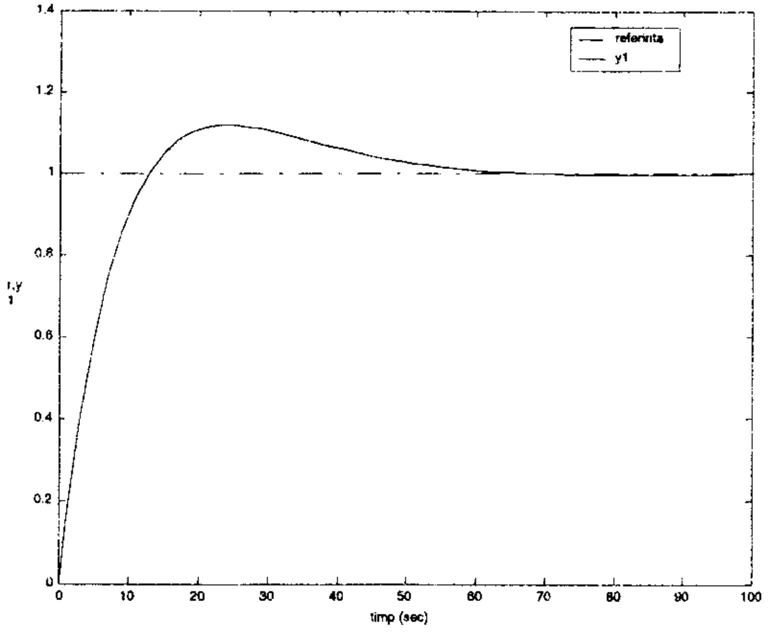
ceea ce sugerează să utilizăm perechile (u_1, y_1) și (u_2, y_2) pentru sinteza unui regulator descentralizat.

În acest caz, recomandăm două regulatoare principale de tip PI:

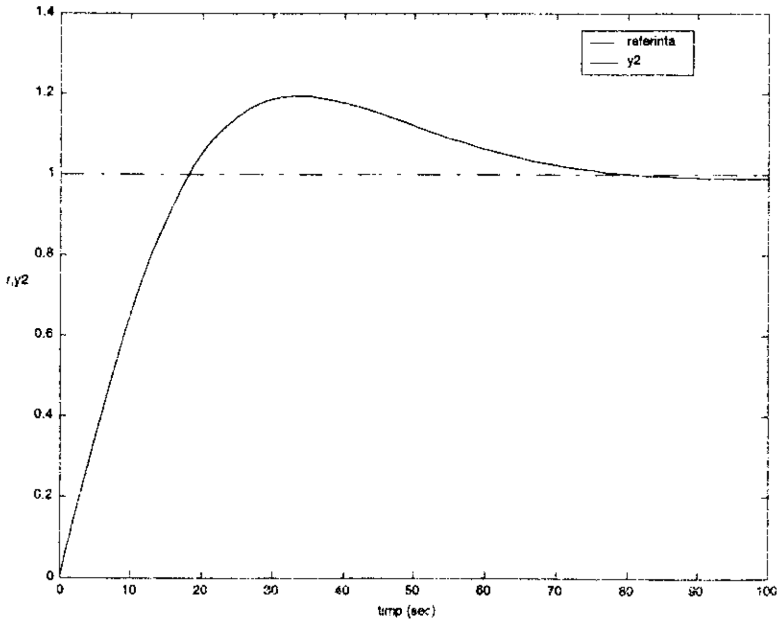
$$H_{R_1}(s) = 4\left(1 + \frac{1}{20s}\right), \quad H_{R_2}(s) = 3\left(1 + \frac{1}{25s}\right).$$

Rezultatul simulării SRA cu aceste blocuri de reglare este prezentat în figura 12.15 a,b.

O altă posibilitate pentru proiectarea SRA multivariabile, apelând la tehnici specifice sistemelor monovariabile, constă în includerea în sistem a unui precompensator care asigură diagonalizarea matricei de transfer.



a)



b)

Fig. 12.15

În figura 12.16 se prezintă structura unui SRA cu precompensator $H_c(s)$.

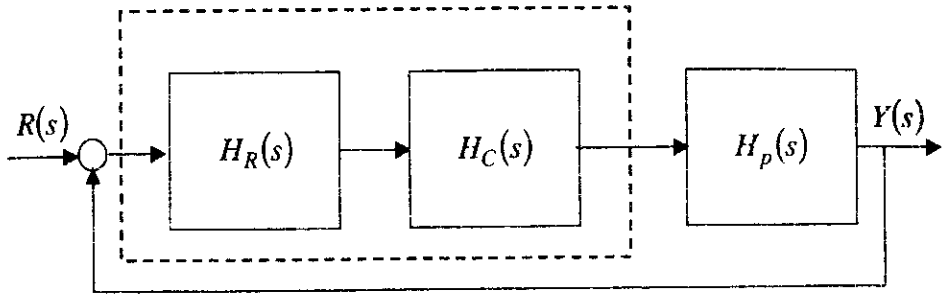


Fig. 12.16

Proiectarea regulatorului (matricea $H_R(s)$) se face având la bază un model modificat:

$$H_p^c(s) = H_p(s) H_c(s) \tag{12.44}$$

Referitor la această procedură, pot fi făcute următoarele remarci:

– o primă încercare pentru $H_c(s)$ poate fi o aproximare a lui $H_p^{-1}(s)$. De exemplu, se poate folosi matricea coeficienţilor matricei de transfer $H_p^{-1}(0)$ ca un precompensator, dacă aceasta există;

– dacă se alege un precompensator dinamic, atunci trebuie evitată compensarea poli-zerouri între precompensator şi modelul original al procesului.

Decuplarea poate fi dinamică şi se obţine o matrice diagonală $H_p^c(s)$, caz în care problema se reduce la mai multe bucle de reglare cu o intrare şi o ieşire.

Dacă matricea $H_p^c(j\omega)$ este diagonală numai într-o bandă finită de frecvenţe, spunem că sistemul este decuplat în aceea bandă. În particular, când $H_p^c(0)$ este diagonală, spunem că sistemul este static decuplat.

Un sistem este triunghiular cuplat atunci când intrările şi ieşirile pot fi ordonate, astfel încât matricea $H_p^c(s)$ este triunghiulară superior sau inferior pentru toţi s.

Cuplarea în acest caz este ierarhică. Pentru cazul triunghiular inferior prima ieşire depinde numai de prima intrare, a doua ieşire depinde numai de prima şi a doua intrare, şi, în general, ieşirea k depinde numai de primele k intrări. Asemenea sisteme sunt relativ uşor de controlat prin regulatoare

monovariabile combinate cu acţiunea feedforward (directă) pentru a compensa interacţiunile.

O altă modalitate pentru proiectarea regulatoarelor multivariabile constă în decuplarea sistemului, adică selectarea acelui regulator care asigură matricei $H_0^c(s) \equiv T(s)$ forma diagonală.

Astfel, punem condiţia ca matricea $H_d(s)$ să fie diagonală:

$$H_d(s) = [I - T(s)]^{-1} T(s) = \begin{bmatrix} H_{d_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & H_{d_2} & \vdots \\ 0 & \cdots & H_{d_m} \end{bmatrix}. \qquad (12.45)$$

Pentru exemplificare, considerăm cazul unor matrice (2×2):

$$H_p(s) = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \qquad (12.46)$$

şi

$$H_R(s) = \begin{bmatrix} H_{R_{11}} & H_{R_{12}} \\ H_{R_{21}} & H_{R_{22}} \end{bmatrix} \qquad (12.47)$$

Dacă impunem sistemului pe calea directă o comportare caracterizată prin:

$$H_d(s) = \begin{bmatrix} H_{d_1} & 0 \\ 0 & H_{d_2} \end{bmatrix},$$

se pot deduce blocurile de reglare $H_{R_{ij}}$ care asigură o comportare decuplată:

$$\begin{bmatrix} H_{11}H_{R_{11}} + H_{12}H_{R_{21}} & H_{11}HR_{12} + H_{12}H_{R_{22}} \\ H_{21}H_{R_{11}} + H_{22}H_{R_{21}} & H_{21}H_{R_{12}} + H_{22}H_{R_{22}} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} H_{d_1} & 0 \\ 0 & H_{d_2} \end{bmatrix}. \qquad (12.48)$$

Un rezultat similar se obţine dacă regulatorul se calculează cu relaţia:

$$H_R = H_p^{-1}(s) \cdot H_d(s) = \frac{adj\, H_p}{det\, H_p} \cdot \begin{bmatrix} H_{d_1} & 0 \\ 0 & H_{d_2} \end{bmatrix} \qquad (12.49)$$

sau

$$H_R = \frac{1}{det\, H_p} \cdot \begin{bmatrix} H_{22} & -H_{21} \\ -H_{12} & H_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_{d_1} & 0 \\ 0 & H_{d_2} \end{bmatrix}.$$

Funcţiile de transfer $H_{R_{11}}$ şi $H_{R_{22}}$ au forma:

$$H_{R_{11}} = \frac{H_{d_1}}{H_{11}} \cdot \frac{1}{1-K(s)} \quad ; \quad H_{R_{22}} = \frac{H_{d_2}}{H_{22}} \cdot \frac{1}{1-K(s)}$$

$$H_{R_{21}} = -\frac{H_{d_1}}{H_{11}} \cdot \frac{H_{12}}{H_{22}} \cdot \frac{1}{1-K(s)}$$
$$H_{R_{12}} = -\frac{H_{d_2}}{H_{22}} \cdot \frac{H_{21}}{H_{11}} \cdot \frac{1}{1-K(s)}. \qquad (12.50)$$

Astfel, cele două blocuri de reglare $H_{R_{12}}(s)$ şi $H_{R_{21}}(s)$ asigură compensarea interacţiunii între canale.

De observat faptul că structura blocurilor de reglare este influenţată de factorul de cuplare dinamică $K(s)$, de funcţiile de transfer $H_{d_1}(s)$ şi $H_{d_2}(s)$ şi, evident, de forma matricei $H_p(s)$.

În cazul în care apar probleme de realizabilitate a algoritmilor de reglare, trebuie schimbat $H_d(s)$.

Pot fi analizate diverse combinaţii de modele pentru proces şi regulator (P – P; P – V; V – P) (exerciţii pentru cititor).

Exemplul 12.4:

Se consideră:

$$H_p(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.5}{s+1} & \frac{0.2}{s+0.2} \\ -\frac{0.1}{s+0.1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}.$$

Se cere proiectarea regulatorului multivariabil care asigură decuplarea celor două canale şi asigură o comportare identică, pe cele două canale principale, caracterizată printr-un răspuns aperiodic cu o constantă de timp $T_{01} = T_{02} = 0.5s$.

În aceste condiţii, matricea de transfer $H_0(s)$ ataşată sistemului închis este de forma:

$$H_0(s) \equiv T(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{0.5s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{0.5s+1} \end{bmatrix}.$$

Ţinând seama că SRA se proiectează astfel încât cele două canale principale să fie decuplate, rezultă:

$$H_d(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s} & 0 \\ 0 & \frac{2}{s} \end{bmatrix}.$$

Apelând la relațiile (12.50), se obțin cele patru blocuri de reglare:

$$H_{R_{11}} = \frac{\frac{2}{s}}{\frac{0.5}{s+1}} \cdot \frac{1}{1+\frac{2(s+1)^2}{(10s+1)(5s+1)}}$$

sau

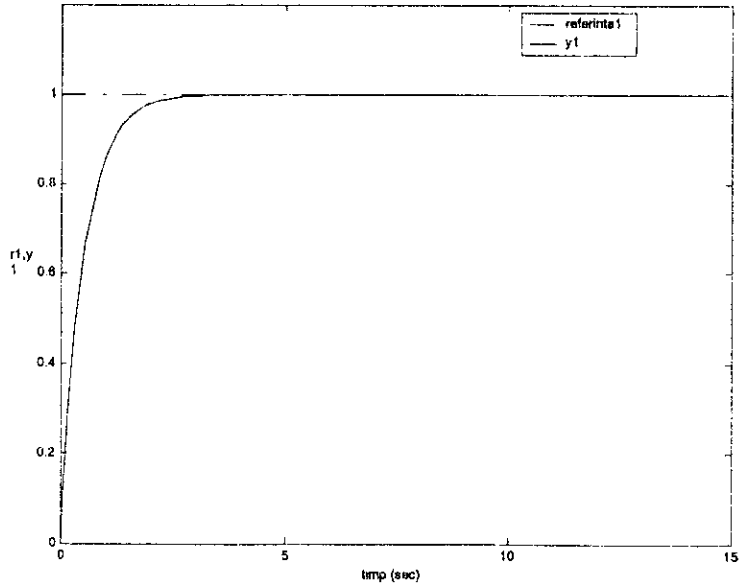
$$H_{R_{11}} = \frac{4(s+1)(10s+1)(5s+1)}{s\left[(10s+1)(5s+1)+2(s+1)^2\right]}$$

$$H_{R_{22}} = \frac{\frac{2}{s}}{\frac{1}{s+1}} \cdot \frac{1}{1+\frac{2(s+1)^2}{(10s+1)(5s+1)}} = \frac{2(s+1)(10s+1)(5s+1)}{s\left[(10s+1)(5s+1)\ 2(s+1)^2\right]}$$

$$H_{R_{21}} = -H_{R_{11}} \cdot \frac{H_{12}}{H_{22}} = -H_{R_{11}} \frac{\frac{0.2}{s+0.2}}{\frac{1}{s+1}} = -H_{R_{11}} \cdot \frac{s+1}{5s+1}$$

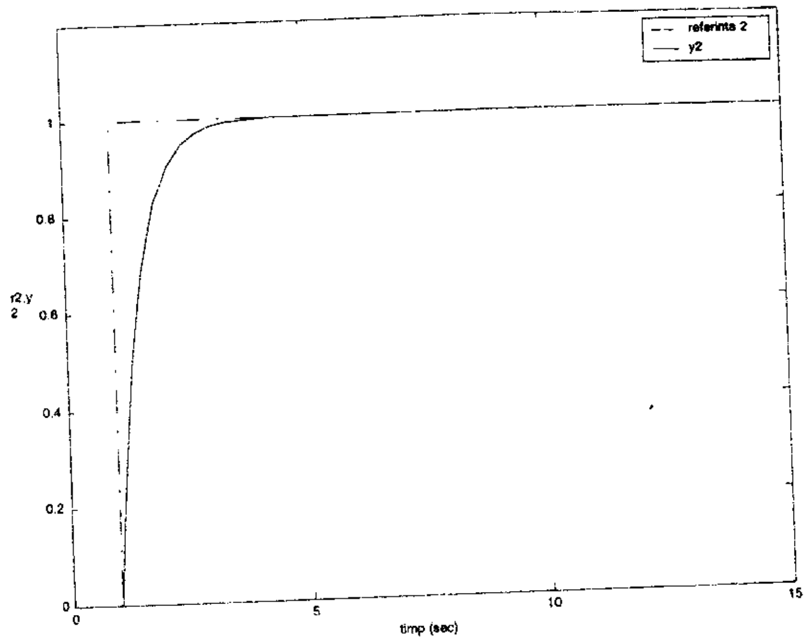
$$H_{R_{21}} = -H_{R_{22}} \cdot \frac{H_{21}}{H_{11}} = -H_{R_{11}} \frac{\frac{0.2}{s+0.2}}{\frac{1}{s+1}} = -H_{R_{22}}\ .2\ \frac{s+1}{10s+1}$$

Rezultatele simulării pentru referință treaptă unitară aplicată celor două bucle la momentele $t=0$, respectiv $t=1$, sunt prezentate în figura 12.17a,b.



a)

Fig. 12.17



b)

Fig. 12.17 *(continuare).*

De remarcat faptul că, prin proiectarea regulatorului prin decuplarea celor două canale, se obțin funcții de transfer care nu se încadrează în structurile standard de tip PID.

12.3. Proiectarea sistemelor multivariabile apelând la tehnici de control optimal

Considerăm modelul nominal al procesului cu m intrări și p ieșiri:

$$\dot{x} = Ax + Bu(t), \quad u = Cx(t); \quad x_0 \in R^n,$$

unde $x(t) \in R^n$, $u \in R^m$ și $y \in R^p$, iar matricele A, B și C au dimensiuni corespunzătoare.

Presupunem că starea inițială x_0 trebuie adusă la cea mai mică valoare posibilă în intervalul de timp (t_0, t_f), cu un efort minim de comandă. Astfel, problema reglării optimale se definește ca o problemă de

obţinere a comenzii $u(t)$ pe intervalul (t_0, t_f), ce asigură ca următoarea funcţie obiectiv (o funcţie cost) să fie minimizată:

$$J(x_0,t_0) = \int_{t_0}^{t_f} \left(x^T Q x + u^T R u\right) dt + x_f^T Q_f x_f , \qquad (12.51)$$

unde $Q \in R^{nxn}$ şi $Q_f \in R^{nxn}$ sunt matrice simetrice semipozitiv definite şi $R \in R^{mxm}$ este o matrice simetrică pozitiv definită.

Pentru rezolvarea acestei probleme stabilim mai întâi relaţia între problema generală de optimizare şi problema reglării liniar pătratice.

Astfel, dacă folosim relaţiile:

$$f(x,u,t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad (12.52)$$

$$V(x,u,t) = x^T Q x + u^T R u \qquad (12.53)$$

$$g(x(t_f)) \equiv g(xf) = x_f^T Q_f x_f , \qquad (12.54)$$

putem defini funcţia:

$$W(x,u,t) \overset{\Delta}{=} V(x,u,t) + \left[\frac{\partial J^0(x,t)}{\partial x}\right]^T f(x,u,t) = x^T Q x + u^T R u + + \left[\frac{\partial J^0(x,t)}{\partial x}\right]^T (Ax + Bu), \qquad (12.55)$$

unde

$$J^0(x,t) = \min_{\substack{u(\tau) \\ \tau \in [t,t_f]}} \left\{ \int_t^{t_f} V(x,u,\zeta)\, d\zeta + g(x_f) \right\} \qquad (12.56)$$

reprezintă costul optimal în intervalul (t,t_f) cu starea iniţială x_0.

Astfel, pentru a obţine comanda optimală u^0, conform principiului optimalităţii [46], trebuie să minimizăm $W(x,u,t)$. Aceasta se obţine prin anularea gradientului lui $W(x,u,t)$ în raport cu comanda u:

$$\frac{\partial W}{\partial u} = 2Ru + B^T \frac{\partial J^0(x,t)}{\partial x} = 0 \qquad (12.57)$$

Din (12.57) rezultă comanda optimală $u^0(t)$:

$$u^0(t) = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T \frac{\partial J^0(x,t)}{\partial x}. \qquad (12.58)$$

De observat că Hessianul lui W în raport cu u este egal cu R care prin aproximarea iniţială, este o matrice pozitiv definită. Aceasta confirmă că (12.58) asigură minimul lui W.

Notăm în cele ce urmează că $J^0\left(x^0(t_f),t_f\right) = \left[x_f^0\right]^T Q_f x_f^0$, unde x_f^0 reprezintă starea finală optimală. Aceasta este o funcţie pătratică de starea finală x_f. Se poate arăta, prin inducţie, că acesta este adevărat la orice moment de timp, conform principiului optimalităţii al lui Bellman [46, 88].

Presupunem că funcţia obiectiv optimală are forma:

$$J^0(x,t) = x^T P x \text{ cu } P(t) = [P(t)]^T , \qquad (12.59)$$

iar gradientul acestuia în raport cu x este:

$$\frac{\partial J^0(x,t)}{\partial x} = 2P(t)\ x(t) \qquad (12.60)$$

şi

$$\frac{\partial J^0(x,t)}{\partial t} = x^T \dot{P}(t)\ x(t). \qquad (12.61)$$

Dacă introducem (12.60) în (12.58) obţinem comanda optimală:

$$u^0(t) = -F(t)\ x(t), \qquad (12.62)$$

unde

$$F(t) = R^{-1} B^T P(t) \qquad (12.63)$$

reprezintă matricea de comandă după stare, variantă în timp.

Din (12.55), după înlocuirea comenzii optimale, obţinem:

$$W(x,u^0,t) = x^T \left[Q - P(t) B R^{-1} B^T P(t) + 2P(t)A\right]\ x(t). \qquad (12.64)$$

Pentru a calcula matricea $F(t)$, trebuie mai întâi a obţine $P(t)$, care poate fi uşor determinată dacă introducem (12.61) şi (12.64) în ecuaţia:

$$-\frac{\partial J^0(x,t)}{\partial t} = V(x,u^0,t) + \left[\frac{\partial J^0(x,t)}{\partial t}\right]^T f(x,u^0,t),$$

care conduce la:

$$-x^T \dot{P}(t) x(t) = x^T \left[Q - P(t) B R^{-1} B^T P(t) + 2P(t)A\right] x. \qquad (12.65)$$

Notăm, de asemenea, că $2x^T PAx = x^T (PA + A^T P) x$.

Pentru ca (12.65) să fie satisfăcută pentru toate stările $x(t)$, trebuie ca:

$$-\dot{P}(t) = Q - P(t) B R^{-1} B^T P(t) + P(t) A + A^T P(t) \qquad (12.66)$$

Ecuaţia (12.66) este cunoscută ca Ecuaţia Riccati în timp continuu. Această ecuaţie poate fi rezolvată în timp invers pentru a satisface condiţiile limită (12.54) şi (12.59). De remarcat faptul că $P(t_f) = Q_f$.

Rezultatele de mai sus pot fi extinse şi la sistemele variante în timp, adică la sistemele caracterizate prin A, B, Q şi R variabile în timp.

Desigur, rezolvarea problemei de control optimal presupune apriori satisfăcute unele cerinţe. Cele mai importante cerinţe se referă la controlabilitatea şi observabilitatea perechilor (A, B), respectiv (C, A).

O cerinţă suplimentară în conexiune cu funcţia cost este ca perechea $(Q^{1/2}, A)$ să fie detectabilă [46].

Îndeplinirea acestor cerinţe asigură existenţa soluţiei asimptotice pentru ecuaţia Riccati, P_a, când $t_f \to \infty$.

Această soluţie asimptotică se obţine din (12.65) cu $\frac{dP}{dt} = 0$.

Când este folosită această valoare staţionară pentru calculul legii de conducere optimală, sistemul în buclă închisă este stabil.

Matricea sistemului cu reacţie după stare este:

$$A_0 = A - BF = A - BR^{-1}B^T P_a \tag{12.67}$$

şi are toate valorile proprii în semiplanul stâng.

Pentru ca legea de comandă după stare să fie utilizată, se impune estimarea stării sistemului condus pe baza informaţiilor disponibile $u(t)$ şi $y(t)$.

Rezultatele prezentate în capitolul 7 pot fi extinse la sistemele multivariabile. Estimatorul de stare se proiectează pentru perechea (C, A) luând în consideraţie o problemă echivalentă de control pentru perechea (A, B). Astfel, se consideră sistemul dual cu $A' = A^T$ şi $B' = C^T$.

Pentru sistemul dual (A', B') se proiectează matricea de comandă $F' \in R^{pxn}$, astfel încât $A' - B'F'$ să aibă valorile proprii în regiunea de stabilitate. Prin urmare, dacă alegem $L = (F')^T$, matricea $(A - LC)$ are valorile proprii în interiorul regiunii de stabilitate.

Estimatorul de stare, în aceste condiţii, este caracterizat prin ecuaţiile:

$$\begin{aligned} &\dot{\hat{x}} = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad ; \hat{x}_0 \in R^n \\ &\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{aligned} \tag{12.68}$$

Cu starea estimată $\hat{x}(t)$, legea de conducere optimală capătă forma:

$$\begin{aligned} &u^0(t) = -F \ \hat{x}(t) \\ &\dot{\hat{x}}(t) = (A - LC) \ \hat{x}(t) + B \ u^0(t) + Ly(t). \end{aligned} \tag{12.69}$$

În cazul general, când se estimează atât starea procesului $\hat{x}(t)$, cât şi perturbaţia $\hat{v}(t)$, legea de conducere poate fi compusă astfel încât, pe lângă cerinţele de stabilizare a procesului, să se asigure eroarea staţionară pentru referinţă şi perturbaţii constante.

Legea de conducere optimală se obţine, astfel, sub forma:

$$\begin{aligned} &u^0(t) = -F_1\hat{x}(t) - F_2\hat{v}(t) + z(t) \\ &z(t) = \int_{t_0}^{t_f} \varepsilon(\tau) \ d\tau \\ &\varepsilon(t) = r(t) - y(t) \end{aligned} \tag{12.70}$$

unde $z(t)$ reprezintă vectorul ieşire din integratoarele plasate pe calea directă în sistemul de conducere.

În figura 12.18 se prezintă structura sistemului de conducere cu reacţie după stare şi estimator de stare.

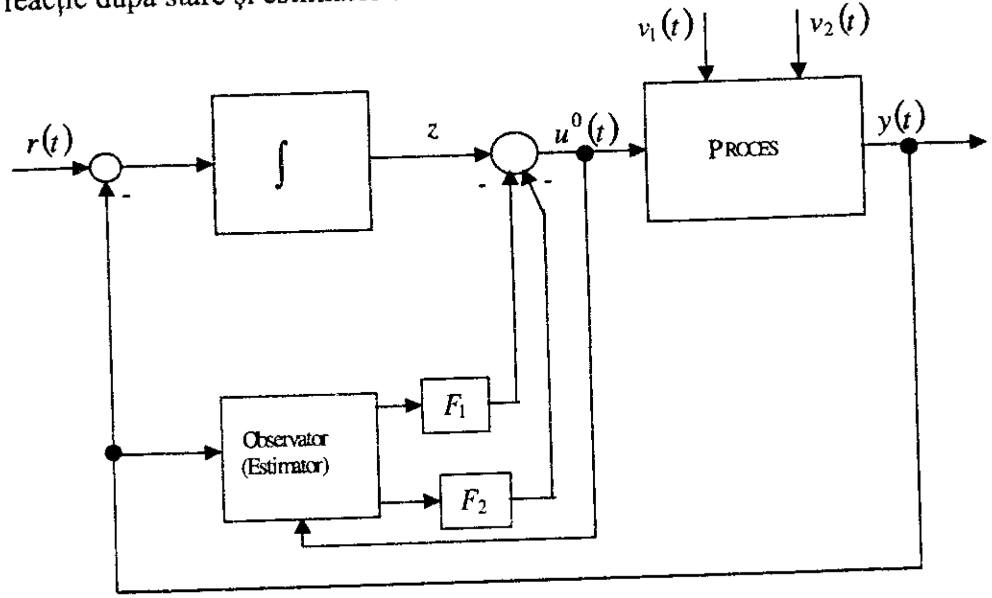


Fig. 12.18

Pentru modele discrete ale proceselor multivariabile, rezultatele se extind cu uşurinţă, inclusiv în prezenţa perturbaţiilor stocastice (vezi § 7.5).

În multe cazuri practice, întâlnim procese cu număr diferit de intrări şi ieşiri. Astfel, pot fi întâlnite procese cu $m > p$, deci cu exces de intrări sau $m < p$, deci exces de ieşiri.

Pentru situaţia în care $m > p$, având mai multe grade de libertate la intrare, este posibil a controla mai multe variabile, chiar dacă acestea nu trebuie măsurate. O strategie posibilă este de a folosi un estimator pentru a estima variabilele omise şi, în consecinţă, regulatorul poate fi proiectat pentru un sistem de dimensiuni $m \times m$.

O altă situaţie foarte des întâlnită în practică este aceea unde p intrări sunt selectate ca variabile primare de comandă, iar restul care rămân, $(m-p)$ intrări, sunt în relaţii fixate în raport cu primele p intrări.

Spre exemplu, în instalaţiile de ardere, debitul de combustibil este variabila primară, iar debitul de aer necesar arderii se află într-o relaţie bine definită cu variabila primară.

În cazul în care $p > m$, nu pot fi controlate toate ieşirile independent, la toate momentele de timp.

Deşi toate măsurătorile ar putea fi folosite pentru obţinerea stării estimate, numai m cantităţi pot fi controlate independent.

Astfel, deşi orice parte a regulatorului ce depinde de reacţia după starea estimată ar putea folosi întregul set de măsurători, totuşi acţiunile asupra procesului vor fi numai o submulţime de m variabile.

O altă strategie este de a defini importanţa relativă a intrărilor prin folosirea unui indicator corespunzător de performanţă. Spre exemplu se poate folosi un criteriu pătratic cu diferite ponderi pentru diferite intrări. De remarcat că nu pentru toate buclele se realizează eroare staţionară egală cu zero.

Sistemele multivariabile sunt supuse unor specificaţii de proiectare pentru asigurarea decuplării dorite.

Decuplarea este legată în timp şi în frecvenţă de direcţionalitate.

De remarcat că cele mai eficiente metode de proiectare a regulatoarelor multivariabile sunt: metoda decuplării triunghiulare şi metoda decuplării dinamice.

PROBLEME

12.1. Se consideră un proces cu două intrări şi două ieşiri caracterizat prin:

$$H_p(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{0.1}{0.2s+1} \\ 0 & \\ \frac{0.2}{0.1s+1} & \frac{0.5}{s+0.5} \end{bmatrix}.$$

Se cere:

a) O structură de SRA care să asigure decuplarea ieşirilor.

b) Algoritmi de reglare care asigură pentru referinţă treaptă unitară răspuns indicial aperiodic pentru fiecare canal intrare-ieşire cu durata regimului tranzitoriu $t_t \le 2\sec$.

12.2. Se consideră procesul caracterizat prin:

$$H_p(s)=\frac{1}{(s+1)^2}\begin{bmatrix} s-2 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Se cere să se proiecteze un regulator care asigură eroare staţionară nulă la referinţe treaptă unitară şi o bandă de frecvenţă $\omega_B = 0.5[rad/\sec]$ pentru ambele canale.

12.3. Se consideră procesul caracterizat prin:

$$H_p(s)=\frac{1}{(s+4)(s+5)}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0.5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Să se sintetizeze un regulator multivariabil, astfel ca polii dominanţi ai SRA să fie rădăcinile ecuaţiei $s^2+13s+100=0$.

12. 4. Se consideră procesul cu modelul nominal:

$$H_p(s)=\begin{bmatrix} \frac{2}{s^2+3s+2} & 0 \\ \frac{0.5}{(s+2)(\beta s+1)} & \frac{6}{s^2+5s+6} \end{bmatrix}.$$

Se cere:

a) Să se proiecteze regulatorul multivariabil considerând sistemul decuplat.

b) Să se evalueze performanţele SRA pe ambele canale pentru $\beta=0.2$ şi $\beta=-0.2$.

12. 5. Se consideră procesul al cărui model nominal este:

$$H_p(s)=\begin{bmatrix} \frac{5}{s^2+5s+5} & \frac{0.5}{s+5} \\ \frac{\beta}{s+4} & \frac{4(s+1)}{s^2+4s+4} \end{bmatrix}.$$

Se cere:

a) Pentru $\beta=-2$ să se construiască un precompensator pentru a realiza decuplarea;

b) Să se proiecteze regulatoare PID pentru procesul decuplat şi să se evalueze performanţele;

c) Să se efectueze aceleaşi calcule pentru $\beta=2$.

13. SISTEME INTELIGENTE DE CONDUCERE

13.1. Introducere

Dificultățile majore în caracterizarea matematică riguroasă a comportării proceselor tehnologice complexe au impus în ultimii 20 de ani noi tehnologii neconvenționale în conducerea proceselor. Astfel, apelând la concepte din domeniul inteligenței artificiale au fost create sisteme de conducere bazate pe cunoștințe (SBK), sisteme expert de conducere în timp real (SETR) cu largă aplicabilitate în automatizarea unor procese cu informație apriorică redusă [24]. Teoria mulțimilor fuzzy a permis dezvoltarea unor regulatoare, sisteme de conducere fuzzy cu un impact deosebit în reglarea (conducerea) unor procese neliniare cu modele matematice incerte. Evoluția acestor regulatoare, corelată cu evoluția tehnologiei de implementare a condus la sfârșitul mileniului al doilea la o explozie de aplicații a acestora, atât în varianta simplă, cât mai ales în varianta unor structuri avansate de regulatoare fuzzy adaptive și optimale [23]. O a treia tehnologie neconvențională de conducere ce s-a impus în ultimii 20 de ani are la bază procesarea neurală artificială. Astfel, au fost dezvoltate arhitecturi de sisteme de conducere bazate pe rețele neurale artificiale (RNA) cu largă aplicabilitate în modelarea și conducerea proceselor neliniare [33]. O evoluție semnificativă au cunoscut în ultimii 10 ani tehnicile evoluționiste, în particular algoritmii genetici (AG), care, fie în varianta individuală, fie în varianta hibridă cu celelalte tehnologii neconvenționale, au permis rezolvarea unor probleme complexe de optimizare sau conducere optimală [29]. Termenul de „sistem inteligent", deși pretențios și chiar exagerat, are un substrat real și un suport consistent ținând seama de rezultatele cercetărilor în domeniul modelării comportamentului creierului uman și al inteligenței moleculare. Preocuparea specialiștilor pentru a crea sisteme de conducere automată cu ridicată autonomie a impulsionat cercetarea și dezvoltarea sistemelor cu un grad mai

înalt sau mai redus de inteligență. Autonomia presupune inteligență și, în consecință, realizarea sistemelor de conducere autonome presupune implementarea unor tehnici de conducere inteligentă.

Crearea mașinilor inteligente a reprezentat o continuă provocare pentru specialiștii în automatică și informatică, iar robotica cognitivă reprezintă doar o latură a acestei provocări. Sistemele inteligente de conducere reprezintă un subdomeniu al vastului câmp de cercetare al mașinilor inteligente. Evoluția sistemelor de conducere de la structuri convenționale și algoritmi proiectați pe baza modelelor matematice ale proceselor la sisteme inteligente ce integrează tehnici euristice, sisteme expert, rețele neurale, tehnici fuzzy și tehnici evoluționiste de procesare a informației și cunoștințelor reprezintă o cale naturală ținând seama de stadiul atins în domeniul micro și nanotehnologiei. Mecanismele adaptării și învățării dezvoltate și aplicate încă din anii 1960–1970, au fost extinse cu noi atribute ale sistemelor de conducere, preluate din sistemele biologice: *percepție, raționament, analiză de valoare (judecată), comunicare, generare de comportamente etc*, creându-se premisele dezvoltării unor sisteme de conducere autonome. Modelarea sistemelor inteligente cu aplicabilitate în domeniul roboților inteligenți [2, 25, 47] a impulsionat cercetările în domeniul sistemelor inteligente de conducere.

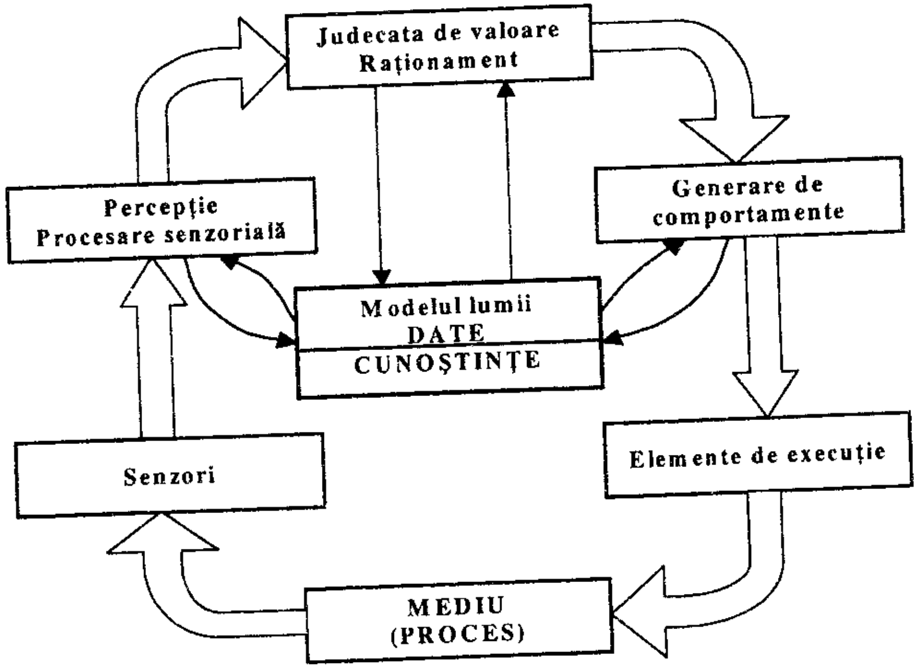


Fig. 13.1

13. SISTEME INTELIGENTE DE CONDUCERE

13.1. Introducere

Dificultăţile majore în caracterizarea matematică riguroasă a comportării proceselor tehnologice complexe au impus în ultimii 20 de ani noi tehnologii neconvenţionale în conducerea proceselor. Astfel, apelând la concepte din domeniul inteligenţei artificiale au fost create sisteme de conducere bazate pe cunoştinţe (SBK), sisteme expert de conducere în timp real (SETR) cu largă aplicabilitate în automatizarea unor procese cu informaţie apriorică redusă [24]. Teoria mulţimilor fuzzy a permis dezvoltarea unor regulatoare, sisteme de conducere fuzzy cu un impact deosebit în reglarea (conducerea) unor procese neliniare cu modele matematice incerte. Evoluţia acestor regulatoare, corelată cu evoluţia tehnologiei de implementare a condus la sfârşitul mileniului al doilea la o explozie de aplicaţii a acestora, atât în varianta simplă, cât mai ales în varianta unor structuri avansate de regulatoare fuzzy adaptive şi optimale [23]. O a treia tehnologie neconvenţională de conducere ce s-a impus în ultimii 20 de ani are la bază procesarea neurală artificială. Astfel, au fost dezvoltate arhitecturi de sisteme de conducere bazate pe reţele neurale artificiale (RNA) cu largă aplicabilitate în modelarea şi conducerea proceselor neliniare [33]. O evoluţie semnificativă au cunoscut în ultimii 10 ani tehnicile evoluţioniste, în particular algoritmii genetici (AG), care, fie în varianta individuală, fie în varianta hibridă cu celelalte tehnologii neconvenţionale, au permis rezolvarea unor probleme complexe de optimizare sau conducere optimală [29]. Termenul de „sistem inteligent", deşi pretenţios şi chiar exagerat, are un substrat real şi un suport consistent ţinând seama de rezultatele cercetărilor în domeniul modelării comportamentului creierului uman şi al inteligenţei moleculare. Preocuparea specialiştilor pentru a crea sisteme de conducere automată cu ridicată autonomie a impulsionat cercetarea şi dezvoltarea sistemelor cu un grad mai

înalt sau mai redus de inteligenţă. Autonomia presupune inteligenţă şi, în consecinţă, realizarea sistemelor de conducere autonome presupune implementarea unor tehnici de conducere inteligentă.

Crearea maşinilor inteligente a reprezentat o continuă provocare pentru specialiştii în automatică şi informatică, iar robotica cognitivă reprezintă doar o latură a acestei provocări. Sistemele inteligente de conducere reprezintă un subdomeniu al vastului câmp de cercetare al maşinilor inteligente. Evoluţia sistemelor de conducere de la structuri convenţionale şi algoritmi proiectaţi pe baza modelelor matematice ale proceselor la sisteme inteligente ce integrează tehnici euristice, sisteme expert, reţele neurale, tehnici fuzzy şi tehnici evoluţioniste de procesare a informaţiei şi cunoştinţelor reprezintă o cale naturală ţinând seama de stadiul atins în domeniul micro şi nanotehnologiei. Mecanismele adaptării şi învăţării dezvoltate şi aplicate încă din anii 1960–1970, au fost extinse cu noi atribute ale sistemelor de conducere, preluate din sistemele biologice: *percepţie, raţionament, analiză de valoare (judecată), comunicare, generare de comportamente etc*, creându-se premisele dezvoltării unor sisteme de conducere autonome. Modelarea sistemelor inteligente cu aplicabilitate în domeniul roboţilor inteligenţi [2, 25, 47] a impulsionat cercetările în domeniul sistemelor inteligente de conducere.

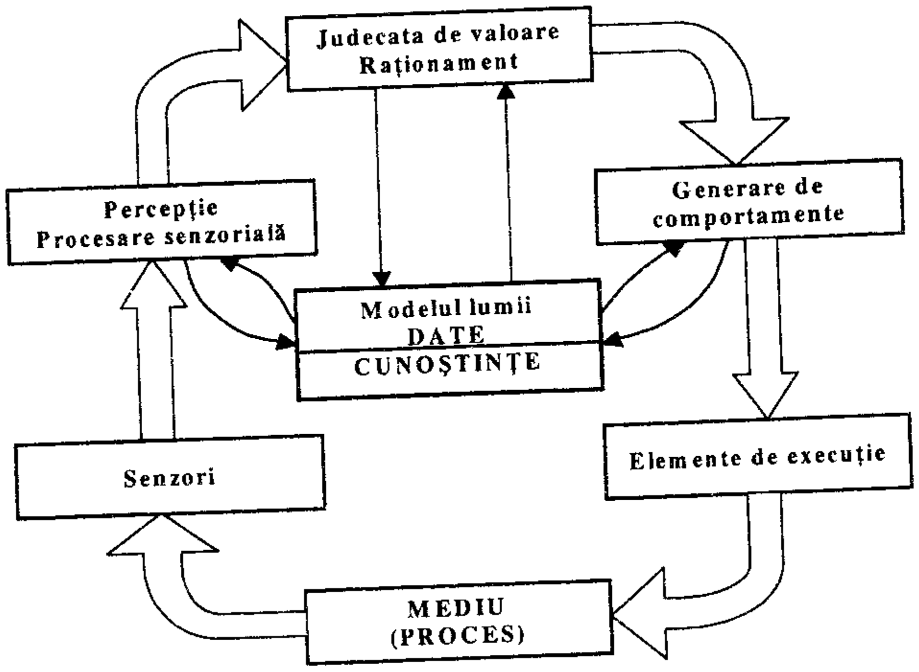


Fig. 13.1

Un model simplificat al unui sistem inteligent cu evidențierea celor patru funcții esențiale: *percepție, învățare, raționament* și *generare de comportamente* este prezentat în figura 13.1 [2].

O asemenea reprezentare simplificată a unui sistem inteligent evidențiază, pe de o parte, interacțiunea cu mediul prin intermediul senzorilor distribuiți și a elementelor de execuție, iar pe de altă parte, capacitatea de procesare senzorială a informațiilor, de memorare (învățare) și planificare (generare) a acțiunilor. Un asemenea model simplificat preia elemente specifice din domeniul inteligenței umane, reprezentând o încercare de modelare a inteligenței naturale. Desigur, a crea un sistem inteligent de conducere cu atributele unui sistem inteligent natural este, cel puțin pentru acest moment, foarte dificil, însă nu trebuie abandonată ideea, chiar dacă nu poate fi realizat pe baza cunoștințelor actuale.

Pentru a dezvolta sisteme inteligente de conducere vom apela la rezultatele obținute în diferite domenii cum sunt: inteligența artificială, știința calculatoarelor, matematică, psihologie și filozofie, științele naturii și, desigur, în domeniul ingineriei și al teoriei conducerii, integrându-le într-o concepție unitară de sistem de conducere cu ridicată autonomie.

Desigur, există diferite niveluri și tipuri de inteligență și în consecință regulatoarele, în funcție de complexitatea funcțiilor implementate, pot avea diferite niveluri de inteligență. Apare în mod firesc întrebarea referitoare la tipul și nivelul de inteligență al unui regulator care să-i confere calitatea (sau să fie considerat) de regulator inteligent.

O altă abordare a conceptului de sistem de conducere inteligentă se referă la înțelegerea mecanismelor inteligenței umane, a sistemelor biologice de a realiza sarcini, cu scopul de a obține idei cum pot fi rezolvate probleme dificile și, în consecință, de a proiecta asemenea sisteme tehnice capabile să rezolve problemele la același nivel de competență ca sistemele biologice cele mai performante.

O metodologie de conducere este inteligentă dacă folosește tehnici și proceduri specifice sistemelor biologice (forme de reprezentare și generare de comportamente) pentru a dezvolta sau implementa un regulator pentru conducerea unui proces dinamic.

Pornind de la această definiție cele patru metodologii de conducere bazate pe: *sisteme expert, tehnici fuzzy, rețele neurale* și *algoritmi genetici* pot fi considerate metodologii inteligente. Astfel, metodologia de conducere fuzzy include utilizarea mulțimilor fuzzy și logica fuzzy pentru reprezentarea bazată pe reguli a cunoștințelor umane despre cum se conduce un proces, inferența fuzzy pentru modelarea proceselor deductive umane și procesoare convenționale sau procesoare fuzzy pentru implementare. Alte metodologii de conducere inteligentă includ conducerea bazată pe cunoștințe, care include un sistem expert bazat pe reguli, conducerea prin învățare, utilizarea sistemelor de planificare pentru comandă, controlul neural și algoritmi genetici pentru rezolvarea problemelor de conducere inclusiv conducerea adaptivă și optimală.

Multe metodologii inteligente de conducere rezultă din sinteza mai multor metodologii convenționale și inteligente, fiind astfel generate Sisteme Inteligente Hibride (SIH).

Astfel, un regulator inteligent (sistem inteligent de conducere) este dezvoltat sau implementat cu o metodologie inteligentă sau/și tehnici de conducere ce emulează funcții care în mod normal sunt realizate de ființe umane sau sisteme biologice. Pornind de la această definiție putem vorbi despre regulatorul fuzzy ca despre un regulator inteligent cu un anumit nivel de inteligență. De asemenea, putem să spunem că regulatoarele ce integrează tehnici de învățare, tehnici neurale, algoritmi genetici sunt regulatoare inteligente cu un anumit nivel și un anume tip de inteligență.

Vom denumi sisteme inteligente de conducere (regulatoare inteligente) inclusiv sistemele ce emulează funcții specifice sistemelor inteligente naturale.

Indiferent de definițiile adoptate pentru regulatoare inteligente, acestea caracterizează în mică măsură funcțiile complexe ale sistemelor inteligente naturale. Totuși, proiectarea regulatoarelor inteligente are la bază cerința de a emula cât mai exact funcții specifice ființei umane pentru rezolvarea de probleme dificile, de a realiza o cât mai ridicată autonomie în raport cu mediul și cerințele rezolvării de probleme.

Sistemele de conducere inteligentă cu un înalt grad de autonomie pot funcționa bine în prezența unor incertitudini semnificative ale procesului și ale mediului pentru perioade extinse de timp, putând compensa defectele ce apar fără intervenții externe.

13.2. Sisteme inteligente autonome

Arhitectura funcțională a unui sistem autonom este prezentată în figura 13.2. Organizat pe trei niveluri ierarhice, sistemul inteligent autonom asigură interfața cu procesul prin intermediul elementelor sensibile și a elementelor de execuție și interfața cu operatorul uman și cu alte sisteme.

Nivelul executiv preia funcțiile de bază ale conducerii numerice directe, apelând la algoritmi PID convenționali, algoritmi de conducere adaptivă, estimare de parametri, algoritmi de conducere optimală și algoritmi de identificare a defectelor. Nivelul de coordonare integrează

funcţiile de acordare a algoritmilor de la nivelul executiv, de planificare şi de învăţare, de supervizare şi coordonare, respectiv de identificare a defectelor şi de reproiectare on-line a strategiei de conducere ori de reconfigurare dinamică.

Ultimul nivel, nivelul strategic, supervizează cele două niveluri prin luarea unor decizii simbolice şi monitorizează performanţele. La acest nivel se implementează funcţii specifice pentru planificare şi învăţare, funcţii pentru generarea obiectivelor şi a strategiilor de conducere optimală. Acest nivel strategic coordonează nivelul tactic şi executiv.

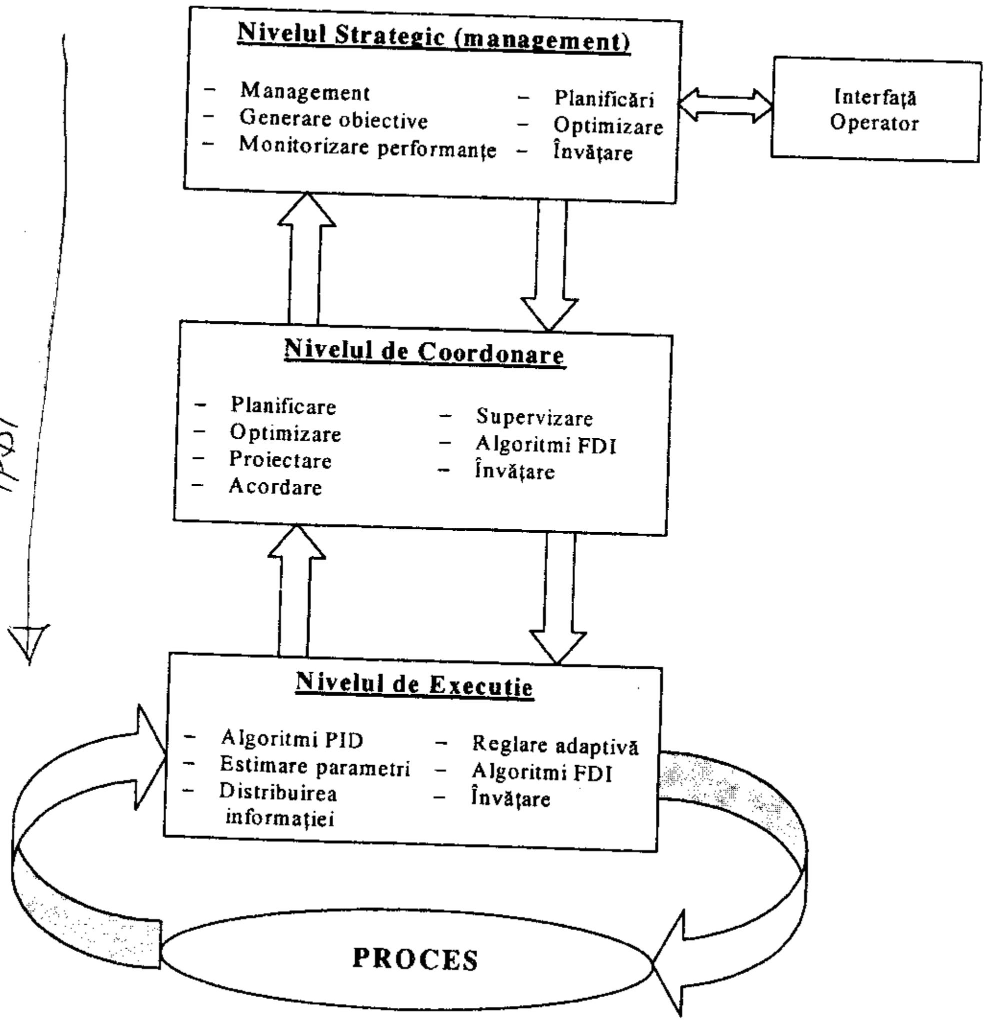


Fig. 13.2

De remarcat faptul că pentru fiecare nivel sunt integrate funcţii ce conferă arhitecturii un anumit nivel de inteligenţă, distribuit ierarhic pe cele trei paliere: *executiv, tactic* şi *strategic*.

Interacţiunea şi schimbul de date şi cunoştinţe între cele trei niveluri este totală, iar complexitatea funcţiilor implementate creşte odată cu depărtarea de proces. Astfel, se poate cu uşurinţă evidenţia că la nivelul executiv precizia este foarte ridicată, pe când gradul de inteligenţă este mai redus. În cadrul nivelului de coordonare sunt integrate funcţii de învăţare, de planificare, reconfigurare dinamică, acordare şi supervizare, ce presupun o creştere a gradului de inteligenţă şi o reducere a preciziei. În sfârşit, ultimul nivel, care integrează cele mai multe funcţii specifice unui sistem inteligent cu procesare de cunoştinţe şi reprezentări simbolice pentru luarea deciziilor, are gradul cel mai înalt de inteligenţă, realizând în acelaşi timp şi comunicarea cu operatorul uman. La acest nivel, procesarea simbolică (lingvistică) este predominantă, iar precizia este mult mai redusă decât la nivelul executiv, unde procesarea este numerică.

Putem vorbi de o arhitectură funcţională în cadrul căreia gradul de inteligenţă creşte cu scăderea preciziei de-a lungul celor trei niveluri ierarhice. Se evidenţiază principiul: *creşterea inteligenţei şi descreşterea preciziei* şi invers (Increasing Precision and Decreasing Intelligence) în cadrul unei arhitecturi ierarhizate pe trei niveluri [2].

Diferitele funcţii specifice sistemelor inteligente de conducere sunt realizate apelând la metodologiile inteligente deja menţionate. Dacă la primul nivel de execuţie pot fi incluse metodologiile fuzzy şi reţelele neurale pentru reglare, identificare şi conducere adaptivă, inclusiv reglare fuzzy adaptivă, la nivelul strategic includem toate cele patru metodologii fie individual, fie în formă hibridă (geno-fuzzy, neuro-fuzzy sau geno-neuro-fuzzy). De menţionat că, pentru conducerea proceselor complexe, se integrează atât metodologiile inteligente, în special în forma lor hibridă, cât şi tehnicile convenţionale de conducere de tip algoritmic. Aceasta şi datorită faptului că realizarea unui grad înalt de autonomie necesită un ridicat nivel de inteligenţă, care incorporează mai multe şi diverse proceduri pentru luarea deciziilor şi raţionament. Proiectarea unui sistem de conducere autonom reprezintă un obiectiv, iar inteligenţa reprezintă un mijloc prin care se realizează acest obiectiv.

Pentru arhitectura multinivel de sistem inteligent autonom se poate remarca şi faptul că scala de timp este diferită pentru fiecare nivel, iar granularitatea modelelor folosite se modifică în cadrul ierarhiei conducând la o creştere a abstractizării pentru nivelul strategic.

Pornind de la cerinţa ca un sistem de conducere să fie autonom, se poate formula problema de sinteză într-o manieră sistemică:

Dându-se un proces complex (*P*), neliniar cu multiple incertitudini, se cere a se găsi acea arhitectură de sistem de conducere (*C*), astfel încât să se realizeze o comportare autonomă specificată prin (*T*) (fig. 13.3).

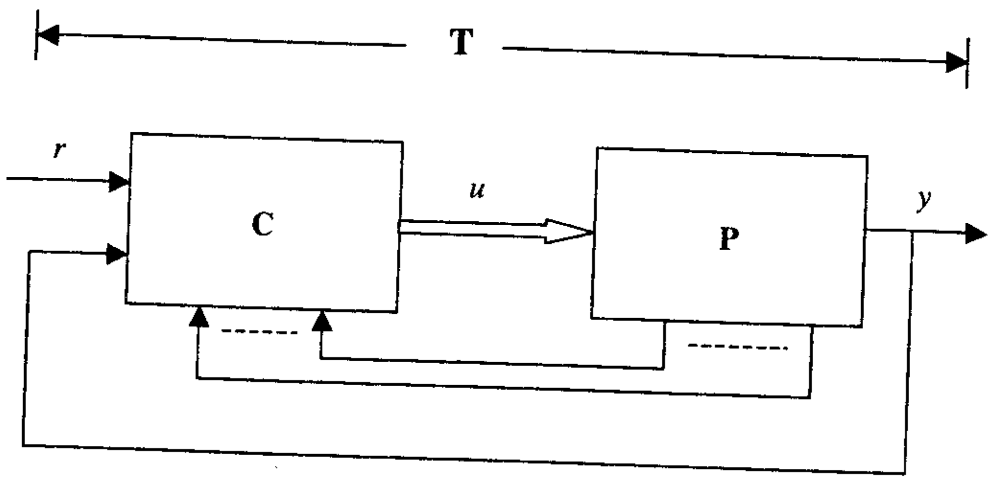


Fig. 13.3

Rezolvarea unei asemenea probleme presupune utilizarea, atât a metodelor formale de sinteză a legii de conducere pe baza modelelor matematice, cât şi a metodologiilor inteligente de conducere.

Pentru a exemplifica modul de realizare a autonomiei unui sistem de conducere apelând, atât la modele matematice, cât şi la metodologii de conducere inteligente, se consideră arhitectura de sistem de conducere din figura 13.4 [2, 47].

În această configuraţie se evidenţiază utilizarea unor modele pentru caracterizarea procesului şi învăţarea şi memorarea acestora într-o bază de cunoştinţe ce defineşte comportamentul procesului şi în mod corespunzător utilizarea unor algoritmi de conducere selectaţi din baza de cunoştinţe în funcţie de comportamentul dorit al procesului, respectiv al întregului sistem de conducere. Obiectivele conducerii sunt selectate în strânsă corelaţie cu autonomia impusă întregului sistem, acestea fiind memorate în baza de cunoştinţe ce conţine cerinţele de comportament global ale întregului sistem.

În această structură se evidenţiază funcţiile clasice cum sunt: identificare, generare de decizii, acordare, care sunt implementate apelând la tehnici de *învăţare*, de *generare de comportamente*, de *planificare*, de *percepţie* şi *reconfigurare dinamică* specifice sistemelor inteligente. Baza de cunoştinţe conţine modele ale procesului, modele ale strategiilor de

conducere şi obiectivele conducerii. Clasa modelelor poate fi extinsă cu modele pentru planificare, modele pentru diagnoză, modele operaţionale, modele de reparare. Toate aceste modele pot fi selectate în funcţie de cerinţele de funcţionare ale întregului sistem apelând la proceduri de reconfigurare dinamică.

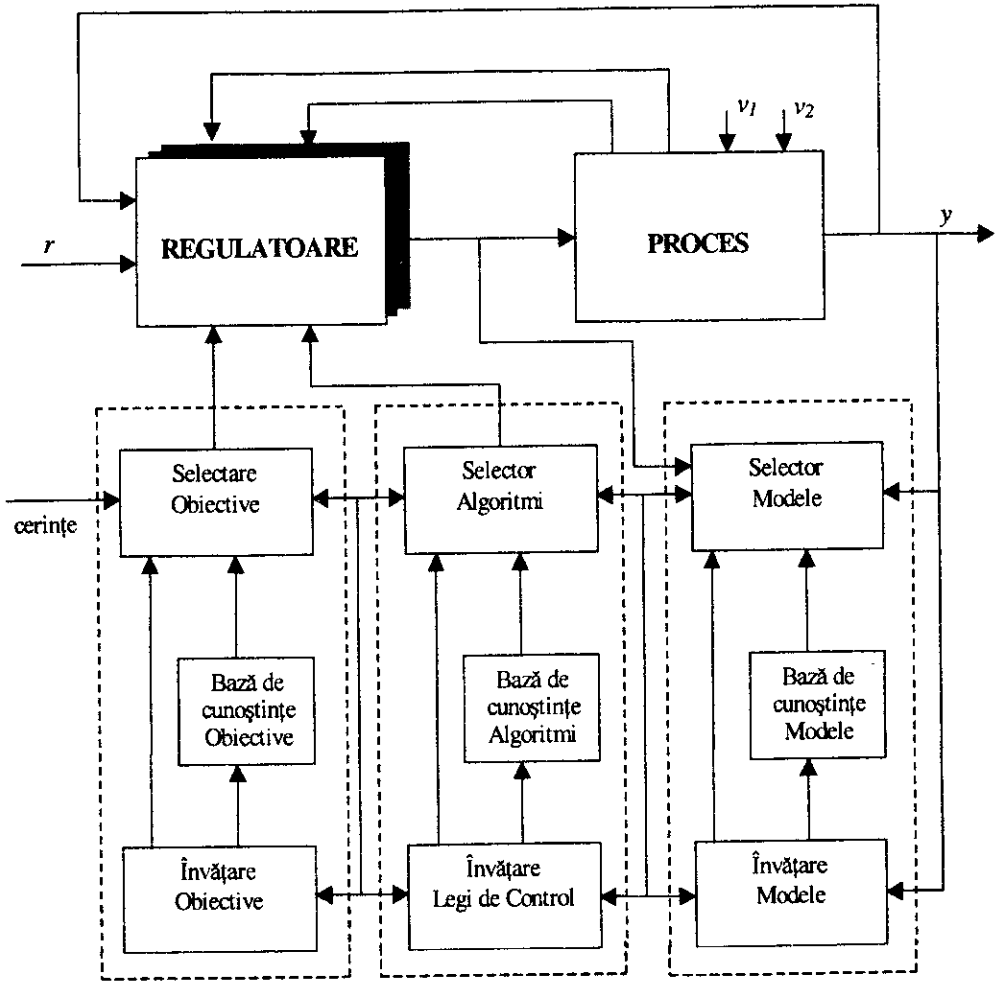


Fig. 13.4

Astfel, sistemele inteligente de conducere au abilitatea de autoorganizare şi de funcţionare cu toleranţă totală la defecte.

În funcţie de complexitatea proceselor şi de obiectivele conducerii pot fi proiectate şi implementate sisteme de conducere cu diferite grade de autonomie. Nivelul de inteligenţă incorporată într-un sistem conferă acestuia un grad mai redus sau mai ridicat de autonomie.

Sistemele de conducere autonome incorporează tehnici convenţionale sau avansate de conducere în strânsă interacţiune cu metodologii inteligente, cum sunt: tehnicile fuzzy, tehnicile neurale, evoluţioniste şi, desigur, reprezentările simbolice specifice inteligenţei artificiale.

În cadrul unui sistem autonom de conducere se pot evidenţia diferite niveluri de abstractizare, respectiv diferite niveluri de precizie în realizarea unor taskuri specifice inteligenţei umane cum ar fi: *Generalizarea* (G), *Focalizarea Atenţiei* (FA) şi *Căutarea Combinatorială* (CC) [2]. Orice activitate inteligentă poate fi conectată cu ansamblul de funcţii menţionate.

Astfel, sistemele inteligente de conducere asigură procesarea informaţiilor şi cunoştinţelor în structuri *heterorarhice* şi *ierarhice* multi-rezoluţie, incluzând funcţii specifice de percepţie (P), reprezentare a cunoştinţelor (K) şi elaborare de decizii (ED).

Cel mai redus nivel de abstractizare într-un sistem ierarhic, care este nivelul în cadrul căruia se asigură cel mai ridicat nivel al preciziei, trimite ieşirile sale la elementele de execuţie generând o acţiune A_1. O activitate la acest nivel poate fi reprezentată prin relaţia [2]:

$$(P;\,K;\,ED)_1 \rightarrow A_1\,. \qquad (13.1)$$

Pentru al doilea nivel de abstractizare, folosind acelaşi raţionament, se poate scrie relaţia:

$$(P;\,K;\,ED)_2 \rightarrow A_2 \Leftrightarrow (P;\,K;\,ED)_2 \rightarrow \left[(P;\,K;\,ED)_1 \rightarrow A_1\right]. \qquad (13.2)$$

În cazul general, se poate scrie relaţia:

$$(P;\,K;\,ED)_n \rightarrow A_n \Leftrightarrow (P;\,K;\,ED)_n \rightarrow \left[(P;\,K;\,ED)_{n-1} \rightarrow A_{n-1}\right], \qquad (13.3)$$

care evidenţiază faptul că fiecare nivel de abstractizare presupune realizarea unor funcţii de *percepţie, învăţare* şi *generare de acţiuni,* apelând la mecanisme specifice *generalizării, focalizării atenţiei* şi *căutării combinatoriale*. Într-o asemenea ierarhizare a funcţiilor, regulatoarele fuzzy asigură generalizarea şi focalizarea atenţiei, reţelele neurale pot realiza toate cele trei funcţii (G, FA, CC), iar algoritmii genetici asigură căutarea combinatorială, optimizarea valorilor entropiei la diferite niveluri.

Fiecare strat (P; K; ED) poate fi considerat metodologic ca un set de proceduri de generalizare, focalizare a atenţiei şi căutare combinatorială.

Dacă se consideră un proces conectat prin senzori (S) şi elemente de execuţie (EE) la un sistem decizional, se obţine arhitectura simplă din figura 13.5.

Funcţiile specifice percepţiei senzoriale (P), reprezentării cunoştinţelor (K), învăţării şi elaborării deciziilor (ED) (planificării comenzii) sunt integrate într-un sistem multi-rezoluţie cu organizare heterorarhică. O asemenea reprezentare presupune o căutare centralizată sau descentralizată în cadrul spaţiului stărilor apelând la funcţiile G, FA şi CC.

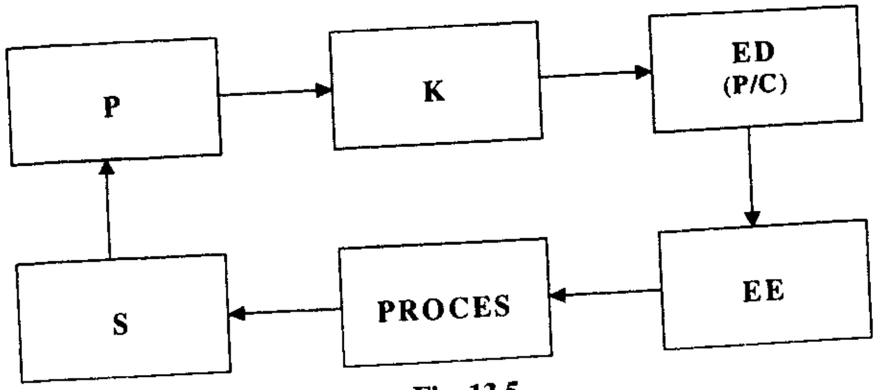


Fig. 13.5

Pentru studiul sistemelor inteligente de conducere pot fi utilizate mai multe metode şi diverse categorii de modele ce includ modelele pentru studiul sistemelor dinamice cu evenimente discrete, studiul sistemelor hibride şi modele ce includ agenţi inteligenţi hibrizi [2, 61, 49].

În cele ce urmează, sunt prezentate elemente introductive privind cele patru metodologii inteligente, evidenţiindu-se particularităţile şi sinergismul natural al acestora.

13.3. Sisteme bazate pe cunoştinţe (Sisteme Expert)

13.3.1. Introducere

Ca ramură a inteligenţei artificiale, sistemele bazate pe cunoştinţe au cunoscut o continuă evoluţie, iar domeniile de aplicabilitate s-au extins, de la domeniul medical, financiar, la domeniul fabricaţiei şi la conducerea în timp real a proceselor. Sistemul expert (SE) este un program care operează asupra cunoştinţelor şi generează rezultate similare cu rezultatele obţinute de experţii umani.

Astfel, un sistem expert are în componenţă o bază de cunoştinţe şi un mecanism de căutare şi prelucrare a cunoştinţelor pentru a obţine o soluţie la o problemă rezolvabilă de unul sau mai mulţi experţi umani.

Sistemele expert operează cu cunoştinţe despre un subiect sau dintr-un domeniu, acumulate într-o bază de cunoştinţe şi astfel structurate, încât să poată fi procesate.

Cunoştinţele în cadrul sistemelor expert pot fi fie expertize sau cunoştinţe disponibile din cărţi, reviste sau de la persoane care posedă aceste

cunoştinţe (experţi umani). Termenele *„Sisteme Expert"*, *„Sisteme Bazate Pe Cunoştinţe"* sau *„Sisteme Expert Bazate Pe Cunoştinţe"* sunt adesea folosite sinonim. Cea mai simplă schemă a unui SE este prezentată în figura 13.6.

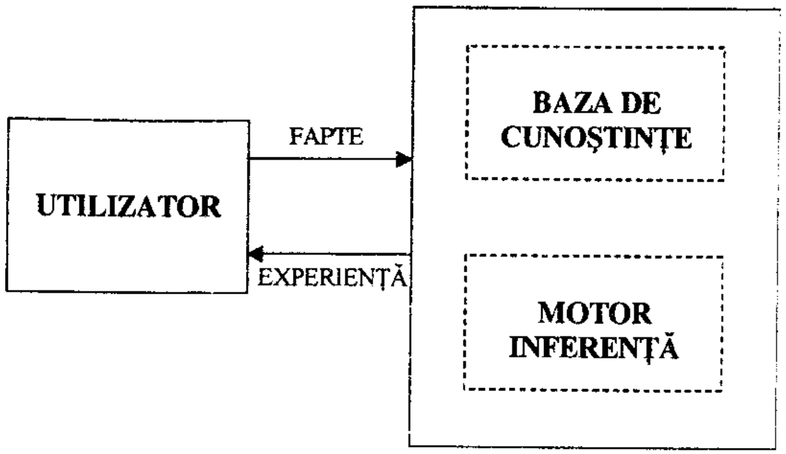


Fig. 13.6

Sistemele bazate pe cunoştinţe au fost iniţial proiectate să acţioneze ca un asistent inteligent al expertului uman. Putem aprecia că evoluţia conceptuală şi aplicativă a inteligenţei artificiale, corelată cu progresele din domeniul ingineriei calculatoarelor, hardware şi software, a permis dezvoltarea unor sisteme expert performante cu aplicaţii practice în toate domeniile de activitate. Conducerea în timp real a proceselor tehnologice reprezintă un domeniu pentru care sistemele expert au evoluat semnificativ în ultimii 15 ani [18], acoperind, atât problematica supervizării conducerii proceselor complexe, cât şi problematica conducerii directe, apelând la reprezentări simbolice a comportării proceselor şi a regulatoarelor.

Cunoştinţele pot fi clasificate în: *cunoştinţe procedurale, cunoştinţe declarative* şi *cunoştinţe tacite.*

Cunoştinţele procedurale se referă la acele cunoştinţe care arată cum se pot rezolva probleme, iar cunoştinţele declarative se referă la acelea care arată că ceva este adevărat sau fals. Cunoştinţele tacite sunt acelea care nu pot fi exprimate prin limbaj (reţele neurale).

Cunoaşterea poate fi definită ca o reflectare activă în conştiinţă a lumii reale, a esenţialului şi a generalului din fenomene. Pot fi evidenţiate distinct *cunoaşterea reflexivă,* bazată pe reflectarea exterioară a faptului ştiinţific şi *cunoaşterea generativă,* bazată pe crearea de noi obiecte abstracte.

Cunoaşterea este *empirică* dacă informaţiile despre obiecte, fapte, fenomene, procese este sesizată de subiect prin organele sale senzoriale sau prin intermediul unor aparate sau instrumente.

Cunoaşterea este *teoretică* dacă se desfăşoară după raţionamente şi judecăţi care reflectă legăturile interne, cauzalitatea, legităţile după care se dezvoltă structurile şi se desfăşoară procesele. Ea se dezvoltă prin analiză, sinteză, deducţie, inducţie, generalizare, particularizare, luând în consideraţie şi cunoaşterea empirică [18, 61].

Există o multitudine de tehnici de reprezentare a cunoştinţelor. Acestea includ: *reguli, reţele semantice, cadre, limbaje de reprezentare a cunoştinţelor, grafuri conceptuale* şi altele.

Cea mai răspândită metodă de reprezentare a cunoştinţelor în cadrul sistemelor expert este metoda bazată pe reguli.

Metoda bazată pe reguli de producţie asigură separarea componentelor obişnuite ale calculului, în scopul manipulării uşoare în procesele la care sunt utilizate.

Sistemul construit în jurul regulilor de producţie se bazează pe separarea celor două părţi ale regulilor: *premiză* şi *acţiune*:

$$\langle partea\ \ de\ \ premiz\breve{a}\rangle \rightarrow \langle partea\ \ de\ \ ac\c{t}iune\rangle$$

$$\langle condi\c{t}ie\rangle \rightarrow \langle ac\c{t}iune\rangle$$

Astfel, un sistem de producţie este compus dintr-o bază de date şi un set de reguli. Condiţiile unei reguli pot fi considerate ca o bază de date, iar concluzia unei reguli este o acţiune care manipulează date din baza de date şi, în plus, un control al sistemului determină secvenţa regulilor utilizate.

Dacă notăm cu D baza de date şi cu R setul finit de reguli, atunci un sistem de producţie P poate fi considerat un dublet $P=(D,R)$. Baza de date este constituită dintr-un set de termeni, iar o regulă are forma generală:

$IF\ \underline{c}\ THEN\ \underline{a}$,

în care condiţia c este constituită din termeni, paranteze, conective $\wedge$, $\vee$, $\neg$, iar acţiunea a este formată dintr-un singur termen şi reprezintă o concluzie.

Structura generală a unei reguli de producţie este următoarea:

$$\langle partea\ \ condi\c{t}ie\rangle \rightarrow \langle partea\ \ ac\c{t}iune\rangle$$

sau

IF $\langle partea\ \ condi\c{t}ie\rangle$ este îndeplinită
THEN se execută $\langle partea\ \ ac\c{t}iune\rangle$.

Mecanismul regulilor de producţie este preluat din teoria limbajelor formale, este de natură procedurală şi este poate cel mai apropiat de modul de realizare a programelor clasice. Însăşi structura regulii de tipul:

IF – THEN – ELSE

este una dintre structurile de control întâlnite în toate limbajele de nivel înalt.

Mecanismul interpretativ al regulilor de producţie conţine următoarele etape:

– selectarea tuturor regulilor care conţin piesa de cunoaştere ce satisface partea de condiţie numită şi *corespondenţă*;

– rezolvarea conflictelor prin care se elimină regulile care conduc la acelaşi rezultat şi selectarea regulii care va fi efectiv aplicată;

– execuţia părţii acţiune a regulii cu cea mai mare prioritate, în situaţia în care sunt producţii aplicabile;

– pornind de la contextul modificat în urma aplicării regulilor anterioare se reia ciclul începând cu faza de corespondenţă, atâta timp cât ciclul produce acţiuni materializate prin modificarea contextului.

Oprirea mecanismului interpretativ poate avea loc dacă acţiunea unei producţii specifică concret oprirea, sau se selectează o producţie vidă.

Forma cea mai generală a unei reguli de producţie cu mai multe condiţii şi mai multe acţiuni este:

$$r = (c_1 \wedge c_2 \wedge c_3 \wedge \cdots \wedge c_k) \rightarrow (a_1, a_2, \cdots, a_n),$$

în care c_j, $j \in (1,k)$ sunt condiţiile şi a_k, $k \in (1,n)$ sunt acţiunile.

13.3.2. Arhitecturi de sisteme expert

Pornind de la definiţia dată de Ed Feigenbaum sistemelor expert [18, 61]: – „Un sistem expert este un program de calculator, inteligent, care foloseşte cunoştinţe şi proceduri de inferenţă pentru a rezolva probleme care sunt suficient de dificile pentru a necesita expertiză umană semnificativă în soluţionarea lor" – se poate alcătui arhitectura unui SE ca în figura 13.5. Sistemul expert (SE) emulează abilitatea de a lua decizii ale unui expert sau a mai multor experţi umani. Sistemele expert pot fi caracterizate ca o nouă modalitate de programare declarativă; programele se scriu ca un ansamblu de specificaţii independente unele de altele, numite şi elemente de cunoaştere, ce sunt legate între ele dinamic, printr-o procedură de inferenţă.

Principalele caracteristici ale sistemului expert sunt:

- *Disponibilitate crescută*: Expertiza se poate găsi pe orice calculator cu performanţe corespunzătoare;

- *Costuri reduse*;
- *Operare* cu pericol redus în medii ce pot fi dificile şi periculoase pentru expertul uman;
- *Permanenţă*: cunoştinţele SE sunt perene după dispariţia experţilor;
- *Expertiză multiplă*: Cunoştinţele de la mai mulţi experţi pot fi preluate şi integrate pentru rezolvarea de probleme;
- *Siguranţă ridicată în funcţionare*;
- *Capacitatea de a explica* modul de obţinere a concluziei. Aceasta creşte încrederea că a fost dată decizia corectă;
- *Viteza de răspuns* mai ridicată decât a unui expert uman;
- *Răspuns complet, neemoţional* la toate momentele de timp.

Procesul de dezvoltare a unui sistem expert are un beneficiu indirect deoarece cunoştinţele experţilor umani trebuie organizate într-o formă explicită pentru a fi introduse în calculator şi astfel pot fi examinate din punct de vedere al corectitudinii, consistenţei şi completitudinii.

Structura generală a unui SE este prezentată în figura 13.7 şi are în componenţă: baza de cunoştinţe, baza de date, mecanismul de inferenţă, modulul explicativ, interfaţa cu utilizatorul şi interfaţa cu expertul (inginerul de cunoştinţe).

Baza de cunoştinţe conţine ansamblul cunoştinţelor specializate introduse de expertul uman, utile pentru rezolvarea unei probleme. Într-un sistem bazat pe reguli, cunoştinţele sunt reprezentate sub forma unor reguli.

Cunoştinţele stocate în baza de cunoştinţe sunt în principal descrieri de obiecte în conjuncţie cu relaţiile dintre acestea. Fiecare regulă specifică o relaţie, o recomandare, o directivă, o strategie cu o structură de tipul: IF <condiţie> THEN <acţiune>.

Baza de date conţine fapte utilizate în cadrul regulilor.

Mecanismul de inferenţă realizează inferenţe (raţionamente) prin decizii asupra regulilor care sunt satisfăcute prin fapte, ordonează regulile în funcţie de priorităţi şi execută regulile cu cele mai mari priorităţi.

Mecanismul explicativ permite utilizatorului să ceară SE explicaţii asupra unor concluzii particulare şi asupra necesităţii unor fapte specifice cerute de o anumită concluzie. Un SE trebuie să dispună de capacitatea de a explica modul de raţionament şi să justifice avizul pentru condiţie şi concluzie.

Interfaţa cu utilizatorul asigură comunicarea utilizatorului care caută soluţii la probleme şi SE capabil să dea un răspuns.

Interfaţa cu expertul (inginerul de cunoştinţe) facilitează achiziţia de cunoştinţe, organizarea şi depanarea bazei de cunoştinţe.

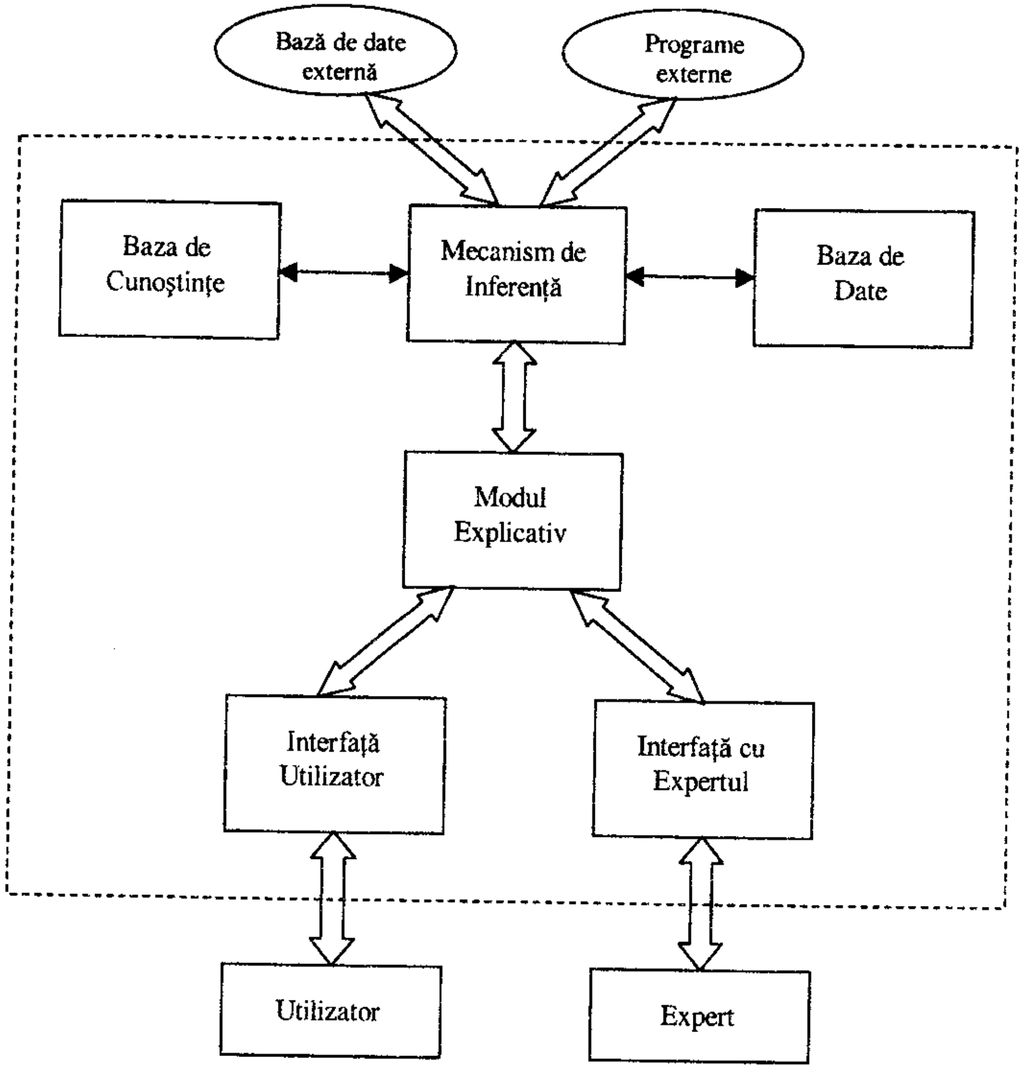


Fig. 13.7

Interfaţa externă permite SE să lucreze cu fişiere de date externe şi programe scrise în limbaje de programare convenţionale. O asemenea interfaţă asigură funcţionarea inclusiv în timp real dacă sunt achiziţionate date din proces şi sunt transmise comenzi la elementele de execuţie.

Sistemele expert folosesc *raţionamentul simbolic* când rezolvă probleme, întrucât foloseşte simboluri pentru reprezentarea diferitelor tipuri de cunoştinţe (fapte, concepte, reguli). Spre deosebire de programele convenţionale, care procesează date numerice, SE sunt construite pentru procesarea cunoştinţelor şi pot astfel opera cu date calitative. Programele

convenţionale prelucrează date pe baza unor algoritmi şi cu paşi bine definiţi şi generează soluţii exacte la probleme.

Sistemele expert nu urmăresc o secvenţă prescrisă de paşi şi permit raţionamente inexacte putând opera cu date incomplete, incerte şi fuzzy. Separarea cunoştinţelor de mecanismul de procesare într-un SE asigură acestuia flexibilitate şi uşurinţă în dezvoltare. Adăugarea sau extragerea unor cunoştinţe într-un SE asigură acestuia capacitatea de adaptare la cerinţele de rezolvare a problemelor dintr-un domeniu specificat.

Baza de cunoştinţe a unui SE bazat pe reguli constă din două părţi:

- fapte sau predicate care reprezintă cunoştinţe declarative despre problemele care trebuie rezolvate;
- reguli care specifică acţiuni ce trebuie întreprinse în cazul unor situaţii date. Asupra acestor reguli operează mecanismul de inferenţă.

Starea unei baze de cunoştinţe la un moment de timp dat reprezintă valoarea tuturor predicatelor.

Dacă notăm prin p_i, cu $i=\overline{1,n}$, predicatele care pot fi adevărate, false sau necunoscute, vectorul de stare x ce caracterizează baza de cunoştinţe este definit ca: $x:=[p_1,p_2,\cdots,p_n]$. Astfel, spaţiul stărilor bazei de cunoştinţe conţine toate stările ce pot fi atinse dintr-o stare iniţială prin orice secvenţă de acţiuni ce includ stările iniţială şi finală.

Regulile constau dintr-o *condiţie* sau *premiză*, care testează valoarea logică a unei mulţimi de fapte la fiecare etapă în procesul de raţionament, urmată de o *acţiune* sau *consecinţă*, care evidenţiază un rezultat când regulile sunt activate. Atât condiţia, cât şi consecinţa pot fi reprezentate sub forma unor conjuncţii sau disjuncţii de fapte.

Dacă o regulă se defineşte în funcţie de n predicate (condiţii) şi are o singură consecinţă (acţiune):

$$(r_i):(p_{i_1}\wedge p_{i_2}\wedge\cdots\wedge p_{i_n})\rightarrow a_i,$$

atunci baza de reguli poate fi definită în funcţie de cele n predicate şi m reguli.

Regulile sunt folosite de mecanismul de inferenţă pentru a deduce noi cunoştinţe. Astfel, o fază elementară de raţionament asupra unei singure reguli presupune parcurgerea următoarelor etape:

- selectează o regulă aplicabilă (predicatele sunt adevărate);
- motorul de inferenţă compară faptele cu condiţia regulilor şi selectează regula cea mai apropiată;
- modifică faptele în regula selectată (valoarea logică a predicatelor în „consecinţă“ (acţiune) este pusă ca „adevărat“).

Regula selectată este activată de motorul de inferență și acțiunea asociată cu aceasta este executată.

Asemenea operații elementare sunt repetate în buclă prin toate regulile și faptele, până când toate condițiile sunt satisfăcute (nu se obțin noi concluzii).

Inferența indică modul cum un SE aplică reguli pentru a obține o concluzie.

Există două metode generale de inferență, utilizate în cadrul sistemelor expert: *inferența înainte* și *inferența înapoi.*

Pentru a ilustra modul de inferență considerăm o bază de date, care include faptele A, B, C, D și o bază de cunoștințe, care conține trei reguli [69]:

Regula 1: **Dacă** Y este adevărat *și* D este adevărat
Atunci Z este adevărat;
Regula 2: **Dacă** X este adevărat *și* B este adevărat
Atunci Y este adevărat;
Regula 3: **Dacă** A este adevărat
Atunci X este adevărat.

Lanțul de inferență prezentat în figura 13.8 arată cum SE aplică reguli pentru a infera faptul Z.

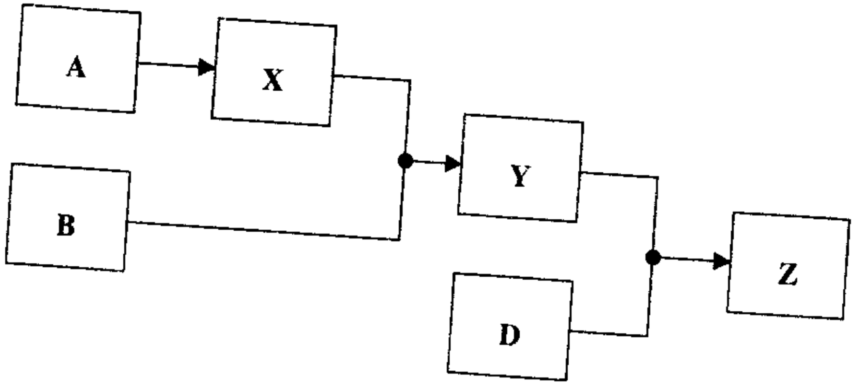


Fig. 13.8

Astfel, din regula 3 se deduce din A un nou fapt X, iar regula 2 este executată pentru a infera faptul Y din faptul inițial B și noul fapt X. În final, regula 1 aplică faptul inițial D cunoscut și cel obținut anterior Y, pentru a realiza acțiunea (concluzia) Z.

Mecanismul de inferență decide când sunt activate regulile.

Inferența înainte sau *înlănțuirea înainte* (forward chaining) presupune raționare pornind de la fapte și obținând concluzii din aceste fapte. Această metodă de inferență începe cu un set de fapte cunoscute,

deduce noi fapte folosind reguli ale căror condiții sau premise potrivesc (match) fapte cunoscute și continuă acest proces până se atinge o stare obiectiv sau până când nu mai există reguli ale căror condiții să adapteze faptele cunoscute sau deduse.

În cazul *înlănțuirii înainte* pot fi incluse multe reguli suplimentare care nu au conexiune directă cu scopul propus. Multe reguli pot fi activate pentru a deduce noi fapte care însă nu au legătură cu obiectivul dorit.

Inferența înapoi sau *înlănțuirea înapoi* (backward chaining) implică raționarea inversă de la o ipoteză, o concluzie potențială ce trebuie demonstrată, la fapte care suportă ipoteza. Un asemenea mod de raționare este cunoscut și sub denumirea de raționament cu scop determinat (goal – driven reasoning).

Într-o asemenea strategie de raționament, regulile sunt folosite în direcție inversă, de la *acțiune* la *condiție*. Astfel, mai întâi se caută în baza de cunoștințe reguli ce pot avea soluția dorită. Aceste reguli trebuie să conțină scopul în părțile lor *„acțiune"*. Dacă asemenea reguli sunt găsite și partea *„condiție"* adaptează datele din baza de date, atunci regulile se activează și scopul este demonstrat. Dacă x_s este starea scop ce trebuie găsită, atunci în cadrul inferenței înapoi începem cu x_s din baza de fapte și găsim o regulă care conține unele predicate din x_s în partea *„consecință"* a sa.

Asemenea metodă de inferență se recomandă pentru:

- demonstrarea unor teoreme în matematică;
- diagnoză în sistemele de diagnostic medical;
- diagnostic și identificare în sistemele expert în timp real pentru conducerea proceselor.

Particularitățile problemelor supuse rezolvării determină tipul de raționament care trebuie aplicat. În anumite cazuri, pot fi identificate probleme pentru care nici unul dintre mecanismele de inferență enunțate nu sunt eficiente. În aceste situații, se poate utiliza *inferența bidirecțională* – o combinație de raționament *înainte* și *înapoi.*

În acest caz, căutarea se pornește în același timp de la fapte și de la scopuri. Procedura bidirecțională de raționare se termină când se atinge puntea de raționare (fig. 13.9) [61].

Problemele de raționament sunt rezolvate prin căutare pe grafuri de raționare în spațiul stărilor. Soluția este descrisă printr-o *cale* care constă din reguli sau tranziții executate secvențial începând cu starea inițială și terminând în starea finală, care este starea scop. În [18, 61] sunt prezentate mai multe metode de căutare.

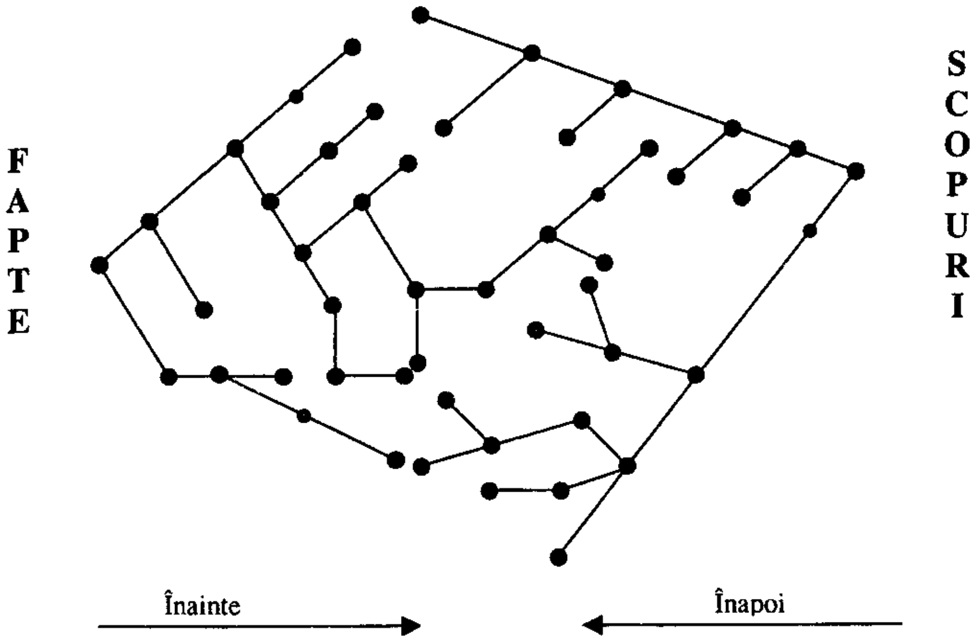


Fig. 13.9

13.3.3. Sisteme expert în timp real

Particularităţile şi restricţiile introduse de aplicaţiile de conducere în timp real impun precauţii în dezvoltarea sistemelor expert în timp real. Principalele probleme ce trebuie urmărite în proiectarea unui sistem expert în timp real (SETR) sunt:

- alegerea arhitecturii SETR;
- sincronizarea şi comunicaţia între subsistemele cu operare în timp real şi subsistemul inteligent;
- schimbul de date între cele două subsisteme;
- dezvoltarea programelor pentru SETR.

Componentele software ale unui SETR sunt alcătuite din cele specifice unui SE şi cele adăugate pentru funcţionarea în timp real [61]. Cele două categorii de componente sunt separate printr-o interfaţă care facilitează schimbul de date şi sincronizarea subsistemelor (fig. 13.10).

În această structură sunt evidenţiate, atât elemente active, cât şi elemente pasive. Subsistemul de timp real conţine taskuri specifice privind achiziţia, procesarea şi transmiterea datelor, precum şi gestionarea evenimentelor. Rezultatele prelucrării datelor sunt transmise de regulator

prin intermediul elementelor de execuţie spre proces. Astfel, taskurile principale ale unui sistem de conducere în timp real sunt: gestiunea dispozitivelor de măsurare, procesare primară şi secundară a datelor, gestiunea evenimentelor şi gestiunea regulatoarelor şi a elementelor de execuţie (v. § 15.7).

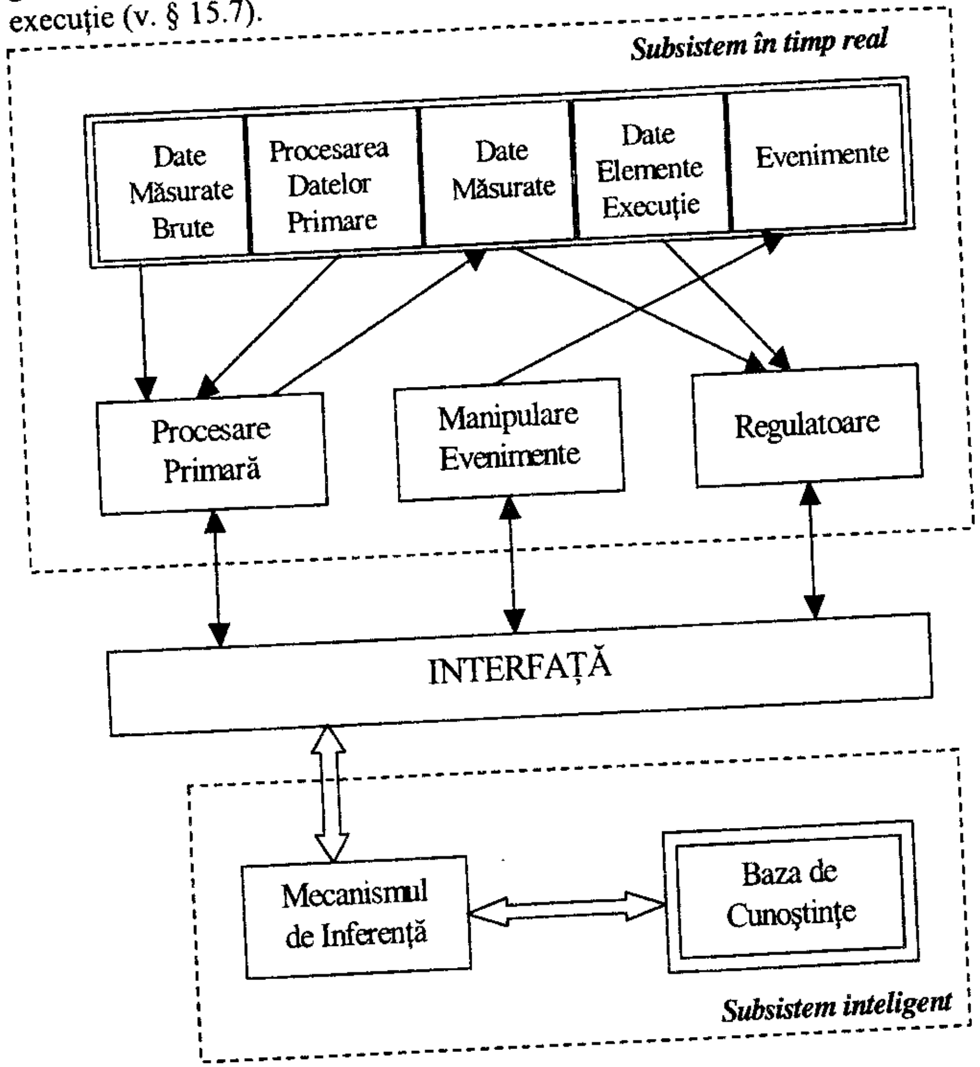


Fig. 13.10

Subsistemul inteligent conţine baza de cunoştinţe, mecanismul de inferenţă şi „managerul" bazei de cunoştinţe. Acest subsistem citeşte fişierele din baza de date a subsistemului în timp real. Rezultatul raţionamentului este comunicat proceselor de timp real prin mesaje de comunicare între taskuri.

Sincronizarea şi comunicarea între procese se realizează apelând la mecanisme specifice sistemelor de operare în timp real, semafoare şi cutii poştale. Pentru asigurarea acestor operaţii se folosesc primitive de tipul: „trimite semnal“ şi „trimite mesaj“, cu sau fără aşteptarea răspunsului. Pentru comunicarea între procesele ce au loc în timp real şi mecanismul de inferenţă, cel mai adesea se foloseşte primitiva „trimite mesaj“. Mesajele sunt colectate într-un buffer de mesaje pentru fiecare pereche care comunică şi direcţie de comunicare.

În acest mod, se organizează un şir de mesaje, cereri de raţionament de la procesare primară la motorul de inferenţă, altele pentru transmiterea mesajelor care rezultă în urma raţionamentului către un regulator şi altele. Procesele de timp real sunt astfel implementate, încât să poată aştepta pentru obţinerea unui mesaj, pe când mecanismele de inferenţă nu au această abilitate. Astfel, mecanismele de inferenţă în cadrul SETR trebuie implementate astfel încât să gestioneze mesaje care aşteaptă pentru procesare în mod corespunzător.

Gestiunea timpului şi a priorităţilor într-un SETR presupune existenţa unor mecanisme suplimentare care să rezolve eficient ordonarea cu prioritate a mesajelor care cer raţionamente şi care reprezintă un rezultat al raţionamentului. Restricţiile de timp şi gestiunea timpului într-un SETR are particularităţi legate de organizarea bazei de cunoştinţe şi de mecanismele de raţionament. Întreruperea unui proces de raţionare necesită un mecanism special de resetare, întrucât resetarea bazei de cunoştinţe se realizează prin refacerea valorii originale a predicatelor în cazul *înlănţuirii înainte* şi prin ştergerea mărcilor în cazul *înlănţuirii înapoi*.

***Etapele dezvoltării unui SETR*:**

1. Identificarea şi formularea problemei

În această etapă se selectează problema şi se identifică caracteristicile acesteia. Se constată că rezolvarea problemei este dificilă pe cale analitică şi se încadrează problema într-un domeniu de cunoaştere în scopul achiziţiei de cunoştinţe şi dezvoltării unei baze de cunoştinţe.

2. Conceptualizarea şi extragerea cunoştinţelor

Această etapă presupune extragerea cunoştinţelor dintr-un model al lumii reale şi a le aduce într-o formă utilizabilă. Pentru conceptualizarea cunoştinţelor sunt necesare definiţii clare asupra datelor, faptelor, ipotezelor, a relaţiilor între obiecte din domenii, asupra ierarhiilor, restricţiilor etc, care se asociază problemei de rezolvat.

3. Formalizarea şi organizarea cunoştinţelor

În această etapă, inginerii de cunoştinţe trebuie să aleagă cel mai eficient mod de reprezentare şi organizare a cunoştinţelor. Rezultatul acestei etape este o bază de cunoştinţe care explicitează concepte şi relaţii cerute pentru rezolvarea problemei selectate.

4. Implementarea pe un sistem de calcul

Această etapă transformă cunoştinţele formalizate într-un cadru de reprezentare, apelând la metode şi instrumente specifice procesării cunoştinţelor. Astfel, cunoştinţele devin un program executabil şi inginerul de cunoştinţe construieşte prototipul SE.

5. Testarea SETR

În general, testarea sistemelor expert apelează la scule avansate de testare, existente în toate sistemele de dezvoltare a SE. Se testează funcţionarea în timp real pentru diferite condiţii de funcţionare. Prezenţa unor mijloace speciale de testare este impusă de particularităţile SETR. Printre mijloacele speciale de testare se includ: generatoare programabile ce imită comportarea proceselor reale, monitoare ale interfeţei pentru monitorizarea stării mesajelor în aşteptare şi altele.

În [18, 61, 69] sunt prezentate în detaliu problemele dezvoltării subsistemelor expert, cu aplicaţii în conducerea în timp real a proceselor.

13.4. Tehnici fuzzy în conducerea proceselor

13.4.1. Elemente introductive

Pentru elaborarea comenzii într-un sistem de reglare (conducere), se pot utiliza *informaţii numerice* (furnizate prin intermediul traductoarelor) sau/şi *informaţii lingvistice* (furnizate de experţi umani).

Informaţia lingvistică este reprezentată prin cuvinte cu o anumită semnificaţie, cum ar fi: *mic*, *mare*, *înalt*, *scund* etc. Cele mai multe cunoştinţe umane sunt reprezentate într-o formă lingvistică. Integrarea acestor informaţii lingvistice în sisteme inginereşti reprezintă o preocupare importantă a specialiştilor în conducerea proceselor complexe, în condiţiile în care informaţiile numerice sunt incomplete.

Cea mai eficientă modalitate de reprezentare a informaţiilor lingvistice are la bază teoria mulţimilor fuzzy, având în vedere că cel mai adesea cunoştinţele umane despre anumite probleme sunt esenţialmente „fuzzy“.

Pentru a exemplifica, să considerăm o incintă în care temperatura poate lua valori între 16 şi 30°C. Un observator uman, fără a avea la dispoziţie un termometru pentru a măsura exact temperatura, apreciază că în incintă este *rece, cald* sau *foarte cald*. Această reprezentare lingvistică a temperaturii poate fi descrisă formal prin intermediul teoriei mulţimilor fuzzy. Astfel, dacă notăm prin U domeniul de variaţie a temperaturii şi admitem că cele trei cuvinte ce caracterizează temperatura în incintă acoperă domeniile (16-20°C), (20-25°C) şi (25-30°C) din întreg domeniul de variaţie a temperaturii, atunci definim o *mulţime fuzzy* şi o *funcţie de apartenenţă* μ_F care poate lua valori în intervalul $[0,1]$:

$$\mu_F(u): U \rightarrow [0,1]. \tag{13.4}$$

Mulţimea F este complet determinată prin $u \in U$ şi μ_F:

$$F = \{(u, \mu_F(u)) | u \in U\}. \tag{13.5}$$

Funcţia de apartenenţă în cazul temperaturii în incintă poate lua valori în domeniul $[0,1]$ pentru fiecare variabilă lingvistică. Pentru noţiunea fuzzy „rece", funcţia de apartenenţă are valoarea egală cu „1", pentru temperaturi foarte joase şi scade către zero, pentru temperaturi care depăşesc 20°C.

În figura 13.11 se prezintă variaţia funcţiei de apartenenţă pentru diferitele domenii de variaţie a temperaturii.

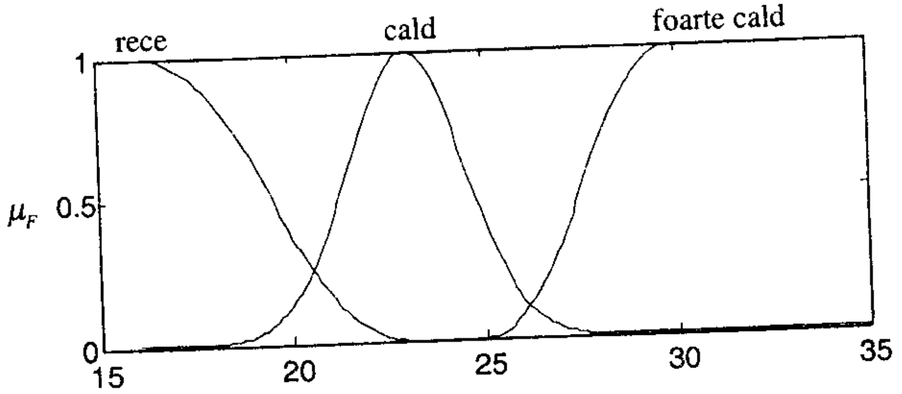


Fig. 13.11

Pentru noţiunea fuzzy „cald", funcţia de apartenenţă are valoarea maximă pentru o valoare a temperaturii aproape de 23°C.

În această reprezentare noţiunile lingvistice sunt dependente de domeniile de variaţie a temperaturii.

Pentru a creşte gradul de generalizare, ţinând seama de diversitatea mărimilor fizice ce trebuie controlate pe baza reprezentării şi procesării fuzzy, se utilizează noţiuni lingvistice independente de domeniul de variaţie a variabilelor fizice.

Cel mai frecvent sunt utilizate noţiuni lingvistice cum ar fi: *pozitiv mare* (PM), *pozitiv mic* (Pm), *zero* (Z), *negativ mic* (Nm) şi *negativ mare* (NM), definite pe domeniul normalizat de variaţie a variabilelor fizice $[-1,1]$ sau pe un domeniu standard al numerelor reale între -6 şi 6 [23].

Mulţimile fuzzy folosesc *variabile lingvistice* sau *noţiuni fuzzy* pentru a descrie gradul de apartenenţă.

În funcţie de natura universului, funcţia de apartenenţă poate fi reprezentată, fie într-o formă continuă, fie într-o formă discretă.

Pentru reprezentarea în formă continuă, se pot utiliza mai multe tipuri de funcţii de apartenenţă [23, 61]:

- *curbe sub formă de clopot,* care sunt bazate pe funcţii exponenţiale ca şi funcţii standard de distribuţie Gaussiană:

$$\mu(u) = e^{-\frac{(u-u_0)^2}{2\sigma^2}}, \tag{13.6}$$

unde u este variabila independentă din universul de discurs (domeniul de variaţie al lui u), u_0 este valoarea de vârf relativ la univers şi σ este deviaţia standard;

- *curbe* – S care sunt bazate pe funcţia cosinus:

$$S(u_0,b,u) = \begin{cases} 0 & u < u_0 - b \\ 0.5 + 0.5\cos\left(\frac{u-u_0}{b}\pi\right) & u \in [u_0 - b, u_0] \\ 1 & u > u_0 \end{cases} \tag{13.7}$$

unde b este lăţimea secţiunii crescătoare şi u_0 este coordonata vârfului;

- *curbe* – Z, care sunt reflecţii ale curbelor S:

$$Z(u_0,b,u) = \begin{cases} 0 & u < u_0 \\ 0.5 + 0.5\cos\left(\frac{u-u_0}{b}\pi\right) & u \in [u_0, u_0 + b] \\ 1 & u > u_0 + b \end{cases} \tag{13.8}$$

- *curbe* – Π, care reprezintă combinaţia curbelor S şi Z:

$$\Pi(u_1,u_2,b,u) = \min(S(u_1,b,u), Z(u_2 b,u)). \tag{13.9}$$

În acest caz, curba evidenţiază un palier în vecinătatea valorii maxime a funcţiei de apartenenţă;

- *reprezentări liniare* (funcţii Γ, funcţii L, triunghiulare, trapezoidale):

$$l(u_s,u_d,u)=\begin{cases}0; & u<u_s\\ \dfrac{u-u_s}{u_d-u_s}; & u\in[u_s,u_d]\\ 0; & u>u_d\end{cases} \qquad (13.10)$$

$$l_\wedge(u_s,u_c,u_d,u)=\begin{cases}0; & u<u_s\\ \dfrac{u-u_s}{u_c-u_s}; & u\in[u_s,u_c)\\ 1-\dfrac{u-u_c}{u_d-u_c}; & u\in[u_c,u_d]\\ 0; & u>u_d\end{cases} \qquad (13.11)$$

Funcţiile Γ şi L sunt funcţii liniar crescătoare sau descrescătoare şi depind de doi parametri, u_s şi u_d, care reprezintă valorile variabilei u la stânga (u_s) şi la dreapta (u_d).

Funcţia triunghiulară depinde de trei variabile, u_s, u_d şi u_c, care reprezintă valoarea variabilei pentru care funcţia de apartenenţă este maximă (egală cu 1).

Funcţia trapezoidală depinde de patru parametri şi prezintă un palier pentru un domeniu de variaţie a variabilei u pentru care funcţia de apartenenţă este maximă.

În figura 13.12 sunt prezentate formele funcţiilor de apartenenţă în cazul utilizării unor reprezentări exponenţiale, iar în figura 13.13 sunt prezentate formele funcţiilor de apartenenţă în cazul unor reprezentări liniare.

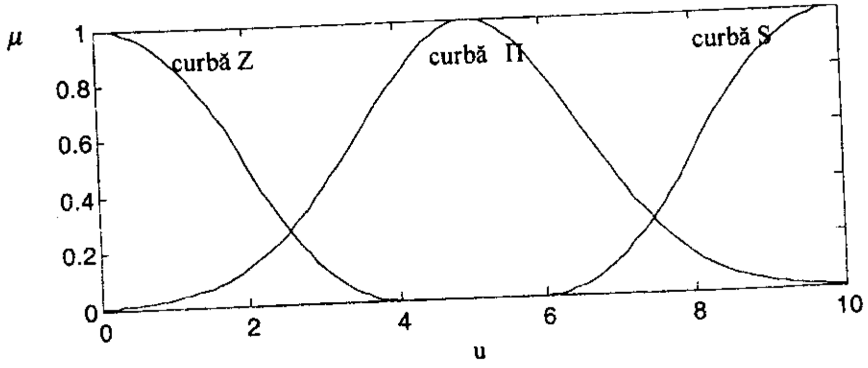


Fig. 13.12

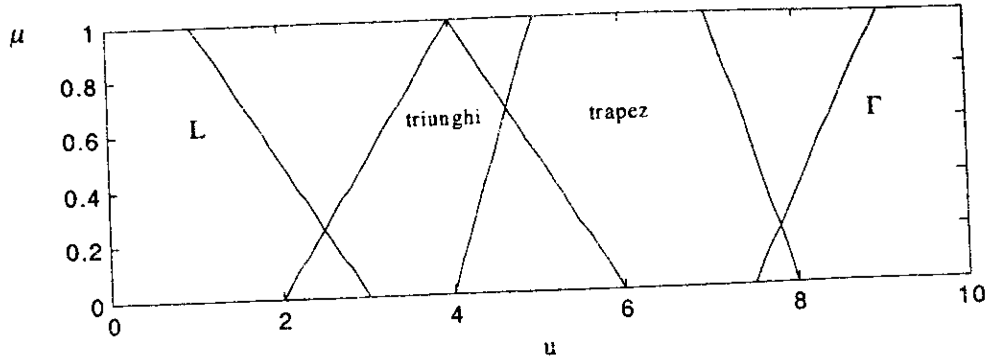


Fig. 13.13

Pentru reprezentarea în formă discretă, se asociază fiecărei valori a variabilei din universul de discurs (domeniul de variaţie) o valoare a funcţiei de apartenenţă. Astfel, funcţia de apartenenţă în acest caz este reprezentată ca un vector al valorilor discrete.

Cu aceste elemente introductive, putem spune că o mulţime fuzzy F reprezintă o mulţime de perechi ordonate pe universul U:

$$F=\{(u,\mu_F(u))\}, \qquad (13.12)$$

unde $u\in U$ şi $\mu_F(u)$ este funcţia (gradul) de apartenenţă în F. Perechea $(u,\mu_F(u))$ este o mulţime cu un singur element (singleton fuzzy).

O mulţime fuzzy poate fi considerată ca o reuniune de singletoane fuzzy, în special în cazul reprezentării discrete. Pentru o mulţime fuzzy cu n elemente, ţinând seama de definiţia sa, putem scrie:

$$F=\{(u,\mu(u_1)),(u,\mu(u_2)),\cdots,(u,\mu(u_n))\}. \qquad (13.13)$$

Funcţia de apartenenţă joacă un rol esenţial în teoria mulţimilor fuzzy, deoarece aceasta defineşte gradul de apartenenţă la o mulţime.

Teoria mulţimilor fuzzy introdusă de Zadeh [49, 61, 93] are la bază operaţii şi relaţii între funcţii de apartenenţă.

Dacă definim două mulţimi fuzzy A şi B, $A=\{u,\mu_A(u)\}$ şi $B=\{u,\mu_B(u)\}$, putem introduce următoarele operaţii primitive cu mulţimi fuzzy:

- **Reuniunea a două mulţimi fuzzy**:

$A\cup B=A$ sau $B:=A\max B$,

unde max reprezintă o operaţie de selecţie a maximului dintre funcţiile de apartenenţă corespunzătoare celor două mulţimi fuzzy:

$$\mu_{A\cup B}(u)=\max(\mu_A(u),\mu_B(u)),\ \text{pentru } u\in U. \qquad (13.14)$$

- **Intersecția a două mulțimi fuzzy**:

$A \cap B = A$ și $B := A \min B$,

unde min este o operație de selecție a minimului dintre funcțiile de apartenență corespunzătoare celor două mulțimi fuzzy:

$$\mu_{A \cap B}(u) = \min(\mu_A(u), \mu_B(u)),\ \text{pentru } u \in U. \quad (13.15)$$

- **Complementul mulțimii** *A* este:

$\neg A = not\ A := 1 - A$,

unde fiecare valoare a funcției de apartenență se scade din 1:

$$\mu_{\neg A}(u) = 1 - \mu_A(u),\ \text{pentru } u \in U. \quad (13.16)$$

Pentru a ilustra cele trei operații, să considerăm două mulțimi fuzzy definite pentru consumul de energie și temperatura aerului într-o incintă, în cazul în care se folosesc mai multe tipuri de aparate de aer condiționat în funcție de puterea instalată [61].

Astfel, considerăm că aparatele au o putere instalată în domeniul 0.5kW și 4kW. În acest caz, $U = \{0.5, 1, 1.5, 2, 3, 4\}$, iar temperatura și consumul de energie depind de tipul aparatului astfel:

U	0.5	1	1.5	2	3	4
μ_T	0.0	0.1	0.4	0.5	0.8	1.0

U	0.5	1	1.5	2	3	4
μ_C	1.0	0.7	0.6	0.4	0.2	0.0

Pentru o putere instalată mare, temperatura poate atinge valori mari, iar consumul este cu atât mai mic, cu cât puterea instalată este mai mică.

Dacă dorim să instalăm un aparat de aer condiționat cu consum minim și temperatură ridicată, atunci realizăm intersecția celor două mulțimi fuzzy, $\mu_{T \cap C} = \min(\mu_T, \mu_C)$.

U	0.5	1	1.5	2	3	4
μ_T	0.0	0.1	0.4	0.5	0.8	1.0
μ_C	1.0	0.7	0.6	0.4	0.2	0.0
$\min(\mu_T, \mu_C)$	0.0	0.1	0.4	0.4	0.2	0.0

Dacă dorim un aparat care să asigure temperatură maximă sau consum minim, atunci realizăm reuniunea celor două mulțimi fuzzy, $\mu_{T \cup C} = \max(\mu_T, \mu_C)$.

U	0.5	1	1.5	2	3	4
μ_T	0.0	0.1	0.4	0.5	0.8	1.0
μ_C	1.0	0.7	0.6	0.4	0.2	0.0
$\max(\mu_T, \mu_C)$	1.0	0.7	0.6	0.5	0.8	1.0

Reprezentarea grafică a celor două operații, în cazul utilizării unor curbe de tip *S* și *Z* pentru funcțiile de apartenență, este dată în figurile 13.14*a* pentru operatorul ȘI, respectiv 13.14*b* pentru operatorul SAU.

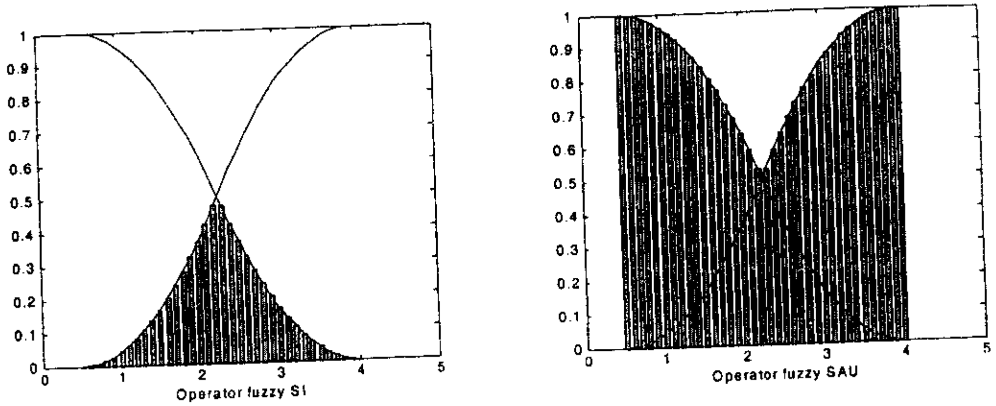


Fig. 13.14

Operațiile *comutativitate*, *asociativitate*, *distributivitate*, *regulile DeMorgan*, *absorbția* sunt valabile și în cazul operațiilor fuzzy „ȘI" și „SAU".

Între mulțimile fuzzy pot fi definite mai multe tipuri de relații fuzzy.

O relație fuzzy este o mulțime fuzzy de perechi ordonate cu funcția de apartenență cuprinsă între 0 și 1. O relație fuzzy *R* definită pentru două universuri de discurs *U* și *V* este o mulțime fuzzy definită în spațiul produs $U \times V$ și are funcția de apartenență $\mu_R(u,v)$, unde $u \in U$ și $v \in V$:

$$R = \int_{U \times V} \mu_R(u,v)/(u,v), \quad (13.17)$$

în cazul în care cele două universuri *U* și *V* sunt continue și:

$$R = \sum_{U \times V} \mu_R(u,v)/(u,v), \quad (13.18)$$

dacă *U* și *V* sunt definite în formă discretă.

Pentru a exemplifica, să considerăm două mulțimi fuzzy [23] definite pe un univers reprezentat prin valori discrete: $U = \{1, 2, 3\}$ și $V = \{1, 2, 3\}$, iar relația fuzzy liniară „aproximativ egal" este definită ca:

$$\mu_R(u,v)=\begin{cases}1, \text{ dacă } u=v\\ 0.8, \text{ dacă } |u-v|=1\\ 0.3, \text{ dacă } |u-v|=2\end{cases}$$

sau în reprezentare matriceală:

U \ V	1	2	3
1	1	0.8	0.3
2	0.8	1	0.8
3	0.3	0.8	1

O asemenea relație fuzzy este:

$$R=1/(1,\ 1)+1/(2,\ 2)+1/(3,\ 3)+0.8/(1,\ 2)+0.8/(2,\ 3)+$$
$$+0.8/(3,\ 2)+0.8/(2,\ 1)+0.3/(1,\ 3)+0.3/(3,\ 1).$$

Relațiile fuzzy joacă un rol esențial în conducerea fuzzy a proceselor, întrucât acestea pot descrie interacțiunile între variabile.

Să considerăm două relații fuzzy R și S definite pe $U\times V$. Intersecția celor două relații este definită prin:

$$\mu_{R\cap S}(u,v)=\min(\mu_R(u,v),\mu_S(u,v)),\ \forall(u,v)\in U\times V. \tag{13.19}$$

În mod similar se definește și reuniunea celor două relații fuzzy:

$$\mu_{R\cup S}(u,v)=\max(\mu_R(u,v),\mu_S(u,v)),\ \forall(u,v)\in U\times V. \tag{13.20}$$

Pentru a exemplifica cele două operații asupra relațiilor fuzzy R și S, considerăm [23]:

R = „u considerabil mai mare decât v"

U \ V	v_1	v_2	v_3	v_4
u_1	0.8	1	0.1	0.7
u_2	0.0	0.8	0.0	0.0
u_3	0.9	1	0.7	0.8

și

S = „v foarte aproape de u"

U \ V	v_1	v_2	v_3	v_4
u_1	0.4	0.0	0.9	0.6
u_2	0.9	0.4	0.5	0.7
u_3	0.3	0.0	0.8	0.5

Intersecția relațiilor R și S denotă „u considerabil mai mare decât v **și** v foarte aproape de u":

$R\cap S=$

U \ V	v_1	v_2	v_3	v_4
u_1	0.4	0.0	0.9	0.6
u_2	0.0	0.4	0.0	0.0
u_3	0.3	0.0	0.7	0.5

Reuniunea relațiilor R și S denotă „u considerabil mai mare decât v **sau** v foarte aproape de u":

$R\cup S=$

U \ V	v_1	v_2	v_3	v_4
u_1	0.8	1.0	1.0	0.7
u_2	0.9	0.8	0.5	0.7
u_3	0.9	1.0	0.8	0.8

Un tip special de relație fuzzy este „*compoziția*". Pentru două mulțimi fuzzy A și B, ambele în formă matriceală, compoziția lor este dată prin:

$$R=A\circ B, \tag{13.21}$$

unde $\circ$ este produsul interior „*sau – și*" sau „*compoziția max – min*", definită ca o relație binară între două mulțimi fuzzy.

Operația definită este foarte similară cu produsul ordinar de matrici, cu observația că aplicăm operatorul „ȘI" în schimbul multiplicării și operatorul „SAU" în schimbul însumării. Dacă folosim operatorii $\cap$ și $\cup$ în locul operatorilor „ȘI" și „SAU", rezultatul compoziției se obține sub forma:

$$r_{ij}=(a_{i1}\cup b_{1j})\cap(a_{i2}\cup b_{2j})\cap\cdots\cap(a_{in}\cup b_{nj})=\bigcup_{k=1}^{n}a_{ik}\cap b_{kj}. \tag{13.22}$$

O altă operație asupra mulțimilor fuzzy o reprezintă „*implicația*". O asemenea operație joacă un rol important în sinteza legii de reglare bazată pe mulțimi fuzzy.

Implicația între două mulțimi fuzzy A și B este definită prin:

$$A\to B:=A\times B, \tag{13.23}$$

unde $\times$ este un produs extern al matricilor folosind operatorul logic „ȘI".

Pentru a exemplifica, considerăm mulțimea fuzzy A reprezentată printr-un vector coloană, unde fiecare element este egal cu valoarea definită a funcției de apartenență, iar mulțimea B reprezentată într-o manieră similară, ca un vector linie.

Produsul lor este definit prin:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cap b_1 & a_1 \cap b_2 & \cdots & a_1 \cap b_m \\ a_2 \cap b_1 & a_2 \cap b_2 & \cdots & a_2 \cap b_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n \cap b_1 & a_n \cap b_2 & \cdots & a_n \cap b_m \end{bmatrix} \quad (13.24)$$

O implicaţie fuzzy $A \to B$ poate fi înţeleasă ca o regulă fuzzy IF – THEN:

DACĂ u este A **ATUNCI** v este B,

unde $u \in U$ şi $v \in V$ sunt variabile lingvistice [61].

13.4.2. Reglarea fuzzy a proceselor

Un proces poate fi descris printr-un model matematic (liniar sau neliniar) sau printr-un model lingvistic. În acest paragraf se prezintă structura unui sistem de reglare apelând la mulţimi fuzzy. O reprezentare fuzzy a unui obiect condus presupune definirea unui set de reguli IF – THEN între variabilele de intrare şi ieşire. Desigur, o reprezentare lingvistică a comportării unui proces se bazează pe observaţii, pe experienţa operatorului în exploatarea procesului. Asemenea modele pot fi utilizate pentru sinteza legii de conducere, care în acest caz se prezintă tot într-o formă lingvistică.

Cel mai adesea, procesele nu pot fi descrise de modele matematice care să permită sinteza legii de conducere, caracterul profund neliniar al acestora le face neoperaţionale.

În aceste situaţii, se poate adopta o strategie de conducere bazată pe informaţia fuzzy despre proces. Astfel, ştiind că între variabilele de interes din cadrul procesului există relaţii de tipul „Dacă U creşte, Atunci Y creşte" şi dacă se pot defini mulţimi fuzzy pentru încadrarea acestor variabile, se poate genera setul de reguli ce caracterizează comportamentul procesului.

Experienţa operatorului uman în conducerea procesului se poate materializa într-o bază de reguli ataşată regulatorului fuzzy.

Regulatorul fuzzy procesează variabile fuzzy şi generează comenzi compatibile cu procesul condus, cel mai adesea, sub forma unor funcţii neliniare.

Structura standard a unui regulator fuzzy este prezentată în figura 13.15.

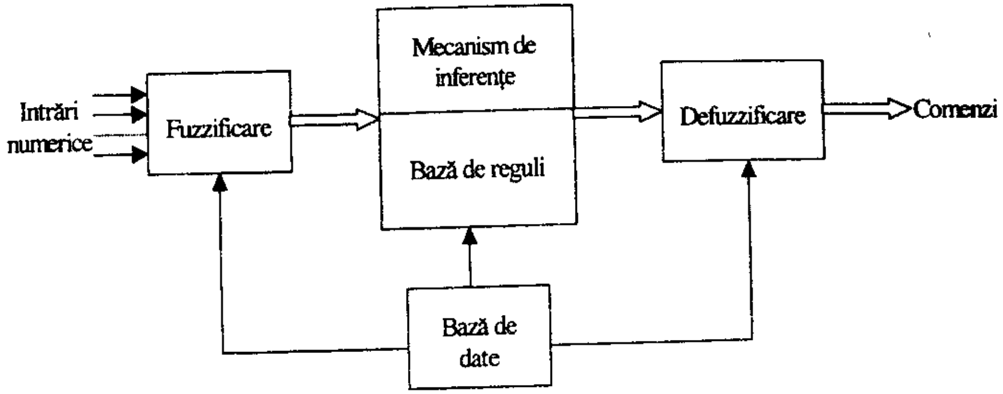


Fig. 13.15

Dacă se consideră mecanismul de inferenţă şi baza de reguli (cunoştinţe) ca modulul ce generează comenzi fuzzy pe baza prelucrării informaţiilor fuzzy, atunci un asemenea regulator conectat la proces presupune utilizarea unor interfeţe care să convertească informaţia numerică în informaţie lingvistică (fuzzy) şi, respectiv, informaţia fuzzy în comenzi numerice.

În figura 13.16 se prezintă structura generală a unui sistem de reglare cu regulator lingvistic.

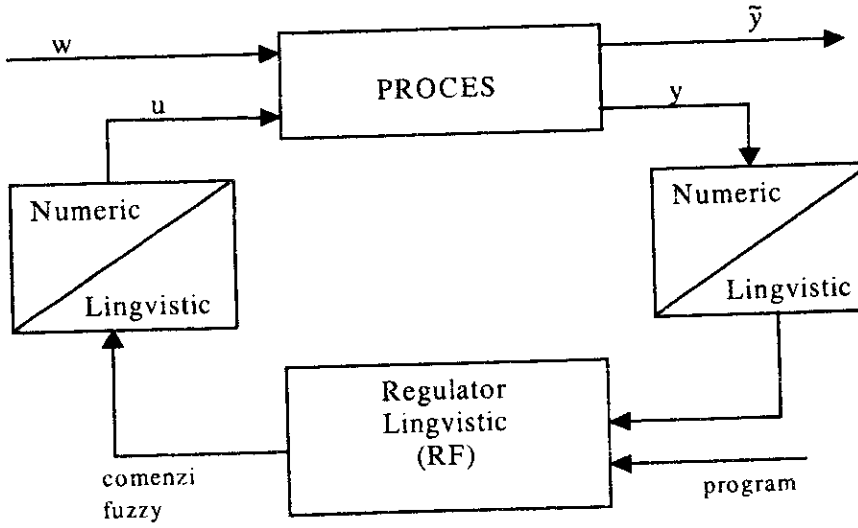


Fig. 13.16

Interfaţa de intrare a regulatorului realizează o scalare a variabilelor măsurate din proces şi le converteşte în variabile lingvistice prin fuzzificare. În această interfaţă se ataşează variabilelor ce urmează a fi procesate, etichete ale mulţimilor fuzzy prin utilizarea diferitelor modele de reprezentare fuzzy (curbe clopot, S, triunghiulare, trapezoidale).

Interfaţa de ieşire sau modulul de defuzzificare asigură conversia informaţiilor fuzzy în informaţii ferme (crisp) prin mecanisme de defuzzificare şi realizează scalarea variabilelor de comandă în forma de valori compatibile cu intrarea elementului de execuţie.

Modulul de decizie logică şi elaborare a comenzii presupune utilizarea unor mecanisme de inferenţă şi a unei baze de reguli (bază de cunoştinţe) a regulatorului. Regulatorul fuzzy generează comenzi pe baza unor intrări sub forma unor variabile lingvistice apelând la implicaţii sau relaţii fuzzy. Baza de reguli conţine în esenţă strategia de conducere a procesului sub forma unui set de reguli de producţie obţinute din experienţa operatorului şi a inginerului specialist în conducerea proceselor:

DACĂ <stare proces> ATUNCI <comandă>

unde prin *stare proces* şi *comandă* înţelegem variabile lingvistice care descriu proprietăţi ale mărimilor din proces.

Regulile se obţin, fie prin verbalizarea introspectivă a cunoştinţelor bazate pe experienţa operatorului sau prin interogarea operatorului şi/sau a inginerului automatist folosind chestionare adecvate, fie pe baza unui model lingvistic (model fuzzy) ataşat procesului controlat.

Mecanismele de inferenţă folosite în cadrul regulatoarelor fuzzy sunt în general mai simple decât cele folosite în cadrul sistemelor expert, deoarece consecinţa unei reguli nu se aplică ca antecedent într-o altă regulă.

Considerând baza de reguli:

$$R = \{R_1, R_2, \cdots, R_n\}, \tag{13.25}$$

unde R_i reprezintă regula i a unui sistem cu mai multe intrări şi mai multe ieşiri sub forma:

„**Dacă** x_i este A_i **şi** ... **şi** y_i este B_i, **Atunci** z_i este C_i **şi** ... **şi** z_q este D_i" atunci baza de reguli poate fi reprezentată sub forma:

$$\begin{aligned} R &= \left\{\bigcup_{i=1}^{n} R_i\right\} = \left\{\bigcup_{i=1}^{n}\left[(A_i \times \cdots \times B_i) \to (z_1 + \cdots + z_q)\right]\right\} = \\ &= \left\{\bigcup_{i=1}^{n}\left[(A_i \times \cdots \times B_i) \to z_1\right] \cup \cdots \bigcup_{i=1}^{n}\left[(A_i \times \cdots \times B_i) \to z_q\right]\right\} = \\ &= \left\{\bigcup_{k=1}^{q}\bigcup_{i=1}^{n}\left[(A_i \times \cdots \times B_i) \to z_k\right]\right\} = \left\{RB^1, RB^2, \cdots, RB^q\right\} \end{aligned} \tag{13.26}$$

unde RB^i reprezintă regula:

„**Dacă** x este A_i **şi** ... **şi** y este B_i **Atunci** z_k este D_i"

pentru $i = 1, 2, \cdots, n$ şi $k = 1, 2, \cdots, q$.

O asemenea reprezentare evidenţiază faptul că baza de reguli R a unui regulator fuzzy constă dintr-un set de reguli de comandă cu mai multe intrări şi o singură ieşire de tipul RB^i.

Pentru a exemplifica modul de reprezentare a bazei de reguli de tip MISO (intrări multiple şi o singură ieşire) considerăm ca intrări în regulator eroarea $\varepsilon = r - y$ şi derivata erorii $\Delta\varepsilon$, iar ieşirea este comanda u:

R_1: **Dacă** ε este A_1 **şi** $\Delta\varepsilon$ este B_1 **Atunci** u este D_1

R_2: **Dacă** ε este A_2 **şi** $\Delta\varepsilon$ este B_2 **Atunci** u este D_2

... ...

R_n: **Dacă** ε este A_n **şi** $\Delta\varepsilon$ este B_n **Atunci** u este D_n

---

u este D^c

În această reprezentare generală, ε, $\Delta\varepsilon$ şi u sunt variabile lingvistice ale sistemului, iar A_i, B_i şi D_i sunt valori lingvistice ale variabilelor lingvistice ε, $\Delta\varepsilon$ şi u în universul de discurs E, ΔE şi U, pentru $i = 1, 2, \cdots, n$.

Variabilele lingvistice sunt acele variabile reprezentate prin cuvinte sau propoziţii într-un limbaj natural sau artificial. O variabilă lingvistică poate fi reprezentată prin patru mărimi caracteristice:

X – numele simbolic al variabilei lingvistice;

LX – mulţimea valorilor lingvistice pe care le poate lua variabila lingvistică X;

U – universul de discurs care reprezintă domeniul fizic peste care variabila lingvistică ia valorile cantitative ferme;

M_X – o funcţie semantică dă interpretarea unei valori lingvistice în funcţie de elementele cantitative ale lui U:

$$M_X : LX \to \overline{LX}$$

unde $\overline{LX}$ este o notaţie pentru o mulţime fuzzy definită peste U, respectiv:

$$\overline{LX} = \sum_U \mu_{LX}(x)/x \text{ şi } \overline{LX} = \int_U \mu_{LX}(x)/x, \tag{13.27}$$

în cazul unui U reprezentat în formă discretă sau continuă.

Pentru a exemplifica, considerăm eroarea E într-un SRA definită prin:

$$\langle E,\ LE,\ \varepsilon,\ ME\rangle,$$

unde

$$LE = \{NM, Nm, ZE, Pm, PM\}$$

$\varepsilon = [-1,\ 1]$ sau $\varepsilon = [-6,\ 6]$

$M_E : LE \rightarrow \overline{LE}$.

În cazul în care valorile lingvistice sunt reprezentate ca în figura 13.17, atunci se pot defini:

$$NM\ \ (negativ\ \ mare) = \int_{-6}^{6} L(\varepsilon;-6;-3)/\varepsilon$$

$$Nm\ \ (negativ\ \ mic) = \int_{-6}^{6} \Lambda(\varepsilon;-6;-3;0)/\varepsilon$$

$$ZE\ \ (zero) = \int_{-6}^{6} \Lambda(\varepsilon;-3;0;3)/\varepsilon$$

$$Pm\ \ (pozitiv\ \ mic) = \int_{-6}^{6} \Lambda(\varepsilon;0;3;6)/\varepsilon$$

$$PM\ \ (pozitiv\ \ mare) = \int_{-6}^{6} \Gamma(\varepsilon;3;6)/\varepsilon\ .$$

Folosind asemenea reprezentări lingvistice pentru variabilele de stare ε şi $\Delta\varepsilon$ se pot genera comenzi u sau Δu sub formă lingvistică, apelând la mecanisme de inferenţă specifice regulatoarelor fuzzy.

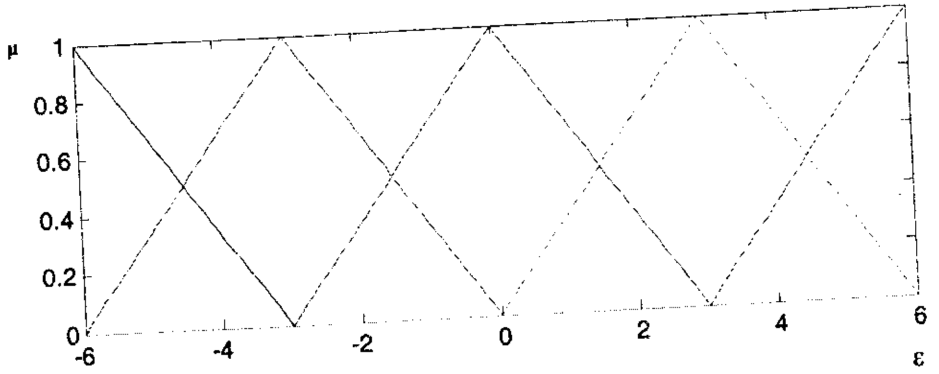


Fig. 13.17

Există trei categorii de sisteme fuzzy: *sisteme fuzzy pure*, *sisteme fuzzy Takagi – Sugeno* şi *sisteme fuzzy cu fuzificator şi defuzificator* (sisteme fuzzy de tip Mamdani) [61].

În cele ce urmează, vom prezenta sintetic numai ultimele două tipuri de sisteme fuzzy a căror eficienţă în reglarea proceselor a fost probată cu succes.

Regulile „DACĂ – ATUNCI", utilizate în cadrul sistemelor fuzzy Takagi – Sugeno au forma:

$$R^{(i)}\text{: } \textbf{DACĂ}\ u_1 \text{ este } F_1^i \text{ şi ... şi } u_n \text{ este } F_n^i$$
$$\textbf{ATUNCI}\ \ y_i = c_0^i + c_1^i u_1 + \cdots + c_n^i u_n\ , \qquad (13.28)$$

unde F_k^i sunt mulţimi fuzzy, c_i sunt parametri cu valori reale, y_i este ieşirea sistemului datorată regulii $R^{(i)}$, cu $i = 1, 2, \cdots, N$. În acest caz, partea „DACĂ" a regulii este fuzzy, iar partea „ATUNCI" este o mărime fermă obţinută ca o combinaţie liniară a variabilelor de intrare.

Dacă se notează prin w^i ponderea tuturor valorilor de adevăr pentru regula $R^{(i)}$ pentru o intrare:

$$w^i = \prod_{k=1}^{n} \mu_{F_k}^i(u_k), \qquad (13.29)$$

atunci se poate calcula media ponderată a variabilei y^i :

$$y(\underline{u}) = \frac{\sum_{i=1}^{N} w^i y^i}{\sum_{i=1}^{N} w^i} \qquad (13.30)$$

unde vectorul de intrări $\underline{u} = [u_1\ u_2 \cdots u_n]^T$, iar $y(\underline{u})$ reprezintă ieşirea din sistemul fuzzy Takagi – Sugeno.

O reprezentare a sistemului fuzzy Takagi – Sugeno este dată în figura 13.18.

De remarcat faptul că un asemenea sistem nu permite incorporarea experienţei umane sub forma unor reguli fuzzy având în vedere că partea „ATUNCI" a regulilor nu este fuzzy. Avantajul acestor sisteme este determinat de existenţa unui sistem de ecuaţii (13.30) pentru care se pot extinde metodele cunoscute de estimare a parametrilor y^i.

Sistemele fuzzy cu fuzificator şi defuzificator au cea mai largă aplicabilitate în problemele de reglare a proceselor datorită facilităţilor de reprezentare a experienţei umane în reguli fuzzy. Variabilele de intrare şi de ieşire ale proceselor sunt variabile reale ce pot fi convertite în variabile lingvistice existând multiple grade de libertate pentru alegerea metodelor de fuzificare, a mecanismelor de inferenţă şi a metodelor de defuzificare. Asemenea sisteme pot fi uşor adaptate problemelor de reglare a variabilelor din proces.

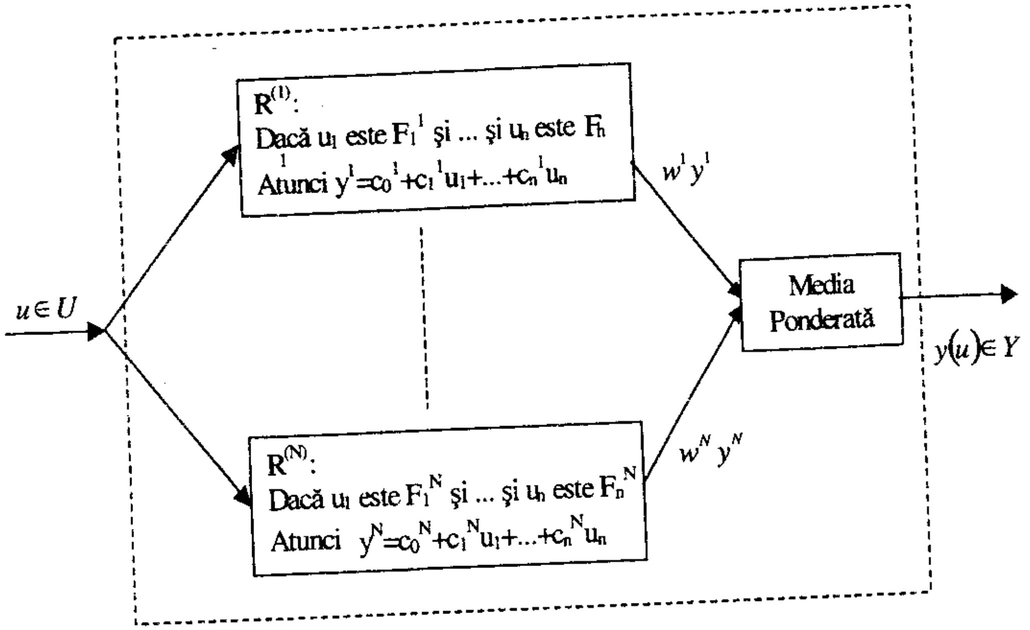


Fig. 13.18

În ele ce urmează, se prezintă procedura de proiectare a unui regulator fuzzy ca sistem cu fuzificator şi defuzificator.

13.4.3. Proiectarea regulatoarelor fuzzy

Structura generală a unui regulator fuzzy evidenţiază existenţa a patru module esenţiale: *modulul de scalare – fuzificare*, *modulul de defuzificare – scalare*, *mecanismul de inferenţă* şi *baza de reguli si baza de date*. Astfel, regulatoarele fuzzy sunt conectate la proces prin intermediul celor două interfeţe active care asigură conversia, dar nu numai, a informaţiilor numerice în variabile fuzzy şi, respectiv, a variabilelor fuzzy în informaţii numerice. În structura regulatoarelor sunt incluse mecanismul de inferenţă (mecanismul de decizie logică) care procesează reguli, cunoştinţe şi baza de reguli (baza de cunoştinţe) şi de date. Baza de date furnizează informaţiile necesare pentru funcţionarea corespunzătoare a modulelor de interfaţare cu procesul (scalare – fuzificare, defuzificare – scalare), a bazei de reguli prin interpretarea valorilor lingvistice ale variabilelor de stare, de intrare şi de comandă ale procesului.

Baza de reguli conţine strategia de conducere sub forma unui set de reguli de producţie obţinute din experienţa operatorului şi a inginerului specialist în conducerea proceselor sub forma:

DACĂ <stare proces> **ATUNCI** <comandă>

sau

DACĂ x este LX **ATUNCI** u este LU

unde x şi u sunt variabile lingvistice iar LX şi LU sunt valori lingvistice care descriu o proprietate a variabilelor lingvistice.

Pentru proiectarea bazei de reguli sunt necesare:

- alegerea variabilelor de stare şi de comandă;
- alegerea conţinuturilor regulilor – *antecedent* şi *consecinţă*;
- alegerea domeniilor valorilor lingvistice pentru variabilele de stare şi de comandă;
- deducerea regulilor.

Mecanismul de inferenţă (blocul de decizie logică) reprezintă nucleul regulatorului şi emulează procesul de decizie umană pe baza conceptelor şi a regulilor de inferenţă din logica fuzzy. Inferenţa poate fi bazată pe reguli individuale sau poate fi bazată pe compoziţia de reguli.

Parametrii de proiectare se reduc la:

- alegerea reprezentării unei singure reguli;
- alegerea reprezentării unui set de reguli;
- alegerea mecanismului de inferenţă;
- testarea setului de reguli din punct de vedere al *consistenţei* şi *completitudinii*.

Pentru interfaţa de intrare care asigură scalarea şi fuzificarea variabilelor numerice în variabile fuzzy se consideră ca parametri de proiectare:

- alegerea factorilor de scală în funcţie de domeniile de variaţie ale variabilelor numerice;
- alegerea metodei de fuzificare şi a parametrilor specifici acestuia (liniar, curbe Z, curbe Π, clopot etc.).

În cazul interfeţei de ieşire, în cadrul căreia se realizează convertirea variabilelor lingvistice în variabile numerice şi scalarea acestora în domeniul admisibil de valori pentru intrarea procesului condus, ca parametri de proiectare se consideră:

- alegerea operatorilor de defuzificare;
- alegerea metodei de defuzificare;
- alegerea factorilor de scală pentru variabilele de comandă.

Pentru a proiecta un regulator fuzzy care prelucrează eroarea ε, se pot utiliza ca variabile de intrare ε şi $\dot{\varepsilon}$ (derivata erorii) sau $\Delta\varepsilon$, iar ieşirea poate fi comanda u sau variaţia comenzii Δu sau $\dot{u}$.

Astfel, pentru a realiza o comportare de tip PI – fuzzy se pot utiliza reguli sub forma:

DACĂ ε_k este <simbol> **şi** $\Delta\varepsilon_k$ este <simbol> **ATUNCI** Δu este <simbol>

sau, spre exemplificare:

DACĂ ε_k este <Pozitiv Mare> **şi** $\Delta\varepsilon_k$ este <Pozitiv mic>

ATUNCI Δu este <Pozitiv Mare>.

În mod similar, se pot obţine comportări PID – fuzzy dacă se introduce pe lângă variabilele ε_k, $\Delta\varepsilon_k$ şi $\delta\varepsilon$, care defineşte suma erorilor.

Forma unei reguli în acest caz este:

DACĂ ε_k este <simbol> **şi** $\Delta\varepsilon_k$ este <simbol> **şi** $\delta\varepsilon_k$ este <simbol>

ATUNCI u_k este <simbol>.

Pentru a exemplifica modul de alcătuire a unei baze de reguli specifice comportării PI – fuzzy considerăm ca variabilă de interes *eroarea* $\varepsilon_k = r_k - y_k$, *variaţia erorii* $\Delta\varepsilon_k = \varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}$ şi *variaţia comenzii* $\Delta u_k = u_k - u_{k-1}$, unde r_k şi y_k reprezintă referinţa şi respectiv, ieşirea măsurată din proces în formă numerică. Admitem o reprezentare lingvistică identică pentru cele trei variabile $LE = L\Delta E = L\Delta U = \{NM,\ Nm,\ ZE,\ Pm,\ PM\}$, conform tabelului 13.1.

Tabelul 13.1

$\Delta\varepsilon_k$ / ε_k	NM	Nm	ZE	Pm	PM
NM	NM	NM	NM	NM	ZE
Nm	NM	Nm	Nm	ZE	PM
ZE	NM	Nm	ZE	Pm	PM
Pm	NM	ZE	Pm	Pm	PM
PM	ZE	PM	Pm	PM	PM

Din acest tabel pot fi extrase câteva regimuri de funcţionare ale regulatorului.

Astfel, pentru ε_k şi $\Delta\varepsilon_k$ negative sau pozitive, mici sau zero, valoarea curentă a variabilei y_k a deviat de la referinţă, însă se menţine aproape de ea. În acest caz, variaţia comenzii Δu_k se menţine de asemenea mică sau zero în amplitudine şi asigură corectarea deviaţiei faţă de referinţă.

Dacă ε_k este aproape de zero (*Pm*, *ZE*, *Nm*) sau foarte departe de zero (*NM*), $\Delta\varepsilon_k$ este negativ, înseamnă că y_k evoluează departe de referinţă şi astfel, o modificare negativă a variaţiei comenzii Δu_k inversează tendinţa de evoluţie a ieşirii şi deplasarea acesteia spre referinţă.

Dimensiunea setului de termeni (valori lingvistice ale variabilelor de intrare) determină granularitatea acţiunii de comandă a regulatorului fuzzy. Astfel, pentru un număr de 5 variabile lingvistice (PM, Pm, ZE, Nm, NM) se obţine un număr de 25 de reguli.

Dacă se doreşte o rezoluţie mai bună a comenzii în vecinătatea referinţei, atunci se poate extinde numărul de variabile lingvistice pentru Nm, ZE, Pm (negativ zero, negativ foarte mic, pozitiv zero, pozitiv foarte mic etc.). Această granularitate ridicată în realizarea fuzificării determină creşterea numărului de reguli cu implicaţii privind implementarea (dimensiunea memoriei, timp de execuţie) şi performanţele sistemului de reglare.

Pentru deducerea regulilor pentru un regulator fuzzy (tab. 13.1) pot fi utilizate trei proceduri importante: pe baza experienţei operatorului şi a expertului în automatică, pe baza unui model lingvistic al procesului sau pe baza unui model neliniar.

Pentru eficienţa calculelor, utilizarea eficientă a memoriei şi analiza performanţelor sistemului de reglare (conducere) fuzzy se recomandă o reprezentare uniformă a funcţiilor de apartenenţă. Formele uzuale ale funcţiilor de apartenenţă includ funcţiile triunghiulare, trapezoidale şi de tip clopot. Aceste forme sunt uşor de parametrizat, prezintă eficienţă în manipulare, conduc la dimensiuni reduse ale memoriilor utilizate.

Cea mai simplă şi mai eficientă formă de reprezentare a funcţiilor de apartenenţă este forma triunghiulară.

Proiectarea regulatoarelor fuzzy se poate realiza direct sau pe baza unui model lingvistic al procesului condus şi pot fi regulatoare fuzzy PID, regulatoare bazate pe tabele, regulatoare cu auto – organizare, regulatoare fuzzy adaptive sau regulatoare neuro – fuzzy.

Principalele etape ale proiectării regulatoarelor fuzzy sunt:

1. **Alegerea variabilelor de intrare şi de ieşire** ale regulatorului fuzzy. Pentru alegerea corespunzătoare a acestor variabile se impune

obținerea unor informații apriori despre dinamica obiectului condus, neliniarități, stabilitate, varianța în timp a parametrilor etc. Pe baza acestor date și ținând seama de obiectivele conducerii, se alege tipul de regulator fuzzy.

De reținut că numărul mare de variabile de intrare determină creșterea complexității regulatorului, aceasta în special în cazul regulatoarelor fuzzy multivariabile [23, 61].

2. **Determinarea universurilor de discurs și a funcțiilor de apartenență** pentru fiecare variabilă de interes (intrări, stări, ieșiri). Alegerea universului de discurs pentru fiecare variabilă presupune a determina valorile minime și maxime posibile ale semnalelor de intrare ale regulatorului fuzzy, adică domeniile de funcționare ale variabilelor măsurate ale procesului. Alegerea acestui domeniu și rezoluția sa au un important impact asupra preciziei și cerințelor de calcul.

Universul de discurs (domeniul de variație) poate fi standardizat pentru toate variabilele. Cele mai folosite domenii standardizate sunt $[-1,1]$ și $[-6,6]$, dacă se folosesc numere reale sau $[-100,100]$, dacă se folosesc procente din valoarea reală a variabilelor de interes. Folosirea acestor domenii standardizate impune introducerea unor factori de scală și un nivel zero pentru fiecare semnal.

Odată determinat universul de discurs pentru fiecare variabilă, se alege forma funcțiilor de apartenență. Dacă se folosesc multe funcții de apartenență pentru fiecare variabilă, crește exponențial numărul de reguli și contrar, un număr redus de funcții de apartenență conduce la o flexibilitate scăzută a regulatorului, în special în cazul proceselor neliniare. Cel mai adesea se folosesc trei funcții de apartenență, iar variabilele lingvistice *mic*, *mediu* și *mare* sunt frecvent folosite.

Funcțiile de apartenență continue caracterizează mai bine schimbările variabilelor, însă necesită mai mult timp pentru inferență. Funcțiile de apartenență discrete sunt prezentate sub forma unor vectori. În acest caz, inferențierea este mai ușoară, însă dimensiunea vectorilor influențează precizia.

3. **Construcția bazei de reguli** care conține toate regulile pentru funcționarea regulatoarelor fuzzy reprezintă cea mai importantă etapă în proiectarea regulatoarelor fuzzy. Se poate alcătui baza de reguli folosind o bază de reguli normalizată sau standardizată ca în tabelul 13.1. În acest caz, eroarea și derivata erorii sunt folosite pentru a genera comenzi fuzzy similare comportărilor de tip PID – fuzzy. Fiecare element al matricei definite în acest tabel reprezintă o regulă. De notat că avantajul esențial al unui regulator fuzzy nu este abilitatea sa de a emula regulatoare liniare, ci

abilitatea de a controla procese neliniare într-o manieră simplă și ușor de înțeles. Dacă se cunosc parametrii unui regulator liniar, aceștia se pot folosi ca parametri inițiali pentru regulatorul fuzzy și astfel acordarea acestuia este mai simplă.

Regulile pot fi deduse din experiența și intuiția experților sau prin utilizarea unui model fuzzy al procesului condus.

4. **Analiza bazei de reguli** reprezintă o etapă importantă în proiectarea regulatoarelor fuzzy. Astfel, pornind de la importanța bazei de reguli în funcționarea unui regulator fuzzy se impune analiza următoarelor proprietăți specifice bazei de reguli [23]:

- consistența;
- completitudinea;
- redundanța;
- interacțiunea.

Consistența: O bază de reguli este inconsistentă dacă două sau mai multe reguli cu aceleași sau foarte apropiate părți condiționale (antecedente) generează diferite ieșiri. Aceste ieșiri diferite cauzează apariția unor vârfuri în cadrul reprezentării grafice a mulțimii fuzzy dată prin mecanismul de inferență al regulatorului.

O bază de reguli consistentă se caracterizează prin faptul că toate regulile cu diferențe mici în părțile de intrare generează ieșiri ușor diferite.

Completitudinea: O bază de reguli este completă dacă orice intrare diferită de zero generează o ieșire diferită de zero.

Există două cauze principale pentru apariția incompletitudinii unei baze de reguli. Prima cauză o reprezintă existența unei rupturi între funcțiile de apartenență, iar cea de a doua cauză o reprezintă omiterea uneia sau mai multor reguli.

Dacă prin X_i notăm partea condițională a regulii i și prin U_i partea consecință (inferențiată) a regulii i, atunci forma generală a unei reguli va fi:

Dacă X_i **Atunci** U_i, unde $i = 1, \cdots, n$, iar n este numărul de reguli.

Regulatorul este complet dacă:

$$\forall x \in X : \exists X_i(x) > \varepsilon$$

unde $i \in [1, n]$ și $\varepsilon \in (0, 1]$.

Astfel, în conformitate cu această relație, o bază de reguli este completă dacă există cel puțin o regulă care contribuie la ieșire printr-un număr mai mare decât ε.

Redundanța: O regulă este redundantă dacă există cel puțin o altă regulă în baza de reguli cu aceeași parte *dacă – atunci*. Redundanța se obține dacă se alocă reguli duble sau reguli care deja sunt acoperite de altele deja existente.

O regulă este redundantă dacă mulţimile sale sunt submulţimi ale altei reguli.

Interacţiunea: Interacţiunea se referă la independenţa părţilor condiţionale ale regulilor. Dacă relaţiile de intrare ale acestor părţi sunt disjuncte, atunci nu există interacţiuni între reguli.

Gradul de interacţiune al regulii R_i cu baza de reguli R poate fi măsurat prin [23, 61]:

$$\gamma_i = \|(X_i \circ R) - U_i\|$$

unde X_i şi U_i sunt intrări şi ieşiri ale regulii R_i, iar R este baza de reguli ($R = \bigcup R_i$).

5. **Proiectarea mecanismului de inferenţă** presupune alegerea metodei de inferenţă care poate fi **bazată pe reguli individuale** sau **pe compoziţie**.

Dacă admitem că intrările în regulatorul fuzzy sunt eroarea ε_k şi derivata (diferenţa) erorii $\Delta\varepsilon_k$, atunci regulile simple pot fi scrise sub forma:

$R^{(i)}$: **DACĂ** ε_k este $LE^{(i)}$ **şi** $\Delta\varepsilon_k$ este $\Delta LE^{(i)}$ **ATUNCI** u_k este $LU^{(i)}$

unde $LE^{(i)}$, $\Delta LE^{(i)}$ şi $LU^{(i)}$ sunt valori lingvistice (simboluri) din mulţimea de termeni LE, $L\Delta E$ şi LU. Funcţiile de apartenenţă sau mulţimile fuzzy $\mu_{LE}^{(i)}$, $\mu_{L\Delta E}^{(i)}$ şi $\mu_{LU}^{(i)}$ sunt definite pe domeniile E, ΔE şi U.

Interpretarea regulii de mai sus ca implicaţie de tip Mamdani [61] este dată ca o relaţie fuzzy $R^{(i)}$ definită pe $E \times \Delta E \times U$:

$$\forall \varepsilon, \Delta\varepsilon, u : \mu_R^{(i)}(\varepsilon, \Delta\varepsilon, u) = \min\left(\mu_{LE}^{(i)}(\varepsilon), \mu_{L\Delta E}^{(i)}(\Delta\varepsilon), \mu_{LU}^{(i)}(u)\right).$$

Pentru un set de reguli putem scrie:

$$\forall \varepsilon, \Delta\varepsilon, u : \mu_R(\varepsilon, \Delta\varepsilon, u) = \max\left(\mu_R^{(1)}(\varepsilon, \Delta\varepsilon, u), \cdots, \mu_R^{(n)}(\varepsilon, \Delta\varepsilon, u)\right)$$

unde fiecare regulă este definită ca mai sus.

Pentru a realiza inferenţa prin compoziţie considerăm valorile crisp ale erorii şi diferenţei erorii, ε_k şi $\Delta\varepsilon_k$, ca intrări ale modulului de fuzificare:

$$\forall \varepsilon_k : \mu_E^*(\varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } \varepsilon_k = \varepsilon_k^* \\ 0 & \text{pentru } \varepsilon_k \neq \varepsilon_k^* \end{cases}$$

$$\forall \Delta\varepsilon_k : \mu_{\Delta E}^*(\Delta\varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } \Delta\varepsilon_k = \Delta\varepsilon_k^* \\ 0 & \text{pentru } \Delta\varepsilon_k \neq \Delta\varepsilon_k^* \end{cases}.$$

Calculul părţii condiţionale a regulii presupune combinarea funcţiilor μ_E^* şi $\mu_{\Delta E}^*$ într-o funcţie de apartenenţă μ_A:

$$\forall \varepsilon, \Delta\varepsilon : \mu_A(\varepsilon, \Delta\varepsilon) = \min_{E \times \Delta E}\left(\mu_E^*(\varepsilon), \mu_{\Delta E}^*(\Delta\varepsilon)\right),$$

iar valoarea comenzii se obţine prin compoziţie între μ_A şi μ_R:

$$\forall u : \mu_U(u) = \max \min_{E, \Delta E}\left(\mu_A(\varepsilon, \Delta\varepsilon), \mu_R(\varepsilon, \Delta\varepsilon, u)\right).$$

Dezavantajul acestui tip de inferenţă bazată pe compoziţie constă în efortul mare de calcul şi cerinţe mari de memorare a lui μ_R.

Din fericire, această metodă de inferenţă este echivalentă cu metoda de inferenţă bazată pe reguli individuale. Demonstraţia acestei afirmaţii este prezentată în [23].

6. **Alegerea factorilor de scală** asigură normalizarea intrării şi ieşirii ţinând seamă de diversitatea domeniilor de variaţie ale variabilelor de intrare şi ieşire.

Factorii de scală joacă un rol similar cu factorii de amplificare în cadrul regulatoarelor convenţionale. O alegere necorespunzătoare a acestor factori de scală poate conduce la instabilitate, deteriorarea performanţelor SRA.

Pentru a exemplifica, se consideră factorul de scală N_u pentru comandă şi, respectiv, N_ε şi $N_{\Delta\varepsilon}$ factorii de scală pentru eroare şi diferenţa erorii, iar relaţia între aceste variabile are forma:

$$N_u \cdot \Delta u_k = F(N_\varepsilon \cdot \varepsilon_k, N_{\Delta\varepsilon} \cdot \Delta\varepsilon_k).$$

Factorii de scală se pot determina prin metode euristice sau prin metode analitice [23]. Determinarea acestora se bazează pe cerinţele de performanţă impuse sistemului de reglare cu regulator fuzzy.

7. **Alegerea metodei de defuzificare** presupune alegerea modului de conversie a variabilelor lingvistice în variabile numerice cu valori ferme. Pot fi utilizate diferite metode de defuzificare cu un grad mai mare sau mai redus de aproximare a variabilelor de ieşire ferme din variabile de intrare lingvistice. Astfel, în literatură sunt prezentate metoda centrului de greutate, metoda centrului sumelor, metoda centrului celei mai mari arii, metoda primului maxim etc. [23, 49, 61].

Una dintre cele mai folosite metode de defuzificare este metoda centrului ariilor. În acest caz, procesul de defuzificare se reduce la calculul valorii care divide mulţimea fuzzy rezultantă în două părţi cu arii egale.

Pentru funcții de apartenență discrete, acest punct se calculează cu relația:

$$u^* = \frac{\sum_{j=1}^{n} u_j \cdot \mu_u(u_j)}{\sum_{j=1}^{n} \mu_u(u_j)}$$

unde $\mu_u(u_j)$ este gradul de apartenență a termenului j la valoarea u_j din domeniul de variație discret.

Proiectarea regulatoarelor fuzzy ca transformări neliniare pentru procese neliniare reprezintă un demers cu un suport formal redus și o pronunțată activitate euristică. Simplitatea modului de operare generată de însăși esența modului de raționament uman în cadrul operațiilor de conducere a proceselor reprezintă principalul argument pentru clasa largă de aplicații a acestor regulatoare neliniare cu ridicată robustețe.

Combinarea tehnicilor fuzzy de conducere cu tehnicile neurale și algoritmii genetici au condus la arhitecturi hibride de sisteme neuro – fuzzy sau geno – fuzzy cu performanțe superioare față de regulatoarele fuzzy convenționale [29, 33].

13.5. Sisteme de conducere bazate pe rețele neurale

13.5.1. Rețele neurale artificiale

Rețelele neurale artificiale (RNA) reprezintă modele simplificate ale creierului uman. Ca și creierul uman, rețelele neurale artificiale sunt alcătuite din neuroni interconectați între ei prin intermediul sinapselor. Astfel, fiecare neuron constă dintr-o celulă la care se atașează mai multe dendrite (intrări) și un singur axon (ieșire). O sinapsă produce o reacție chimică ca răspuns la o intrare. Rețelele biologice sunt capabile să proceseze electrochimic milioane de stimuli de intrare cu o viteză cu câteva ordine de mărime mai redusă decât cele mai performante calculatoare actuale.

Primele rezultate consistente privind modelarea matematică a rețelelor de neuroni sunt datorate lui McCulloch (1943). Conceptul de învățare la nivel cortical a fost propus de Hebb, în 1949, care evidențiază modificarea continuă a ponderilor conexiunilor neuronale, pe măsură ce organismul învață diferite taskuri funcționale.

În 1958, Rosenblatt a propus un model neural numit „PERCEPTRON“, care poate învăța să clasifice anumite mulțimi de patternuri similare sau distincte.

Primele aplicații ale rețelelor neurale pentru conducere se datorează lui Widrow și Smith (1960). Ei au dezvoltat o rețea cu un singur strat, denumită ADALINE (Adaptive LINear Element), utilizată pentru stabilizarea și comanda unui pendul invers. Kohonen (1988) și Anderson (1972) au dezvoltat memorii „asociative“ și „interactive“ și „învățarea competitivă“. Algoritmul „backpropagation“ a fost studiat de către Werbos (1974) și dezvoltat ulterior de Rumelhart (1986) și alții, conducând la conceptul Multi–Layer Perceptron (MLP).

Creșterea interesului pentru modelele conecționiste a fost determinată de dezvoltarea unor noi arhitecturi, a unor noi algoritmi de învățare, de paralelismul intrinsec al unor astfel de structuri de procesare, precum și de rezultatele obținute în domeniul implementărilor VLSI și a proiectării asistate de calculator, care au permis construirea unor mașini de calcul cu un înalt grad de paralelism.

În domeniul reglării automate, modelele conecționiste oferă o modalitate nouă de abordare a metodelor de identificare și conducere, atât pentru sisteme dinamice liniare, cât și pentru sisteme neliniare [14, 33].

Rețelele artificiale neurale au următoarele proprietăți relevante pentru conducerea inteligentă a proceselor:

- *capacitatea de învățare* din date experimentale și abilitatea de a generaliza în prezența datelor ce nu au fost prezente în setul de date de antrenare;
- *capacitatea de aproximare funcțională*;
- *procesarea distribuită a informației*; rețelele neurale artificiale au o structură paralelă, care permite implementarea hardware cu un ridicat nivel al toleranței la defecte;
- *viteză ridicată de procesare în timp real.*

Principalele domenii în care RNA și-au probat utilitatea și eficiența sunt: recunoașterea formelor, modelare, identificare, conducere adaptivă, filtrare etc. cu aplicații în aeronautică, sisteme de producție, robotică, telecomunicații etc.

Arhitectura unei RNA conține un număr de neuroni ca elemente active de procesare și conexiunile între aceștia. Un neuron biologic este o celulă care recepționează stimuli electrochimici de la surse multiple (senzori) și răspunde prin generarea unor impulsuri electrice ce vor fi transmise altor neuroni sau celule efectoare (mușchi sau glande). Un singur neuron din cei $10^{10} - 10^{12}$ neuroni biologici este conectat cu alte sute de mii de neuroni, conexiunile realizându-se prin intermediul a două tipuri de sinapse: *excitatoare* sau *inhibitoare*.

Neuronii sunt compuşi din *nucleu*, corpul celulei, numeroase legături dendritice care produc conexiuni de la alţi neuroni prin sinapse şi un trunchi axon ce transportă o acţiune potenţială de ieşire la alt neuron prin legături terminale şi sinapse.

Pentru a specifica o reţea neurală artificială sunt necesare următoarele elemente:

- numărul de neuroni şi modul de interconectare;
- modul în care semnalele sunt combinate la intrarea neuronului;
- modul de propagare a semnalelor de la intrare la ieşire;
- metoda de învăţare folosită la antrenarea reţelei;
- funcţiile de activare şi ecuaţiile dinamice care generează comportarea sistemului;
- numărul straturilor de intrare, de ieşire şi ascunse.

Modelul de bază al unui neuron artificial (model simplificat al neuronului biologic) constă dintr-un sumator ponderat şi o funcţie de activare (fig. 13.19).

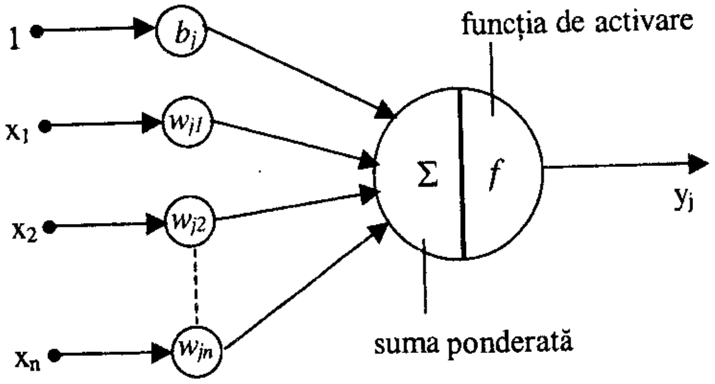


Fig. 13.19

În această figură se prezintă un neuron în stratul j, unde x_1, ..., x_n sunt intrări, w_{j1}, ..., w_{jn} sunt ponderi, b_j este o valoare constantă de polarizare (bias), f este funcţia de activare, iar y_j este ieşirea neuronului.

Suma ponderată a semnalelor de intrare este, astfel:

$$s_j(t)=\sum_{i=1}^{n} w_{ji}x_i(t)+b_j \tag{13.31}$$

sau, dacă se notează prin W_j matricea ponderilor, iar prin $x\in\Re^n$ vectorul intrărilor:

$$s_j(t)=W_jx+b_j. \tag{13.32}$$

Funcţia de activare $f(s)$ (unde s este suma ponderată a intrărilor) poate avea diverse forme (treaptă, rampă, tangentă hiperbolică, sigmoid etc.). În figura 13.20 sunt prezentate tipuri uzuale de funcţii de activare.

Constanta de polarizare b_j permite deplasarea curbei de-a lungul axei s, fixând pragul la care neuronul se activează.

Funcţia de activare „sigmoid" este populară pentru aplicaţiile reţelelor neurale, deoarece este diferenţiabilă şi monotonă, cerinţe pentru algoritmul „backpropagation".

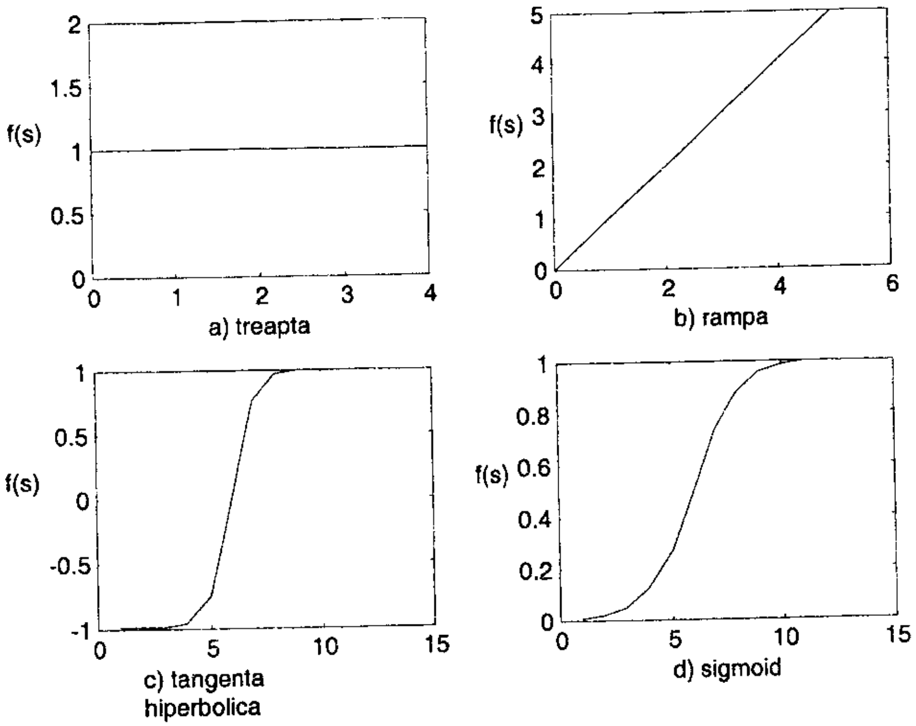


Fig. 13.20

Ecuaţia pentru funcţia sigmoid este:

$$f(s)=\frac{1}{1+e^{-s_j}} \tag{13.33}$$

În mod similar, pot fi definite ecuaţiile pentru diferitele tipuri de funcţii de activare [33].

13.5.2. Arhitecturi de reţele neurale artificiale

Aşa cum s-a menţionat, o RNA este o reţea de neuroni cuplaţi prin conexiuni sinaptice. În figura 13.21 se prezintă o arhitectură de RNA cu trei straturi. Stratul de intrare conţine trei neuroni, stratul ascuns conţine trei neuroni, iar stratul de ieşire conţine doi neuroni.

În această arhitectură de RNA, cunoscută şi sub denumirea de arhitectură „feedforward", toţi neuronii dintr-un strat sunt complet conectaţi la toţi neuronii din stratul următor. Pentru această reţea multistrat, total conectată, nu există restricţii asupra numărului de neuroni în fiecare strat şi asupra numărului de staturi ascunse.

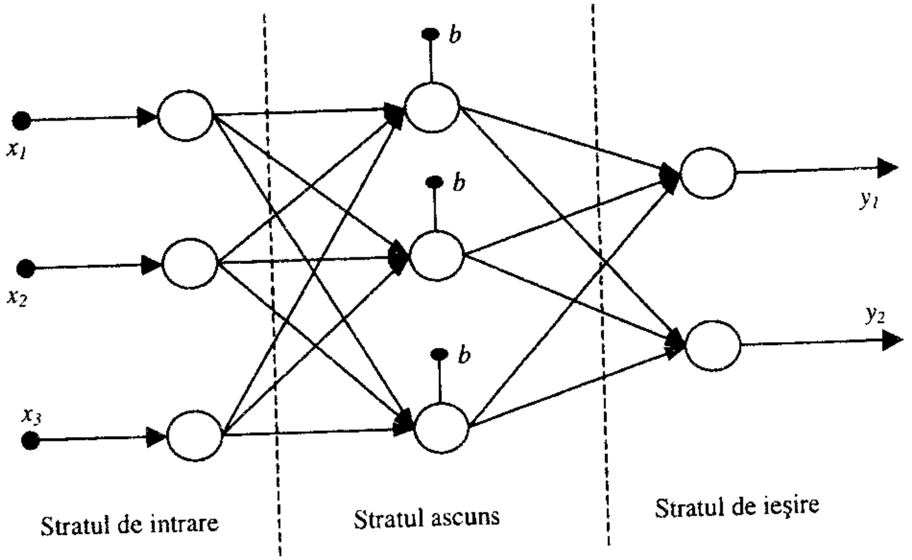


Fig. 13.21

O altă arhitectură uzuală în aplicaţiile specifice identificării şi conducerii proceselor este arhitectura de reţea recurentă cu reacţie.

Reţelele de tip feedforward sau Multilayer Perceptron (MLP) pot fi generalizate în scopul funcţionării într-o manieră recurentă prin conectarea ieşirilor la una sau mai multe unităţi de procesare din straturile anterioare sau de la intrare. Incorporarea reacţiei determină schimbări în funcţionare şi învăţare, în anumite situaţii având avantajul creşterii puterii de calcul a reţelei respective.

În figura 13.22 se prezintă arhitectura unei reţele recurente cu un singur strat cu trei neuroni şi două intrări.

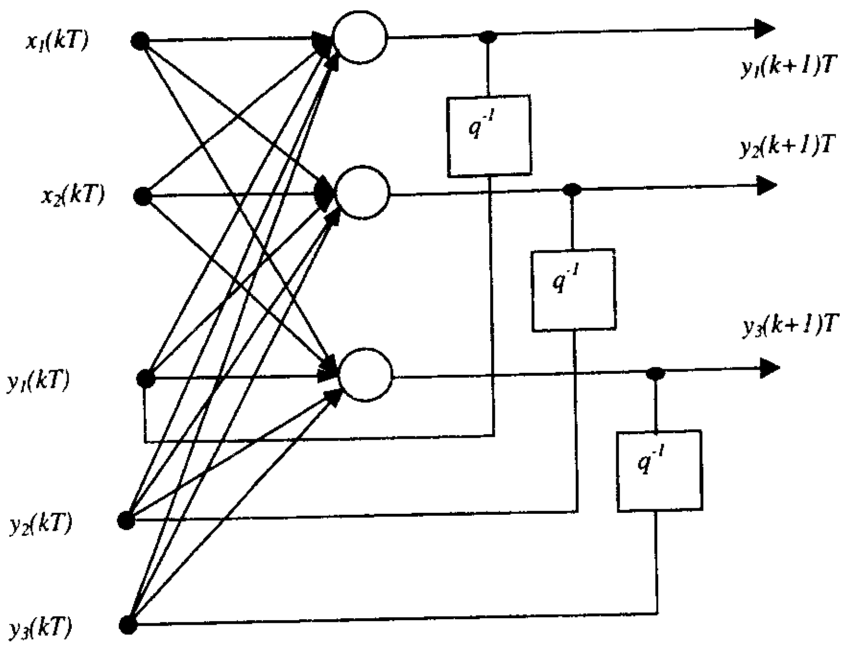


Fig. 13.22

Dacă în figura 13.22 intrările apar la momentul (kT) şi ieşirile sunt predictate la momentul $(k+1)T$, atunci reţeaua poate fi reprezentată într-o formă matriceală:

$$y_{k+1} \equiv y(k+1)T \equiv W_1 y_k + W_2 x_k, \tag{13.34}$$

unde $x_k \equiv x(kT) \in \Re^2$, $y_k \equiv y(kT) \in \Re^3$, iar W_1 şi W_2 sunt matrice de ponderare de dimensiuni corespunzătoare.

Într-o reţea recurentă, ecuaţiile nodurilor sunt descrise prin ecuaţii cu diferenţe sau ecuaţii diferenţiale. O reţea recurentă, cu un caracter dinamic intrinsec, poate învăţa să aproximeze funcţii de timp sau poate executa o secvenţă de operaţii al căror scop final este de a permite ieşirii (stării) reţelei să conveargă la un punct fix (stare de echilibru). Astfel, reţelele recurente pot realiza taskuri mult mai complexe decât reţelele feedforward statice.

Modelul matematic general care poate să descrie funcţionarea unei reţele neurale cu reacţii (recurente) are forma:

$$y_{k+1} = F(y_k, W, x_k), \tag{13.35}$$

unde F este o funcţie vectorială neliniară de intrări şi ieşiri, iar $y_k \in \Re^n$, $x_k \in \Re^m$ şi W reprezintă matricea de ponderare a variabilelor y_k şi x_k.

Forma matricei W de ponderare determină tipul reţelei recurente [33]. În [33, 80] sunt prezentate în detaliu tipurile uzuale de arhitecturi de reţele neurale artificiale.

13.5.3. Algoritmi de antrenare a RNA

Învăţarea (antrenarea) în contextul unei reţele neurale este un proces de ajustare a ponderilor şi polarizărilor într-o asemenea manieră, încât pentru intrări date, se obţin răspunsuri sau ieşiri dorite.

Algoritmii de învăţare pentru reţele neurale se pot clasifica în două categorii principale:

a) învăţare supervizată: reţeaua primeşte la intrare datele ce reprezintă domeniul intrărilor împreună cu ieşirile dorite. Ponderile sunt ajustate până când eroarea între ieşirile actuale şi cele dorite atinge o valoare minimă dată. În acest proces se impune specificarea vectorului ieşirilor dorite ale reţelei. Din categoria algoritmilor de învăţare supervizată menţionăm: regula Delta, Backpropagation, învăţarea Hebbiană, algoritmi stocastici etc.;

b) învăţare nesupervizată: este cunoscută sub denumirea de adaptare în buclă deschisă, deoarece nu se folosesc informaţii prin reacţie pentru actualizarea parametrilor reţelei. Aplicaţiile pentru învăţarea nesupervizată includ recunoaşterea vorbirii şi compresia imaginilor. Reţelele cu învăţare nesupervizată includ reţelele Kohonen KSOM (Kohonen Self – Organizing Map), care sunt reţele competitive şi reţelele ART (Grossberg Adaptive Resonance Theory), care pot fi folosite pentru învăţarea on – line [33].

Algoritmul Back-Propagation (BPA) este o metodă de învăţare supervizată pentru antrenarea RNA şi reprezintă una dintre cele mai comune tehnici de antrenare. Această tehnică are la bază metoda de optimizare a gradientului descendent, ceea ce impune utilizarea unor funcţii de activare diferenţiabile.

Fiecare patern de antrenare (intrarea reţelei) este *propagat înainte*, strat cu strat, până când se obţine ieşirea reţelei. Ieşirea calculată va fi comparată cu valoarea dorită, determinându-se eroarea dintre aceste două valori. Erorile de la ieşirea reţelei vor fi *propagate înapoi* la intrare prin straturile ascunse, pentru ajustarea ponderilor reţelei. Legăturile înapoi sunt folosite, atât pentru faza de învăţare, cât şi pentru faza de operare.

Gradientul erorii, calculat în funcţie de ponderile straturilor ascunse este obţinut propagând înapoi eroarea de la stratul de ieşire. Deoarece această operaţie se realizează în mod separat pentru fiecare strat, adaptarea şi actualizarea ponderilor nu sunt operaţii sincrone.

Dacă indicele de performanţă sau funcţia de cost J se scrie sub forma:

$$J = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M}(d_j - y_j)^2, \tag{13.36}$$

unde d_j şi y_j sunt ieşirea dorită şi, respectiv, ieşirea actuală a reţelei, atunci, prin aplicarea metodei celei mai abrupte coborâri (gradient – descent), se obţine legea de variaţie a ponderilor:

$$\Delta w_{ji} = -\mu \frac{\partial J}{\partial w_{ji}} \tag{13.37}$$

unde μ este o constantă.

Din ecuaţiile (13.36) şi (13.37) rezultă:

$$\frac{\partial J}{\partial w_{ji}} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\frac{\partial}{\partial w_{ji}}(d_j - y_j)^2$$

sau folosind regula lanţului:

$$\frac{\partial J}{\partial w_{ji}} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\frac{\partial}{\partial w_{ji}}(d_j - y_j)^2\frac{\partial y_j}{\partial w_{ji}} = -\frac{2}{M}\sum_{j=1}^{M}(d_j - y_j)\frac{\partial y_j}{\partial w_{ji}} \tag{13.38}$$

Dacă funcţia de activare este o funcţie sigmoid dată în (13.33), atunci derivata acesteia este:

$$\frac{\partial f}{\partial s_j} = -\frac{e^{-s_j}}{\left(1+e^{-s_j}\right)^2} = \left[\frac{1}{1+e^{-s_j}} - \left(\frac{1}{1+e^{-s_j}}\right)^2\right]$$

sau

$$\frac{\partial f}{\partial s} = -\left[f(s) - f^2(s)\right] \tag{13.39}$$

Deoarece $f(s)$ este ieşirea neuronului y_j, atunci ecuaţia (13.39) poate fi scrisă astfel:

$$\frac{\partial y_j}{\partial s_j} = y_j(1 - y_j). \tag{13.40}$$

Din (13.38), folosind din nou regula lanţului, rezultă:

$$\frac{\partial y_j}{\partial w_{ji}} = \frac{\partial y_j}{\partial s_j}\cdot\frac{\partial s_j}{\partial w_{ji}} \tag{13.41}$$

Dacă în ecuaţia (13.31) se consideră b_j ca fiind w_{j0}, atunci:

$$s_j = \sum_{i=0}^{n} w_{ji}x_i \tag{13.42}$$

şi astfel

$$\frac{\partial s_j}{\partial w_{ji}} = \frac{\partial}{\partial w_{ji}}\sum_{i=0}^{n} w_{ji}x_i = x_i. \qquad (13.43)$$

Introducând ecuaţiile (13.40) şi (13.43) în (13.41) se obţine:

$$\frac{\partial y_j}{\partial w_{ji}} = y_j(1-y_j)x_i, \qquad (13.44)$$

iar din (13.38)

$$\frac{\partial J}{\partial w_{ji}} = -\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}(d_j - y_j)y_j(1-y_j)x_i \qquad (13.45)$$

sau

$$\frac{\partial J}{\partial w_{ji}} = -\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\delta_j x_i, \qquad (13.46)$$

unde

$$\delta_j = (d_j - y_j)y_j(1-y_j). \qquad (13.47)$$

Dacă introducem ecuaţia (13.46) în (13.37) se obţine legea de modificare a ponderilor:

$$\Delta w_{ji} = \eta\sum_{j=1}^{M}\delta_j x_i, \qquad (13.48)$$

unde $\eta = \frac{\mu}{M}$.

Se poate observa că aceasta duce la un increment ponderat, denumită regula delta, pentru un neuron particular:

$$\Delta w_{ji}(kT) = \eta\delta_j x_i, \qquad (13.49)$$

unde η este viteza de învăţare şi are o valoare cuprinsă între 0 şi 1. În acest caz, ponderea la pasul (kT) se poate calcula cu relaţia:

$$w_{ji}(kT) = w_{ji}(k-1)T + \Delta w_{ji}(kT)$$

sau

$$w_{ji}(kT) = w_{ji}(k-1)T + \eta\delta_j x_i. \qquad (13.50)$$

Considerăm o reţea cu trei straturi, unde $(l=1)$ reprezintă stratul de intrare, $(l=2)$ reprezintă stratul ascuns, iar $(l=3)$ reprezintă stratul de ieşire. Algoritmul Back – Propagation începe cu stratul al treilea, unde b_j este cunoscut şi δ_j se poate calcula folosind ecuaţia (13.47) şi ponderile se ajustează conform relaţiei (13.49). Pentru a ajusta ponderile pe stratul ascuns $(l=2)$, ecuaţia (13.47) se înlocuieşte cu:

$$(\delta_j)_l = [y_j(1-y_j)]_l\left[\sum_{j=1}^{n} w_{ji}\delta_j\right]_{l+1}. \qquad (13.51)$$

Prin urmare, valorile δ pentru stratul l sunt calculate folosind ieşirile neuronilor din stratul l (stratul ascuns), împreună cu suma produselor w şi δ din stratul de ieşire $(l+1)$. Procesul de propagare inversă continuă până ce toate ponderile au fost ajustate. Pentru un nou set de intrări, informaţia se propagă înainte prin reţea (folosind noi ponderi) şi se calculează erorile ieşirii reţelei (stratul de ieşire).

Acest proces continuă până ce indicele de performanţă atinge o valoare minimă acceptabilă, într-un număr limitat de iteraţii de antrenare. În cazul în care se obţine un minim local pentru un timp precizat de antrenare, se poate reporni algoritmul cu un set nou de date de antrenare.

Pentru a exemplifica modul cum se antrenează o reţea neurală folosind BPA, considerăm o reţea feedforward cu trei straturi [14].

Exemplul 13.1:

Pentru reţeaua din figura 13.23, intrările curente sunt $x_1 = 0.3$ *şi* $x_2 = 0.5$, *iar ieşirea dorită,* $d_j = 1$.

Se consideră că matricea ponderilor care există şi polarizările pentru stratul ascuns sunt:

$$w_j = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.5 \\ 0.3 & 2.0 \\ 2.0 & 3.0 \end{bmatrix};\ b_j = \begin{bmatrix} 1.0 \\ -1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}.$$

Pentru stratul de ieşire se consideră $w_j = [2.0 \quad 1.5 \quad 1.0]$ *şi* $b_j = [-4.0]$.

Se cere a calcula ieşirea y_j *şi noile valori pentru ponderi şi polarizări.*

Considerăm o viteză de învăţare $\eta = 0.75$.

Soluţie:

Propagarea înainte:

Pentru stratul ascuns (l=1), putem scrie în formă matriceală sumele s_1, s_2 *şi* s_3*:*

$$\begin{bmatrix} s_1^1 \\ s_2^1 \\ s_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \\ w_{31} & w_{32} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{10} \\ w_{20} \\ w_{30} \end{bmatrix}$$

iar funcţiile de activare pentru j=1, 2 şi 3 sunt:

$$y_1 = \frac{1}{1+e^{-s_1}},\ y_2 = \frac{1}{1+e^{-s_2}},\ y_3 = \frac{1}{1+e^{-s_3}}.$$

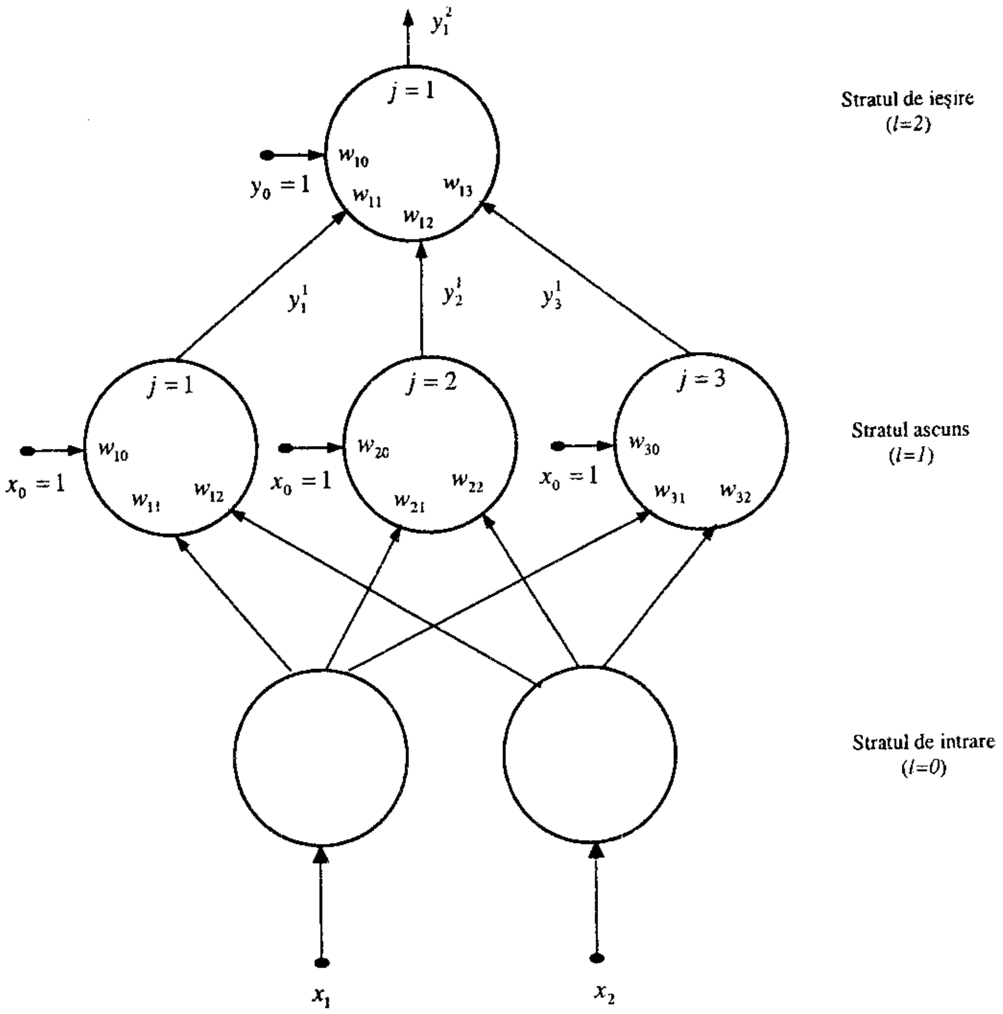


Fig. 13.23

Ieşirea pentru stratul de ieşire (l=2) este:

$$y_j = y_1 = \frac{1}{1+e^{-s_1}},$$

unde $s_1^2 = w_{10} + w_{11}y_1 + w_{12}y_2 + w_{13}y_3$.

Dacă se introduc valorile ponderilor iniţiale, se obţine:

$$\begin{bmatrix} s_1^1 \\ s_2^1 \\ s_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.5 \\ 0.3 & 2.0 \\ 2.0 & 3.0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.0 \\ -1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$s_1^1 = 2.05,\ s_2^1 = -0.41,\ s_3^1 = 2.6$$

$$y_1^1 = 2.39,\ y_2^1 = 9.09,\ y_3^1 = 2.047.$$

Pentru stratul de ieşire $s_1^2 = 16.46$ *şi* $y_1^2 = 1.35$.

Propagarea inversă:

Pentru stratul de ieşire:

$$\delta_j = y_j(1-y_j)(d_j - y_j).$$

Deoarece j=1, se obţine:

$$\delta_1 = y_1^2(1-y_1^2)(1-y_1^2) = 1.35(1-1.35)(1-1.35) = 0.16.$$

Prin aplicarea regulii delta $\Delta w_{ji}(kT) = \eta\delta_j x_i$, *se obţin variabilele* Δw_{ji}:

$$\Delta w_{10}^2 = 0.5 * 0.16 * 1 = 0.08$$

$$\Delta w_{11}^2 = 0.5 * 0.16 * 2.39 = 0.192$$

$$\Delta w_{12}^2 = 0.5 * 0.16 * 9.09 = 0.72$$

$$\Delta w_{13}^2 = 0.5 * 0.16 * 2.047 = 0.197$$

iar noile ponderi pentru stratul de ieşire sunt:

$$w_{11}^2 = 2.0 + 0.192 = 2.192$$

$$w_{12}^2 = 1.5 + 0.72 = 2.22$$

$$w_{13}^2 = 1.0 + 0.197 = 1.197$$

$$b^2 = -4 + 0.08 = -3.92.$$

Pentru stratul ascuns, aplicând relaţia:

$$[\delta_j]_l = [y_j(1-y_j)]_l \left[\sum w_{ji}\delta_j\right]_{l+1},$$

se pot obţine noile valori pentru ponderi.

Mai întâi, admiţând că stratul de ieşire (l+1) are doi neuroni, se calculează δ_1 *şi* δ_2.

Pentru stratul ascuns, valorile $[\delta_j]_l = \delta_j^1$ *se obţin prin aplicarea formulei de calcul:*

$$j{=}1:\ \delta_1^1 = y_1^1(1-y_1^1)\left[w_{11}^2\delta_1^2 + w_{21}^2\delta_2^2\right]$$

$$j{=}2:\ \delta_2^1 = y_2^1(1-y_2^1)\left[w_{12}^2\delta_1^2 + w_{22}^2\delta_2^2\right]$$

$$j{=}3:\ \delta_3^1 = y_3^1(1-y_3^1)\left[w_{13}^2\delta_1^2 + w_{23}^2\delta_2^2\right].$$

Întrucât în exemplul considerat în stratul de ieşire avem un singur neuron, rezultă $\delta_2^2 = 0$, *astfel că valorile* δ_i^1 *sunt:*

$$\delta_1^1 = 2.39(1-2.39) * 2.192 * 0.16 = -1.16$$

$$\delta_2^1 = 9.09(1-9.09) * 2.22 * 0.16 = -26.12$$

$$\delta_3^1 = 2.047(1-2.047) * 1.197 * 0.16 = -0.4.$$

Prin aplicarea regulii delta, se obțin incrementele ponderilor pentru stratul ascuns:

$$\Delta w_{10} = 0.5*(-1.16)*1 = -0.58$$
$$\Delta w_{11} = 0.5*(-1.16)*0.3 = -0.174$$
$$\Delta w_{12} = 0.5*(-1.16)*0.5 = -0.29$$
$$\Delta w_{20} = 0.5*(-26.12)*1 = -13.06$$
$$\Delta w_{21} = 0.5*(-26.12)*0.3 = -3.91$$
$$\Delta w_{22} = 0.5*(-26.12)*0.5 = -6.53$$
$$\Delta w_{30} = 0.5*(-0.4)*1 = -0.2$$
$$\Delta w_{31} = 0.5*(-0.4)*0.3 = -0.06$$
$$\Delta w_{32} = 0.5*(-0.4)*0.5 = -0.1.$$

Noile ponderi și polarizările pentru stratul ascuns sunt:

$$w_{11}^n = 1.0 - 0.174 = 0.83 \qquad w_{21}^n = 0.3 - 3.91 = -3.61$$
$$w_{12}^n = 1.5 - 0.29 = 1.21 \qquad w_{22}^n = 2.0 - 6.53 = -4.53$$
$$w_{31}^n = 2.0 - 0.06 = 1.94 \qquad w_{23}^n = 3.0 - 0.1 = 2.9$$
$$w_{10} = 1.0 - 0.58 = 0.42$$
$$w_{20} = -1.5 - 13.06 = -14.56$$
$$w_{30} = 0.5 - 0.2 = 0.3.$$

Astfel, matricea ponderilor și vectorul polarizărilor pentru stratul ascuns au forma:

$$w_j = \begin{bmatrix} 0.83 & 1.21 \\ -3.61 & -4.53 \\ 1.94 & 2.9 \end{bmatrix}, \quad b_j = \begin{bmatrix} 0.42 \\ -14.56 \\ 0.3 \end{bmatrix}.$$

13.5.4. Rețele neurale aplicate pentru modelarea și conducerea proceselor

Rețelele neurale artificiale, ca modele specifice ale structurilor neurale biologice, prezintă avantajul procesării distribuite a informației și un inerent potențial pentru calcule paralele. Arhitecturile de tip multistrat directe și recurente joacă un rol deosebit în aplicații de identificare și conducere. O particularitate esențială a rețelelor neurale care folosesc algoritmul BP pentru antrenare este aceea că nu se cer cunoștințe despre proces pentru a fi emulat. Faptul că ele învață din experiență mai repede decât din programare pot fi considerate a face parte din categoria modelelor de tip „cutie neagră" („black box").

În cazul în care dispunem de un set de date de intrare/ieșire dintr-un proces, se poate utiliza o rețea neurală pentru a modela dinamica unui proces necunoscut. Dacă aceste date disponibile utilizate pentru antrenare acoperă întreaga gamă operațională a procesului, atunci se pot obține, atât modele liniare, cât și modele neliniare ale procesului necunoscut.

Există patru strategii importante de utilizare a unei RNA pentru modelarea proceselor (fig. 13.24).

a) *Modelarea directă* (forward plant modelling) (fig. 13.24*a*) presupune antrenarea unei rețele neurale, plasat în paralel cu procesul ce trebuie modelat, pentru a aproxima dinamica intrare-ieșire a procesului. În acest caz, semnalul de antrenare al rețelei este reprezentat de eroarea dintre ieșirea reală a procesului și ieșirea rețelei.

b) *Modelarea inversă – varianta generală* (inverse plant modelling) (fig. 13.24*b*) presupune utilizarea unei rețele neurale pentru a obține modelul invers al procesului. Ca intrare a procesului, respectiv a rețelei neurale, se folosește un semnal de intrare sintetic. Ieșirea rețelei va fi comparată cu semnalul de antrenare, iar ca semnal de antrenare se folosește eroarea. Pentru ca modelul invers să fie bine definit, este necesar ca setul de exemple de antrenare să fie unic, cerință satisfăcută dacă procesul este inversabil sau datele de antrenare pentru un proces neinversabil sunt conținute într-o zonă restrânsă a spațiului intrărilor, unde procesul este local inversabil.

c) *Modelarea inversă – varianta specializată* (inverse plant modelling) (fig. 13.24*c*) presupune ca prim pas construcția unui model direct al procesului. Diferența dintre răspunsul procesului și ieșirea dorită a acestuia va constitui un semnal de eroare ce va fi transmis înapoi prin modelul direct până la ieșirea regulatorului neural, în scopul ajustării parametrilor modelului invers [33, 80]. Regulatorul neural va constitui modelul invers al procesului. O asemenea metodă este mai eficientă decât metoda anterioară, fiind o metodă orientată pe aplicație. Rețeaua neurală ce modelează regulatorul poate fi antrenată în zona de interes.

d) *Modelarea operațională* (fig. 13.24*d*) presupune realizarea unui proces de învățare, în paralel cu activitatea unui operator „expert" care acționează asupra procesului, răspunsul lor formând ieșirea dorită a rețelei, mărime ce va fi utilizată pentru antrenarea rețelei. Ca și în cazul strategiilor de modelare anterioare, trebuie să se asigure faptul că setul de antrenare conține destule date de antrenare în domeniul relevant de funcționare și că vectorul intrărilor rețelei conține toată informația care este disponibilă operatorului.

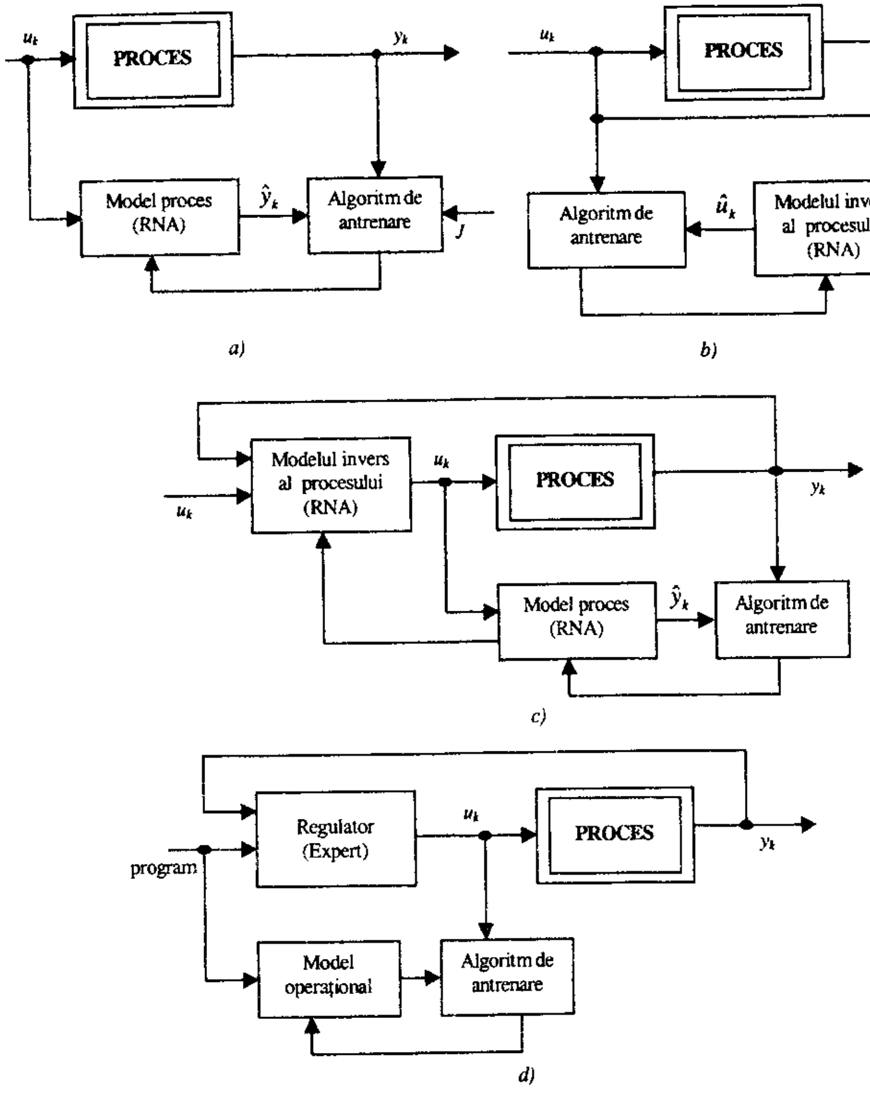


Fig. 13.24

Rețelele neurale și-au probat eficiența în conducerea proceselor tehnice, nu numai prin rezolvarea unei probleme primare de obținere a modelelor matematice, ci și ca regulatoare neurale bazate pe modelarea inversă a dinamicii procesului, inclusiv regulatoare neurale bazate pe modelul intern sau regulatoare bazate pe tehnologia predictivă de conducere [14, 33, 80].

O simplă aplicație a RNA pentru conducerea unui proces este de a emula funcționarea unor regulatoare existente. În figura 13.25 se arată cum semnalul de comandă generat de un regulator cuplat la proces poate fi folosit pentru antrenarea unui regulator neural și, în final, să fie înlocuit de acesta.

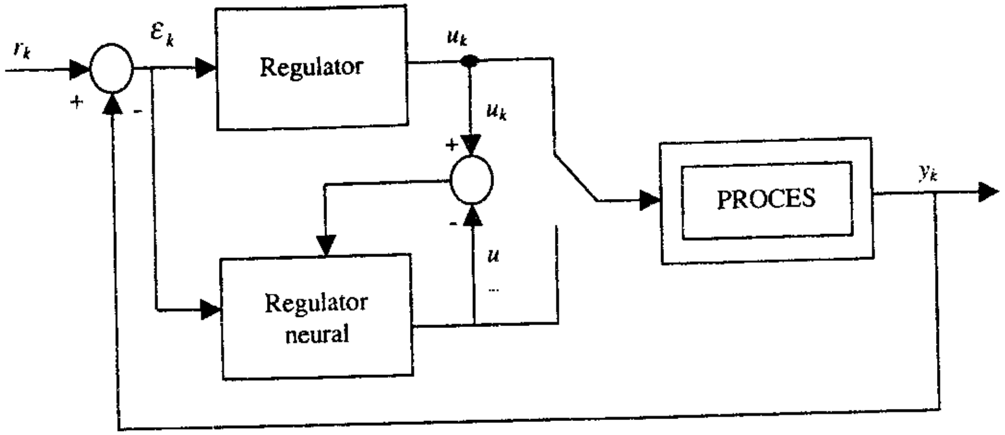


Fig. 13.25

Principial, algoritmul BP poate fi utilizat pentru antrenarea regulatorului neural dacă eroarea ε_k se folosește pentru antrenarea acestuia. Astfel, utilizarea unui algoritm BP având ca semnal de antrenare eroarea sistemului de reglare automată se poate obține o eroare a comenzii care permite antrenarea regulatorului neural. În figura 13.26 se prezintă o schemă de principiu pentru antrenarea unui regulator neural pe baza algoritmului BP al erorii ε_k trecută prin modelul procesului [14].

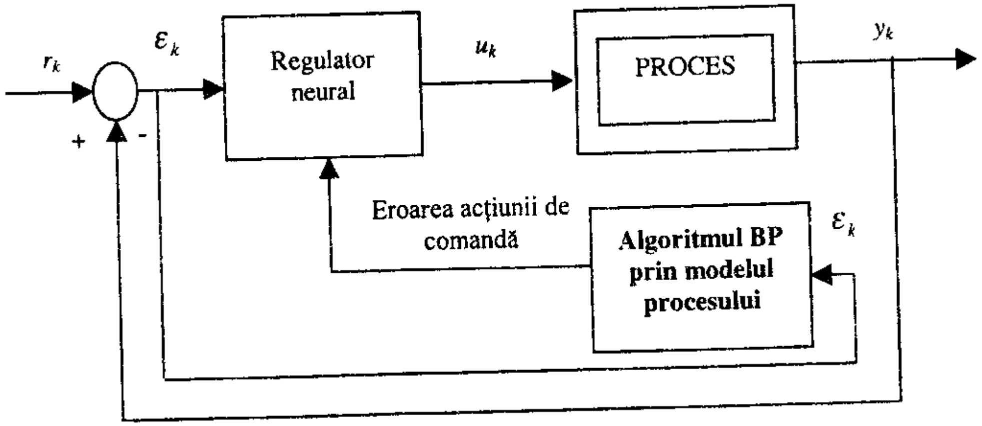


Fig. 13.26

În această schemă se folosesc două structuri de reţele neurale: una pentru a modela procesul şi a aplica un algoritm BP având ca semnal de antrenare ε_k şi o alta pentru a modela regulatorul neural care este antrenat în funcţie de erorile acţiunilor de comandă.

13.6. Algoritmi genetici

Elementul de bază al unui algoritm genetic este cromozomul. Acesta conţine informaţie genetică pentru o soluţie dată şi este codificată sub forma unui şir de numere binare. Spre exemplu, un număr binar de opt biţi 11001001 reprezintă un cromozom care conţine opt gene. Iniţial, o populaţie de cromozomi creată aleator reprezintă un număr de soluţii la o problemă dată.

Algoritmul genetic reprezintă o metodă de căutare a unei soluţii la o problemă dată prin trecerea de la o populaţie de „cromozomi" (soluţii potenţiale ale problemei de rezolvat) la o nouă populaţie, apelând la operatori de inspiraţie genetică: *încrucişarea*, *mutaţia* şi *inversiunea*.

Algoritmii genetici sunt proceduri de căutare şi optimizare bazate pe mecanismele geneticii şi ale selecţiei naturale. Ei combină supravieţuirea artificială a celui mai „bun" individ cu operatorii genetici, care sunt abstractizări ai celor din natură.

Pentru a utiliza algoritmii genetici în rezolvarea unei probleme se impune întâi a codifica sub forma unor şiruri binare de lungime finită elementele ajustabile (variabile de decizie) ale problemei şi a ataşa problemei o funcţie obiectiv (un indice de performanţă) utilizată pentru a găsi cele mai bune soluţii dintr-o mulţime de soluţii posibile. Algoritmii genetici folosesc populaţii de soluţii potenţiale, ceea ce îi diferenţiază faţă de tehnicile adaptive prin explorarea spaţiului de căutare în mai multe puncte simultan.

Algoritmii genetici sunt utilizaţi în rezolvarea multor probleme de căutare şi optimizare, ca urmare a proprietăţilor şi performanţelor acestora dintre care:

- implementare uşoară în arhitecturi paralele;
- pot rezolva probleme de optimizare cu restricţii, inclusiv multicriteriale;
- pot rezolva probleme de optimizare neliniară cu funcţii obiectiv discontinue.

O reprezentare simplă a unui algoritm genetic este arătată în figura 13.27.

ALGORITM GENETIC
Start
t := 0
Iniţializează P(t); {creează o populaţie aleatoare P(t)}
Evaluează P(t); {evaluează funcţia obiectiv pentru fiecare membru al populaţiei P(t)}
t := t + 1; {creşte timpul contorului}
Selectează o subpopulaţie P'(t) din P(t);
Recombină P'(t); {recombină „genele" părinţilor selectaţi}
Evaluează P'(t); {evaluează noua populaţie şi selectează pe cea mai bună}
Stop
Stop

Fig. 13.27

Un algoritm genetic realizează o căutare multidirecţională prin menţinerea populaţiei de soluţii potenţiale la fiecare pas *t*, numit generaţie, şi încurajarea formării şi schimbului de informaţie între aceste direcţii. Această populaţie suportă o evoluţie simulată: la fiecare generaţie soluţiile „relativ bune" se reproduc, în timp ce soluţiile „relativ rele" dispar.

Algoritmul genetic foloseşte trei operatori:

- selecţia;
- încrucişarea;
- mutaţia.

Selecţia reprezintă pasul de „supravieţuire" a celui mai bun, care selectează şiruri din vechea populaţie în funcţie de calitatea (valoarea) funcţiei obiectiv (fitness), formând un spaţiu de împerechere sau o generaţie intermediară. Selecţia furnizează acei indivizi care au calitatea cea mai mare de a se reproduce.

Asupra mulţimii intermediare de indivizi din care se formează populaţia de la generaţia $(t+1)$ se aplică ceilalţi operatori. Încrucişarea şi mutaţia furnizează algoritmului genetic puterea de explorare a unor soluţii diferite din spaţiul de căutare.

Încrucişarea simplă, într-un singur punct, presupune parcurgerea a trei paşi. La primul pas, doi indivizi, numiţi părinţi, sunt aleşi din cadrul populaţiei intermediare. Apoi, ambii părinţi cromozomi sunt separaţi în subcromozomi, stâng şi drept. Poziţia de tăiere se alege aleatoriu, ceea ce înseamnă că poate fi în interiorul codificării unui parametru sau între gene.

La ultimul pas, fiecare descendent primeşte subcromozomul stâng al unuia dintre părinţi şi subcromozomul drept al celuilalt.

În figura 13.28 se exemplifică modul de încrucişare într-un singur punct. Descendenţii din cromozomii părinţilor P_1 şi P_2 sunt P_1' şi P_2'.

P_1	110 – 01101
P_2	011 – 10011
P_1'	110 – 10011
P_2'	011 – 01101

Fig. 13.28

Punctul de încrucişare, în acest caz este între biţii 3 şi 4 (numerotaţi de la stânga la dreapta).

Operatorul „mutaţie", care este privit ca un operator de fundal, are rolul de a creşte varietatea populaţiei. El operează simplu, prin alterarea uneia sau a mai multor componente dintr-un cromozom. Fiecare poziţie din fiecare cromozom din noua populaţie suportă o schimbare aleatoare cu o probabilitate egală cu rata mutaţiei, care, în mod obişnuit, este ţinută constantă de-a lungul procesului de calcul.

În cazul algoritmilor genetici cu codificare binară biţii corespunzători sunt schimbaţi de la „1" la „0" sau de la „0" la „1". De exemplu, dacă cromozomul P_1 este ales pentru mutaţie, bitul mutat fiind ales bitul trei, atunci cromozomul rezultat P_1' este ca în figura 13.29.

P_1	11101011
P_1'	11001011

Fig. 13.29

De evidenţiat faptul că, în cadrul unui algoritm genetic, după evaluarea fiecărui individ, celor puternici li se dă o şansă mai mare de a participa la procesul de reproducere decât celor mai slabi, care ar putea chiar să nu mai contribuie la acest proces.

Un algoritm genetic pentru rezolvarea unei probleme date trebuie să aibă cinci componente:

- o reprezentare genetică a soluţiei potenţiale a problemei;
- un mod de generare a unei populaţii de indivizi;
- o funcţie de evaluare (funcţie cost) care joacă rolul mediului;
- operatori care schimbă componenţa populaţiei;
- valori pentru diferiţi parametri ai algoritmului genetic (mărimea populaţiei, probabilităţi de aplicare a operatorilor, criterii de oprire).

În [29] sunt prezentate principalele elemente conceptuale şi aplicative ale algoritmilor genetici. Dintre cele mai reprezentative aplicaţii ale algoritmilor genetici menţionăm: acordarea optimală a algoritmilor de reglare, estimarea parametrilor unor modele liniare sau neliniare, proiectarea algoritmilor de filtrare, sisteme de recunoaşterea vocii, optimizarea sistemelor de comunicaţii şi transport, planificarea şi optimizarea sistemelor de producţie, optimizarea sistemelor fuzzy şi a reţelelor neurale în cadrul inteligenţei computaţionale etc.

Pentru a exemplifica modul de utilizare a algoritmilor genetici în optimizarea algoritmilor de reglare, considerăm următorul exemplu.

Exemplul 13.2

Se consideră structura de reglare cu un singur grad de libertate (fig. 13.30), unde procesul este caracterizat printr-un model de ordinul doi iar regulatorul este de tip PID cu parametrii K_P, K_I şi K_D necunoscuţi.

Se cere a determina valorile optime K_P, K_I şi K_D, astfel încât o funcţie obiectiv de tipul ISE să fie minimă.

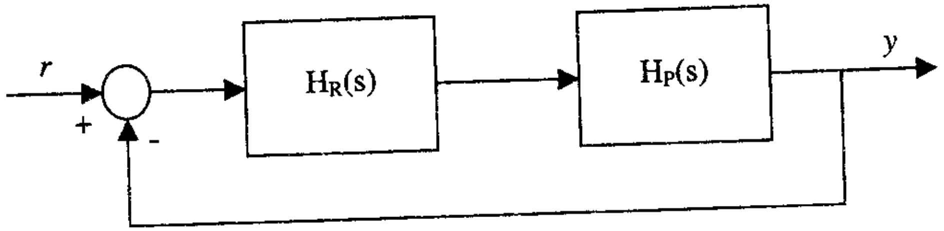


Fig. 13.30

$$H_P(s)=\frac{0.5}{(5s+1)(0.2s+1)}$$

$$H_R(s)=K_R\left(1+\frac{1}{T_i s}+T_d s\right)=K_P+\frac{K_I}{s}+K_D s$$

Funcţia obiectiv ataşată acestei probleme de optimizare parametrică este de forma:

$$F=\int_0^{\infty}\varepsilon^2(t)dt \quad sau$$

$$min[F]=min\|\varepsilon(t)\|_2^2=min\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|E(j\omega)|^2 d\omega\,.$$

Dacă ţinem seama că $E(s)=\frac{1}{1+H_d(s)}R(s)$ *funcţie obiectiv, după înlocuirea expresiei funcţiei de sensibilitate şi efectuarea integralei, se obţine funcţia **F** sub forma:*

$$F(K_P,K_I,K_D),$$

iar valoarea minimă se va obține pentru o combinație de valori a parametrilor K_P, K_I și K_D.

Admițând că parametrii de acord variază în limitele: $K_P \in [0.5 \div 5.5]$, $K_I \in [0.3 \div 3.5]$ *și* $K_D \in [0.4 \div 2]$, *se poate alege o reprezentare binară a acestor parametrii cu o precizie dorită. Astfel, dacă alegem pentru toți parametrii o precizie de reprezentare cu patru zecimale, atunci fiecare parametru de acord este reprezentat printr-un domeniu de variație de lungime*

$$D_i = (b_i - a_i) \cdot 10^4,$$

unde a_i *și* b_i *reprezintă valorile minimă și maximă ale fiecărui parametru. În aceste condiții:*

$$K_P = 5 \cdot 10^4 = 50000$$

$$K_I = 3.2 \cdot 10^4 = 32000$$

$$K_D = 1.6 \cdot 10^4 = 16000$$

deci variabilele K_P, K_I și K_D pot fi reprezentate ca șiruri binare de lungime de 16 biți sau 14 biți. Astfel, K_P poate fi reprezentat în formă binară: 1100001101010000, *K_I:* 111110100000000, *iar K_D:* 11111010000000.

Cu cele trei variabile în formă binară se alcătuiește cromozomul de lungime egală cu 45:

1100001101010000 111110100000000 11111010000000.

Apelând rutina Matlab, care implementează AG pentru acordarea regulatoarelor PID, se obțin valorile optime ale parametrilor K_P, K_I și K_D, iar răspunsul indicial al SRA este prezentat în figura 13.31.

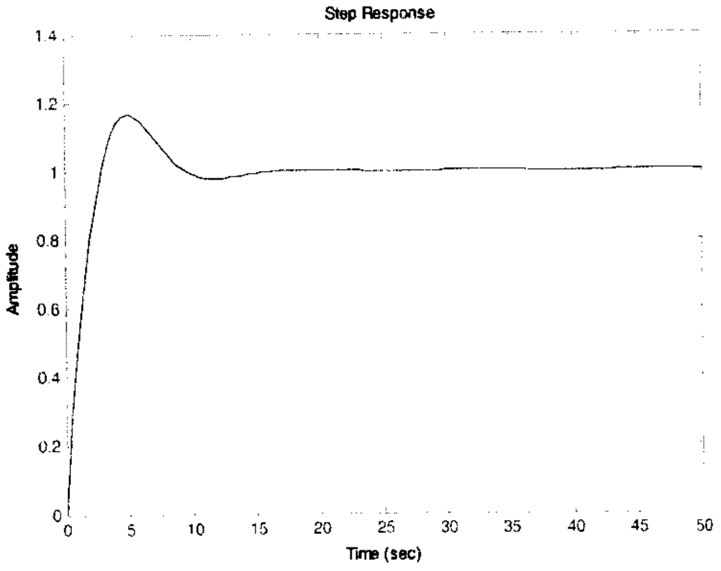


Fig. 13.31

Se pot cu ușurință evidenția performanțele răspunsului indicial al SRA pentru valorile optime obținute printr-o procedură de optimizare de tip AG.

13.7. Tehnici inteligente hibride

Tehnicile inteligente prezentate în acest capitol evidențiază avantaje și dezavantaje în cazul utilizării lor pentru rezolvarea unor probleme concrete din domeniul conducerii în timp real a proceselor. Se constată, de asemenea, că acestea prezintă un real sinergism ce poate fi exploatat în cazul în care aceste tehnici sunt folosite împreună sub forma unor metodologii hibride neuro-fuzzy, geno-fuzzy sau geno-neuro-fuzzy. Sistemele hibride îmbină avantajele și performanțele diferitelor metodologii inteligente într-o singură metodologie, dar în același timp, reprezintă un set metodologic dezvoltat pentru caracterizarea cunoașterii umane din punct de vedere al procesării informației, al învățării și reprezentării cunoștințelor.

Pornind de la distincția între nivelurile de procesare a informațiilor la nivelul creierului uman și anume nivelul microstructural și nivelul macrostructural, pot fi evidențiate două niveluri de inteligență: *inteligența artificială* și *inteligența computațională*.

Inteligența computațională incorporează metodologii inteligente software ce integrează rețelele neuronale, sistemele fuzzy și algoritmii genetici.

Sistemele inteligente hibride pot fi grupate în patru clase, și anume: sisteme bazate pe fuziunea diferitelor metodologii, sisteme bazate pe transformarea diferitelor tehnici, sisteme bazate pe combinarea metodologiilor și sisteme de tip asociativ, care integrează celelalte categorii de sisteme hibride.

Conceptele de *fuziune*, *transformare* și *combinare* sunt aplicate în diferite situații apelând la strategii specifice ingineriei cunoștințelor de tipul *TOP – DOWN* și/sau *BOTTOM – UP*.

Sistemele inteligente hibride de tip asociativ integrează toate categoriile de sisteme hibride într-o configurație care încearcă o modelare a capacității creierului uman de procesare a informațiilor și cunoștințelor. Atingerea unui asemenea obiectiv presupune o tratare coerentă sistematică multidisciplinară din perspectivă neurobiologică, psihologie cognitivă, al reprezentării și procesării cunoștințelor, al învățării și, desigur, din perspectiva inteligenței computaționale.

În [14, 29, 49, 61] sunt prezentate diferite aplicaţii ale arhitecturilor inteligente hibride. În [14] se prezintă o reţea neurală adaptivă având la bază un sistem de inferenţă fuzzy (ANFIS), iar în [29] sunt prezentate arhitecturi hibride de regulatoare geno-fuzzy şi geno-neuro, în cadrul cărora regulatoarele fuzzy sau reţelele neurale sunt optimizate apelând la algoritmi genetici.

Sistemele inteligente hibride reprezintă o direcţie importantă de cercetare, atât din perspectiva dezvoltării unor arhitecturi de sisteme de conducere automate, cât şi din perspectiva înţelegerii mecanismelor procesării informaţiilor la nivelul sistemului nervos uman.

14. IMPLEMENTAREA ANALOGICĂ A ALGORITMILOR DE REGLARE

14.1. Introducere

Pentru implementarea pe cale analogică a legilor de reglare convenţionale de tip PID pot fi utilizate diferite categorii de echipamente, diferenţiate prin sursa de energie utilizată şi tipul semnalelor. Aşa cum s-a menţionat în § 1.3 elementele de execuţie şi traductoarele, selectate pentru un anumit proces, pot determina tipul celorlalte echipamente de automatizare. Astfel, pot fi utilizate echipamente electronice, echipamente pneumatice, echipamente hidraulice sau structuri hibride. Echipamentele de automatizare pot fi integrate în sisteme unificate, caracterizate prin faptul că sunt utilizate semnale unificate la intrarea şi/sau ieşirea acestora, sau pot fi echipamente specializate concepute pentru aplicaţii date. De remarcat faptul că cele mai răspândite echipamente de automatizare sunt echipamentele unificate, având în vedere caracteristicile acestora: modularitate, flexibilitate, versatilitate.

Adoptarea unei soluţii sau a alteia, pentru echipamentele de automatizare pentru un proces dat, se va face luând în consideraţie: *performanţele sistemului de reglare (conducere), particularităţile procesului condus, mediul în care evoluează procesul, siguranţa în funcţionare, întreţinerea, exploatarea* şi *costul echipamentelor*.

În funcţie de natura semnalului, echipamentele de automatizare pot fi *pneumatice*, *hidraulice* şi *electrice*. Echipamentele pneumatice folosesc ca sursă de energie şi purtător de semnal aerul instrumental la o presiune standardizată cuprinsă în gama $(0.2 \div 1)$ bari, iar echipamentele hidraulice folosesc ca sursă de energie uleiul sub presiune, la presiuni mult mai mari decât cele utilizate în cazul echipamentelor pneumatice. Echipamentele electrice de automatizare folosesc semnale unificate de curent sau tensiune electrică.

Un sistem unificat de echipamente de automatizare cuprinde întreaga clasă de echipamente necesare realizării automatizării unui proces, printre care:

- traductoare (senzori + adaptoare de semnal);
- regulatoare;
- elemente de calcul;
- înregistratoare, contoare;
- elemente de execuție;
- adaptoare de semnal unificat pentru interconectarea cu diferite semnale unificate;
- elemente de panou, elemente de transmitere la distanță a mărimii prescrise, programatoare de semnal, structuri de alarmă și protecție, bariere de siguranță;
- surse de alimentare.

Modularitatea și flexibilitatea ridicată a sistemelor unificate de reglare automată le recomandă pentru clase largi de procese.

Principalele funcții realizate de echipamentele de automatizare sunt:

- conducere (reglare);
- alarmare și protecție;
- supraveghere și monitorizare;
- pornire – oprire;
- modificarea regimurilor de funcționare.

Diferitele proprietăți ale fluidelor utilizate în sistemele pneumatice și hidraulice determină caracteristici specifice ale acestora. Aceste diferențe între cele două categorii de sisteme sunt listate mai jos:

1. Aerul și gazele sunt compresibile, în schimb uleiul este incompresibil.
2. Aerul nu are proprietăți lubrifiante și conține totdeauna vapori de apă. Uleiul funcționează ca un fluid hidraulic și, în același timp, ca un lubrificator.
3. Presiunea de lucru în sistemele pneumatice este mult mai mică decât presiunea uleiului, care în unele aplicații poate atinge valori de ordinul sutelor de bari.
4. Puterea dezvoltată de sistemele pneumatice este mult mai mică decât puterea dezvoltată de sistemul hidraulic.
5. Precizia sistemelor de acționare pneumatică este mare la viteze reduse, în timp ce precizia sistemelor de acționare hidraulică poate fi asigurată în mod satisfăcător la toate vitezele.
6. La sistemele pneumatice nu sunt necesare conducte de retur, în schimb, la sistemele hidraulice aceste conducte sunt absolut necesare.

7. Temperatura de lucru a sistemelor pneumatice este cuprinsă între $5^{o}C$ și $60^{o}C$, cu posibilitatea de extindere de la $0^{o}C$ la $200^{o}C$. Sistemele pneumatice sunt insensibile la variații de temperatură, în schimb, sistemele hidraulice sunt sensibile ca urmare a variației vâscozității uleiului cu temperatura. Temperatura normală de lucru în sistemele hidraulice este cuprinsă în domeniul $\left(20^{\circ} \div 70^{\circ}\right)$.
8. Sistemele pneumatice sunt sigure în funcționare în medii explozive, în schimb sistemele hidraulice sunt incompatibile cu asemenea medii.

Din această analiză comparativă rezultă particularitățile acestor categorii de echipamente de automatizare.

Echipamentele pneumatice de automatizare se caracterizează prin:

- simplitate constructivă și funcțională;
- robustețe în funcționare în medii dificile (explozive);
- precizie redusă;
- complexitatea redusă a funcțiilor implementabile;
- întreținere și exploatare ușoară cu costuri reduse;
- necesitatea unei surse suplimentare de energie și preparare a aerului instrumental;
- posibilități reduse de cuplare la nivelul ierarhic superior, reprezentat printr-un calculator;
- capacitate redusă de transmitere la distanță a semnalelor, luând în considerație pierderile de presiune.

Echipamentele hidraulice de automatizare se caracterizează prin:

- capacitatea de a dezvolta puteri mari în cadrul unor volume reduse;
- viteze mari de răspuns și precizie ridicată;
- posibilitatea implementării unor funcții complexe, în special în cadrul unor structuri hibride electrohidraulice;
- necesitatea unei surse suplimentare de energie și de tratare a uleiului ca agent purtător de energie și informație;
- siguranță redusă în medii explozive;
- costuri ridicate și întreținere dificilă;
- capacitate redusă de transmitere la distanță a semnalelor și dificultăți de cuplare la calculator.

Echipamentele electrice de automatizare folosesc semnalul electric ca semnal unificat, cel mai răspândit fiind în forma $(4 \div 20)\text{mA}$. Aceste echipamente se caracterizează prin:

- viteze ridicate de prelucrare a semnalelor;

- posibilitatea implementării unor legi de reglare mai complexe decât în cazul sistemelor pneumatice;
- cuplarea relativ simplă la calculator;
- posibilitatea transmiterii la distanțe mai mari a semnalelor;
- siguranța redusă în medii dificile (medii explozive);
- întreținere și exploatare ușoară;
- nu necesită o sursă suplimentară de energie.

Astfel, prin automatizarea unui proces se înțelege ansamblul de funcții și proceduri realizate de echipamentele de automatizare în vederea funcționării procesului la parametri doriți. Echipamentele de automatizare preiau în esență toate sarcinile de conducere și supraveghere a unui proces industrial, scoțând în afara buclei operatorul uman.

14.2. Structuri de regulatoare

În cele ce urmează vor fi tratate problemele specifice implementării legilor de reglare și elaborării comenzilor pentru conducerea/reglarea a unor mărimi din proces.

În figura 14.1 se prezintă structura generală a unui sistem de conducere, cu evidențierea locului și rolului unui regulator.

Regulatorul prelucrează informația din proces furnizată de traductor (traductoare) și referințe r. Referința poate fi prescrisă de blocul pentru prescrierea referinței (BPR) sau de către calculator, în cazul în care comutatorul C_1 se află pe poziția 2. În acest din urmă caz, calculatorul funcționează în regim de supervizor, fixând referința pentru regulatoarele ce se află la nivelul executiv.

Prelucrarea informației din proces și a referinței se realizează după legi diferite sau după o singură lege de reglare, la care intrarea este eroarea $\varepsilon = r(t) - y(t)$.

Comanda generată de regulator se transmite spre elementul de execuție prin intermediul comutatorului C_2, care fixează regimul de funcționare al regulatorului. Astfel, pot fi evidențiate trei regimuri de funcționare:

- *Automat* (comanda elaborată de regulator se transmite direct la elementul de execuție);
- *Manual* (M) (comanda este generată de blocul de comandă manuală (BCM) și transmisă spre elementul de execuție, dacă se comută pe poziția M comutatorul C_2);

- *Calculator* (C) (comanda este generată de calculator și transmisă printr-o interfață de proces spre elementul de execuție, dacă se fixează comutatorul C_2 pe poziția C).

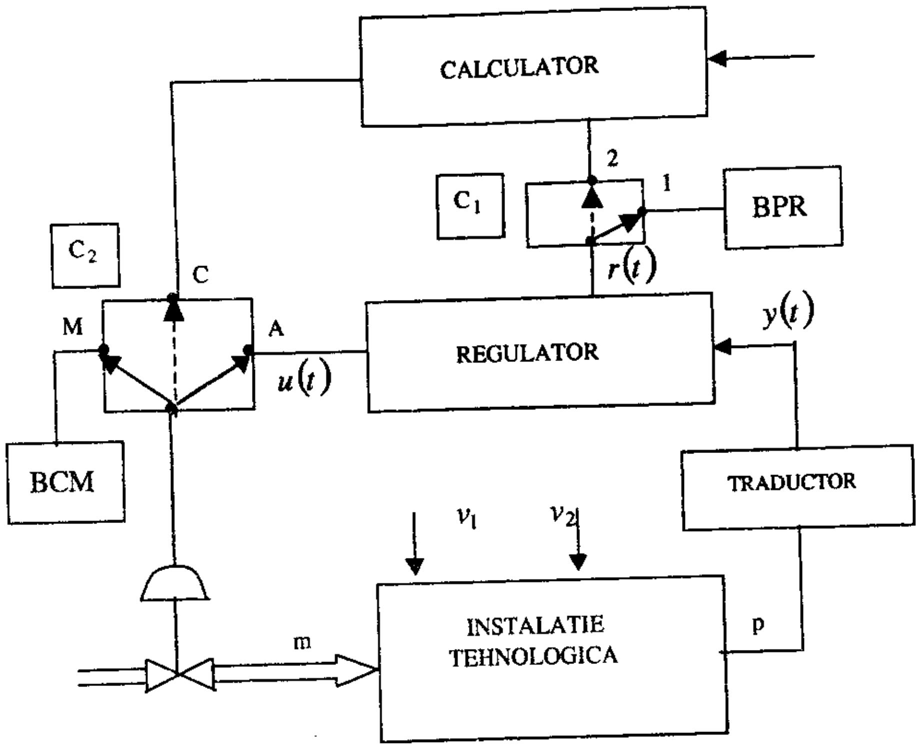


Fig. 14.1

Regulatorul se poate găsi în situația activă de elaborare și transmitere automată a comenzii sau în situația de rezervă (stație back-up), în cazul în care conducerea procesului este asigurată prin intermediul calculatorului în regim de comandă numerică directă.

Indiferent de tehnologia de realizare (pneumatică, hidraulică, electronică analogică sau numerică), în structura unui regulator vor fi incluse module constructive și funcționale (module software) care să realizeze [19]:

- condiționarea mărimilor măsurate (CMM);
- generarea referinței (prescrierea referinței) (BPR);
- elaborarea erorii (calculul erorii prin comparație) (EC);
- afișarea, vizualizarea mărimilor de interes (AV);
- deplasare–limitare (desaturare) (DL);
- transfer automat–manual (TAM);

– echilibrare comenzi la comutare automat-manual-calculator (EAM);

– adaptare semnal ieşire (AE);

– elaborare comandă conform legii de reglare (BEC).

Structura modulară a unui regulator analogic este prezentată în figura 14.2.

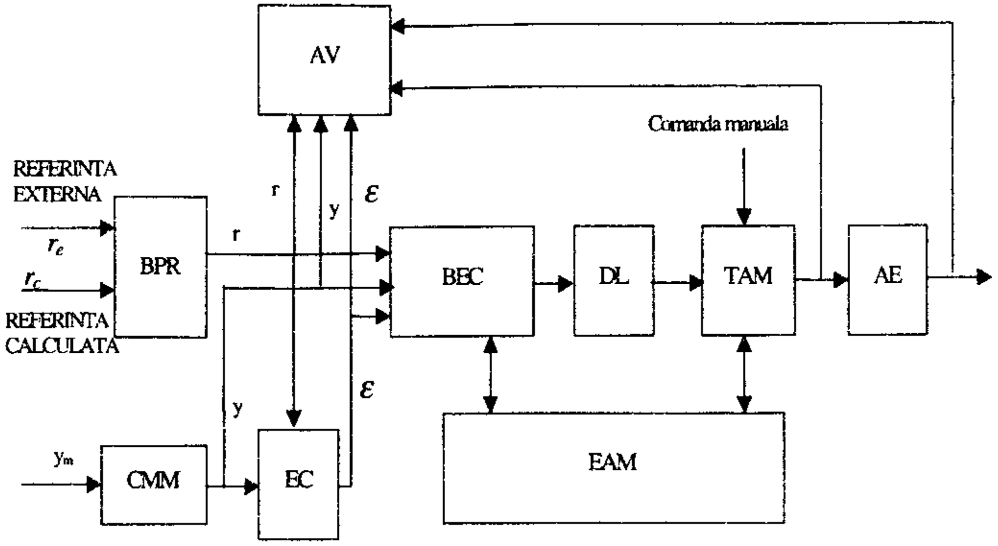


Fig. 14.2

Aceste module incluse în structura unui regulator se întâlnesc, atât în cazul prelucrării analogice a informaţiei, cât şi în cazul prelucrării numerice, diferenţele fiind impuse de particularităţile modului de prelucrare a informaţiei.

Regulatorul, în conformitate cu structura dată în figura 14.2, este un sistem capabil să prelucreze informaţii, să elaboreze comenzi şi să transmită aceste comenzi spre elementele de execuţie. În funcţie de tehnologia utilizată pentru implementarea acestor obiective, semnalul informaţional intern capătă diverse forme: spre exemplu, în cazul utilizării amplificatoarelor operaţionale pentru implementarea algoritmilor de reglare, prelucrarea informaţiilor se efectuează prin tensiuni în domeniul $[-U,+U]$ volţi, unde, frecvent, $U=10$ volţi.

Conversia mărimilor fizice r^f şi y^f, în semnale informaţionale interne se realizează luând în consideraţie domeniul de variaţie al mărimilor fizice sub forma:

$$r=\frac{r^f-R^f_{\min}}{R^f_{\max}-R^f_{\min}}\ .\ U\in[0,U]\ \text{volţi}$$
$$y=\frac{y^f-Y^f_{\min}}{Y^f_{\max}-Y^f_{\min}}\ .\ U\in[0,U]\ \text{volţi,} \qquad (14.1.)$$

iar eroarea ε este reprezentată de o tensiune din intervalul $[-U,U]$. Mărimile interne, prin care sunt prelucrate informaţiile în cadrul unui regulator dintr-un sistem unificat, sunt unitare şi sunt independente de procesul la care se aplică.

Corelarea cu procesul la care se aplică se efectuează numai prin sistemul de afişare-vizualizare, care permite operatorului o urmărire uşoară a evoluţiei mărimilor specifice.

Funcţia de condiţionare a mărimii măsurate permite furnizarea mărimii interne y purtătoare de informaţie privind mărimea fizică măsurată în instalaţia tehnologică, mărime fizică reprezentată prin semnalul y^f.

Procesul de condiţionare presupune în general următoarele operaţii principale:

– adaptarea formei de reprezentare a semnalelor;

– filtrarea semnalelor purtătoare de informaţii;

– separarea galvanică;

– introducerea unor corecţii prin semnale offset.

Unele funcţii menţionate mai sus pot lipsi sau pot fi activate în anumite condiţii. În funcţie de tipul şi performanţele sistemului de măsurare a variabilelor din instalaţia tehnologică, operaţiile de condiţionare pot fi substanţial reduse (în cazul utilizării traductoarelor inteligente).

Referinţa r, luată în consideraţie în bucla de reglare, poate fi generată în 4 moduri:

a. *Referinţa externă* (r_e) este transmisă printr-un semnal eventual unificat. Acest semnal extern este condiţionat şi adus la aceleaşi caracteristici ca şi mărimea y în vederea comparării (dacă este cazul).

b. *Referinţa locală* (r_l) este ajustată de la pupitru prin intermediul unui sistem specializat de *Ajustare Locală a Referinţei*. Ajustarea manuală a referinţei locale asigură acesteia aceleaşi caracteristici cu ale semnalelor (r_e) şi y.

c. *Referinţa comandată de calculator* (r_c) are atributele referinţei locale, însă comanda se efectuează de la distanţă, eventual de la un calculator plasat la nivelul ierarhic superior.

d. *Referinţa cu evoluţie în timp programată* $(r_p(t))$ se realizează printr-un bloc de programare referinţă, care generează semnalul $r_p(t)$ cu domeniul de valori ca şi r_e şi r_c, dar cu o evoluţie în timp fixată de blocul de programare.

Pentru evitarea apariţiei unor funcţionări necorespunzătoare a SRA la modificarea referinţei, în structura regulatoarelor moderne este inclusă funcţia de AutoRamping, prin care semnalul de referinţă r luat în consideraţie de legea de reglare, se poate modifica de la o valoare la alta, numai cu panta prestabilită pentru a evita apariţia şocurilor în funcţionarea SRA. În cazul sistemelor de urmărire sau de reglare după program, această facilitate trebuie inhibată.

Comparaţia referinţei r cu semnalul y permite realizarea erorii

$$\varepsilon(t) = r - y \in [-U, +U]$$

sub forma unui semnal compatibil cu blocul pentru elaborarea comenzii (realizarea legii de reglare). Eroarea poate fi obţinută indirect în cadrul blocului de elaborare a comenzii sau poate fi generată de un modul specializat care realizează operaţia de scădere cu precizie mai mare decât operaţiile din legea de reglare. În cadrul acestui modul, se poate asigura schimbarea semnului pentru compatibilizarea comenzii cu elemente de *execuţie normal închise* sau *normal deschise*. Pot fi incluse funcţii suplimentare de filtrare şi limitare a erorii.

Funcţia de afişare-vizualizare asigură interfaţa cu operatorul, permiţând vizualizarea în unităţi fizice (unităţi inginereşti) a unor mărimi esenţiale pentru urmărirea comportării SRA. În general, sunt afişate următoarele mărimi:

- mărimea măsurată, referinţa şi eroarea;
- mărimea de comandă (ieşirea din blocul de elaborare a comenzii);
- mărimile de intrare la elementul de execuţie (ieşirile din regulator).

Pentru obţinerea informaţiilor în unităţi fizice având în vedere că un regulator operează cu semnale interne specifice tehnologiei de realizare, se impune utilizarea unor convertoare corespunzătoare şi adaptarea interfeţei operatorului de proces pentru asigurarea acestui obiectiv.

Astfel, afişarea valorii interne y se face prin mărimea „inginerească“ y_{IT}^f prin aşa numită „relaţie de afişare în unităţi fizice“:

$$y_{IT}^f = Y_{IT\,min}^f + \left[Y_{IT\,max}^f - Y_{IT\,min}^f\right] y \qquad (14.2)$$

care înglobează caracteristica statică a traductorului şi relaţiile de normalizare ale semnalelor unificate:

$$y^f = Y_{min}^f + \frac{Y_{max}^f - Y_{min}^f}{Y_{IT\,max}^f - Y_{IT\,min}^f}\left(y_{IT}^f - Y_{IT\,min}^f\right). \qquad (14.3)$$

Relaţiile de normalizare a semnalelor unificate exprimă dependenţa dintre variabila internă şi semnalul corespunzător, aplicat la intrarea echipamentului, de exemplu:

$$y = \frac{y^f - Y_{min}^f}{Y_{max}^f - Y_{min}^f}\, U \in [0, U] \text{ volţi}. \qquad (14.4)$$

Dacă operatorul uman doreşte să introducă anumite valori ale mărimilor controlate (pentru alarme şi protecţie) se activează blocul de normalizare din interfaţa cu operatorul prin care se „simulează“ lanţul de obţinere a informaţiilor de la procesul fizic.

De exemplu, dacă operatorul doreşte să introducă o valoare $\hat{y}_{IT}^f \in \left[Y_{IT\,min}^f, Y_{IT\,max}^f\right]$, atunci în algoritmul de reglare se va seta valoarea $\hat{y}$:

$$\hat{y} = \frac{\hat{y}_{IT}^f - Y_{IT\,min}^f}{Y_{IT\,max}^f - Y_{ITmix}^f} = \frac{\hat{y}_{IT}^f - Y_{IT\,min}^f}{DY_{IT}}, \qquad (14.5.)$$

unde DY_{IT} reprezintă domeniul de variaţie al mărimii fizice din instalaţia tehnologică.

14.3. Elaborarea comenzii folosind amplificatoare operaţionale

Pentru a ilustra modul de realizare a legilor de reglare convenţionale apelând la amplificatoare, considerăm structura din figura 14.3.

Se va considera că banda de frecvenţă a amplificatorului este foarte largă (constante de timp neglijabile) şi amplificarea este foarte mare. În aceste condiţii, ieşirea $U(s)$ din figura 14.3 este dată de relaţia:

$$U(s) = \frac{A(s)}{1 + H_c(s)A(s)} \cdot \varepsilon(s)$$

sau

$$H_R(s) := \frac{U(s)}{\varepsilon(s)} = \frac{A}{1 + H_c(s)\ A} \cong \frac{1}{H_c(s)} \qquad (14.6)$$

dacă $|A(j\omega)| = A_0$ este foarte mare.

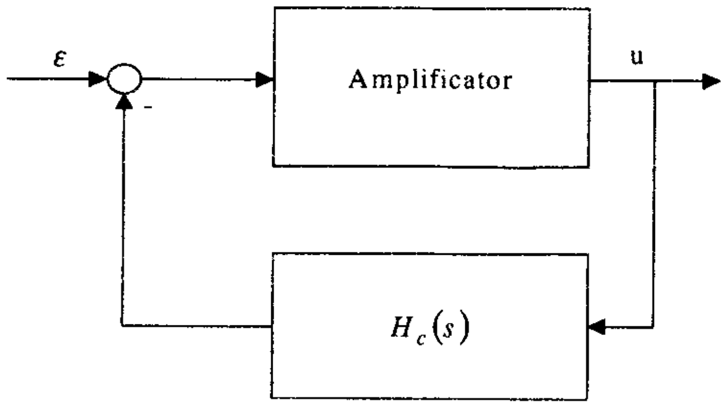


Fig. 14.3

În această funcţie de transfer, $H_c(s)$ reprezintă funcţia de transfer a unui circuit de corecţie în jurul amplificatorului.

Astfel, pentru cazul în care factorul de amplificare este suficient de mare şi banda de frecvenţă a amplificatoarelor este cât mai largă, se poate obţine legea de reglare dorită prin alegerea circuitului de corecţie cu funcţia de transfer $H_c(s)=\dfrac{1}{H_R(s)}$.

Rezultă că precizia implementării unei legi de reglare folosind amplificatoare şi circuite de corecţie este determinată de performanţele amplificatorului şi de particularităţile circuitului de corecţie.

Pentru realizarea legilor de reglare de tip PID analogice, cel mai frecvent se folosesc amplificatoare operaţionale electronice integrate şi reţele de corecţie RC, conectate în diferite structuri.

Schema echivalentă a unui amplificator este prezentată în figura 14.4.

Mărimile echivalente din acest cuadripol (schema echivalentă a amplificatorului operaţional) sunt următoarele:

- $V^-(s)$, $V^+(s)$, $U_e(s)$: potenţialele faţă de punctul de masă ales pentru bornele inversoare, neinversoare, respectiv ieşire;
- $Z_i(s)$, $Z_e(s)$: impedanţele de intrare, respectiv ieşire, în circuit deschis (fără circuite de reacţie);
- $A(s)$: funcţia de transfer în circuit deschis (amplificare);
- $E_0(s)$: tensiunea echivalentă reziduală.

Tensiunea diferenţială $U_d=U_1-U_2$ permite calculul tensiunii $U_0=-A_0U_d$, unde A_0 reprezintă amplificarea în regim staţionar.

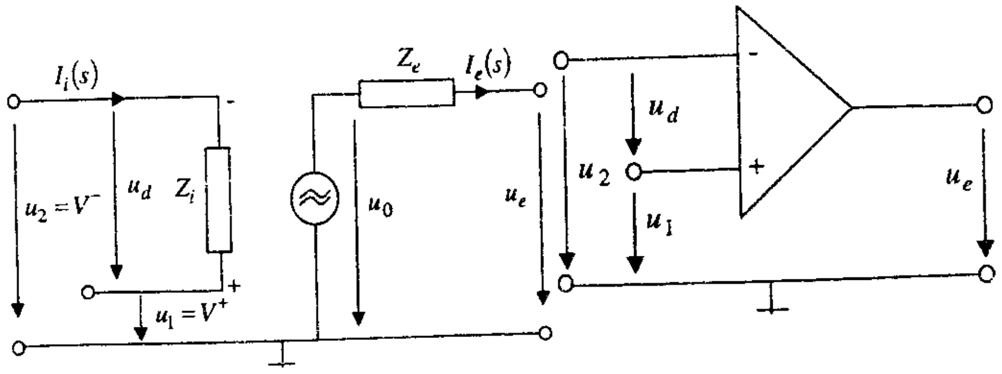


Fig. 14.4

Funcţia de transfer în circuit deschis $A(s)$ se poate deduce interpretând caracteristica de frecvenţă $A(\omega)=|A(j\omega)|$ a amplificatorului utilizat, caracteristică dată în catalogul amplificatorului.

Dacă amplificatorul operaţional are caracteristica $A(\omega)$ în reprezentare logaritmică ca cea prezentată în figura 14.5.*a*, funcţia de transfer poate fi pusă sub forma:

$$A(s)=\frac{A_0}{Ts+1}, \tag{14.7}$$

unde $T=\dfrac{1}{\omega_0}=\dfrac{1}{2\pi f_0}$.

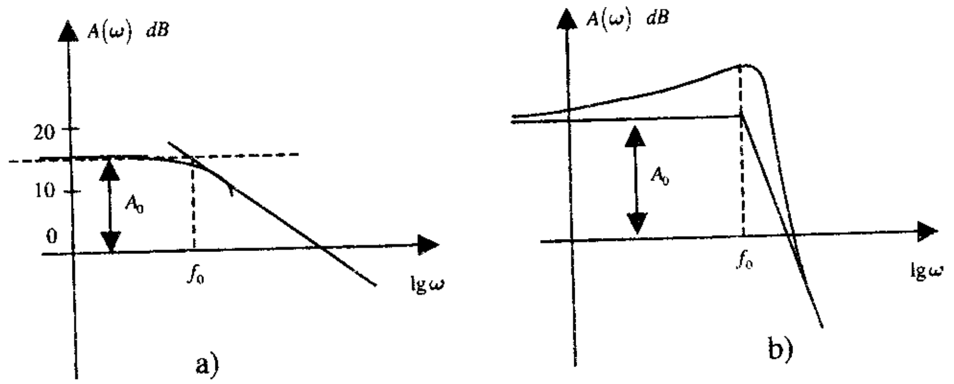


Fig. 14.5

În cel de-al doilea caz (fig. 14.5.*b*), funcţia de transfer ataşată (AO) poate fi aproximată ca:

$$A(s)=\frac{A_0}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}, \tag{14.8}$$

unde pulsația de frângere este egală cu $\frac{1}{T}=\omega_0=2\pi f_0$. Forma caracteristicii este dependentă de valoarea factorului de amortizare. De remarcat faptul că în cel de-al doilea caz, aproximarea caracteristicii $A(\omega)$ prin asimptotă este cu atât mai imprecisă cu cât ζ este mai departe de $\zeta=1$.

În schema echivalentă a (AO) s-a considerat că tensiunea reziduală este egală cu zero, fapt real pentru un amplificator de bună calitate și echilibrat corect.

Pentru realizarea diferitelor legi de reglare se pot include la (AO) diverse tipuri de reacții:

- reacție paralelă de tensiune, montaj inversor;
- reacție paralelă de tensiune, montaj neinversor;
- reacție în T, simplu sau dublu;
- reacție serie de tensiune.

Amplificatorul operațional cu reacție poate fi utilizat în trei moduri distincte:

- intrare aplicată pe borna inversoare;
- intrare aplicată pe borna neinversoare;
- intrare aplicată diferențial pe cele două borne.

14.3.1. Structură cu AO cu reacție paralelă de tensiune și montaj inversor

Schema simplificată a acestei structuri este prezentată în figura 14.6.
În punctul (a) are loc egalitatea:

$$I_i(s)+I_2(s)=I_i(s) \tag{14.9}$$

sau

$$\frac{U_1-U_d}{Z_1}+\frac{U_2-U_d}{Z_2}=\frac{U_d}{Z_i} \qquad U_2=-A\cdot U_d \tag{14.10}$$

Rezolvând (14.10) prin eliminarea lui U_d, se obține funcția de transfer:

$$H_R(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=-\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1+\dfrac{Z_2}{Z_1}+\dfrac{Z_2}{Z_i}}{A}} \tag{14.11}$$

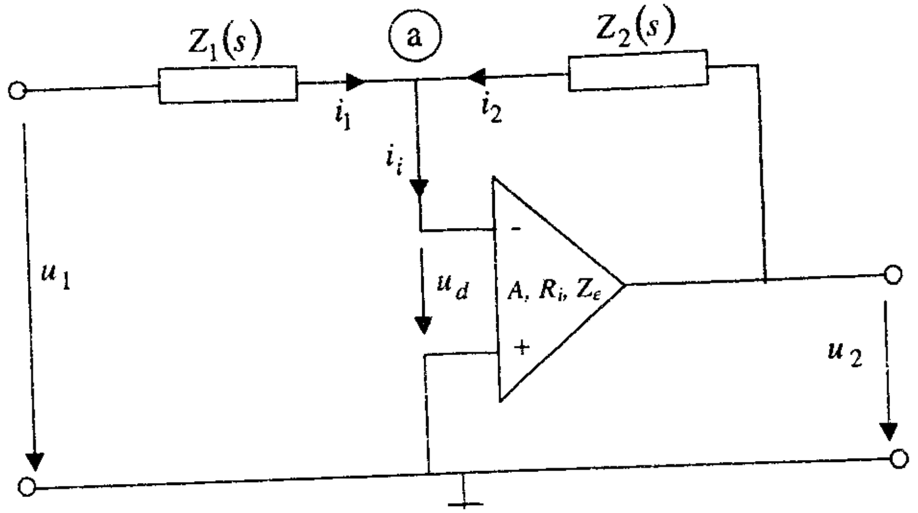


Fig. 14.6

Pentru cazul în care $A=\infty$, $Z_i=\infty$, $Z_e=0$, se obține funcția de transfer $H_{Ri}(s)$, care reprezintă funcția de transfer realizată cu un amplificator ideal:

$$H_{Ri}(s)\cong-\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}. \tag{14.12}$$

În aceste relații s-a neglijat constanta de timp a amplificatorului, fiind considerată foarte mică (parazită).

Pentru a exemplifica, considerăm $Z_1(s)=R_1$, $Z_2(s)=R_2$ și $A(s)=\frac{A_0}{\tau s+1}$.

În cazul ideal, se obține:

$$H_{Ri}(s)=\frac{R_2}{R_1}=K_R,$$

și reprezintă o lege de reglare de tip P ideal.

În cazul real, ținând seama de (14.11), se obține:

$$H_{Rr}(s)=\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1+\dfrac{R_2}{R_1}+\dfrac{R_2}{R_i}}{\dfrac{A_0}{\tau s+1}}} \tag{14.13}$$

sau

$$H_{Rr}(s)=\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{(\tau s+1)\left(1+\dfrac{R_2}{R_1}+\dfrac{R_2}{R_i}\right)}{A_0}}=\frac{K_R^{'}}{T_p s+1},$$

unde

$$K_R^{'}=\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{1}{\dfrac{R_2}{R_1A_0}+\dfrac{R_2}{R_iA_0}+\dfrac{1}{A_0}+1}$$

$$T_p=\tau\frac{R_1(R_2+R_i)+R_2R_i}{R_1[R_2+R_i(A_0+1)]+R_2R_i},$$

cu $R_i >> R_2$, $A_0 >> 1$ se obține, evident, modelul ideal pentru regulatorul de tip P. În acest exemplu s-a considerat că funcția de transfer a regulatorului este definită ca raportul tensiunilor de la ieșire și intrare cu semn schimbat.

O schemă echivalentă a (AO) cu reacție rezistivă și montaj inversor este prezentată în figura 14.7.

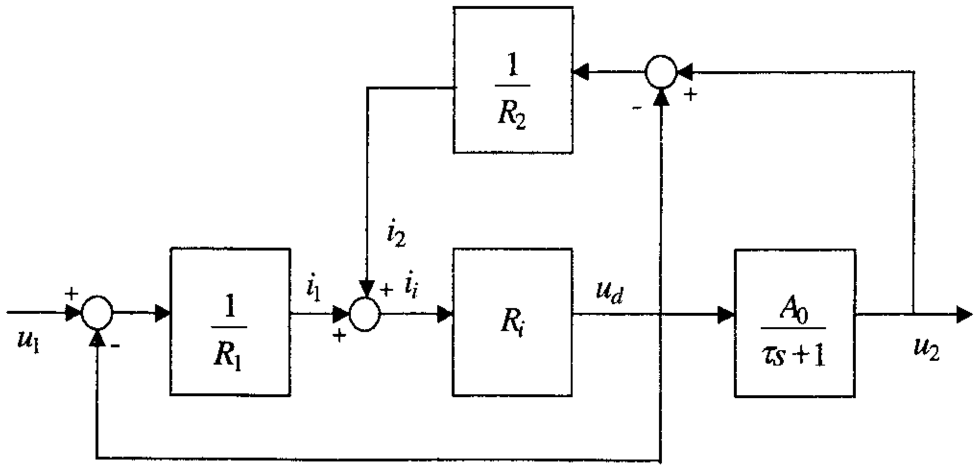


Fig. 14.7

14.3.2. Structură cu AO și reacție paralelă de tensiune-montaj neinversor

Această structură este prezentată în figura 14.8, în care:

$$U_x=\frac{Z_1}{Z_1+Z_2}U_2 \qquad (14.13)$$

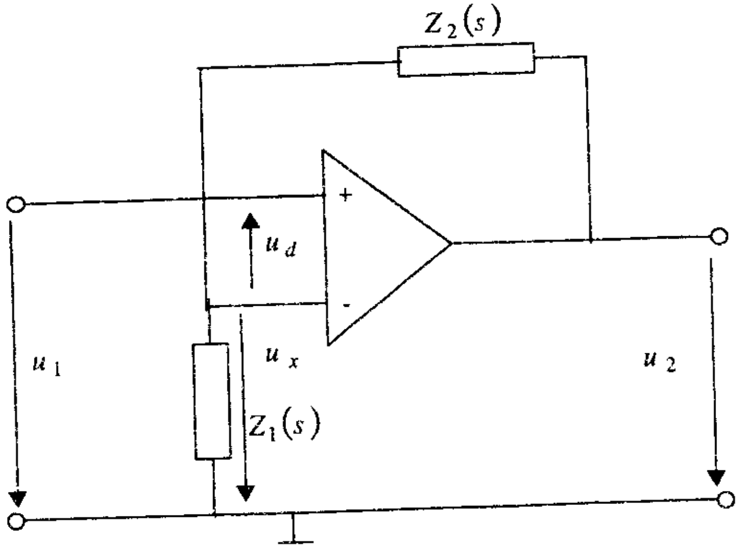


Fig. 14.8

Expresia funcției de transfer în cazul real se obține cu ușurință ținând seama de U_x:

$$H_{Rr}(s)=\left[1+\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}\right]\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1+\dfrac{Z_2(s)}{Z_1(s)}+\dfrac{Z_2(s)}{Z_i(s)}}{A(s)}},\ (Z_e=0) \qquad (14.14)$$

iar în cazul în care $A\to\infty$, $R_i\to\infty$, $Z_e=0$ ($Z_i(s)=R_i$):

$$H_{Ri}(s)=1+\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} \qquad (U_d=0,\ i_i=0) \qquad (14.15)$$

Un caz particular al acestei structuri este prezentat în figura 14.9.

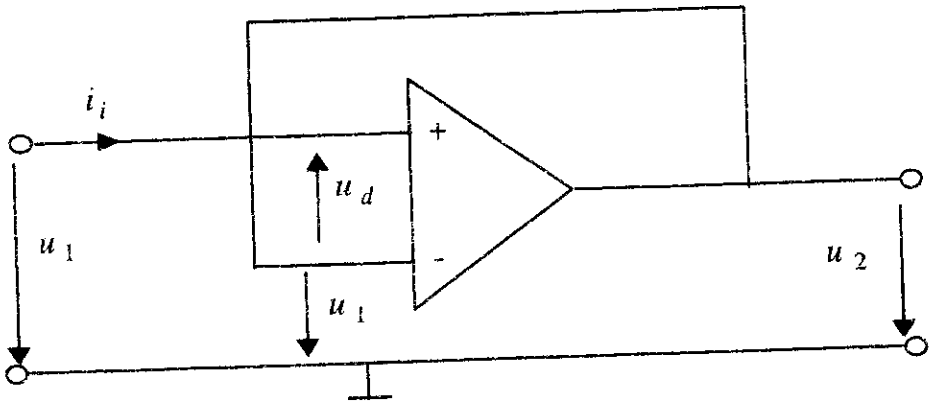


Fig. 14.9

În acest caz, $U_d = 0$, $i_i = 0$, $U_2 = U_1$ şi, astfel, se obţine un repetor cu amplificarea egală cu 1:

$H_R(s) = 1$.

14.3.3. Structură cu AO în montaj diferenţial

În figura 14.10 se prezintă structura cu AO şi reacţie de tensiune în montaj diferenţial.

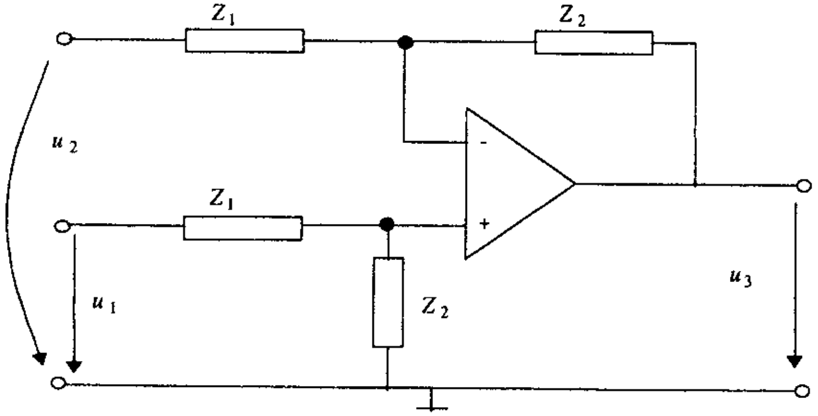


Fig. 14.10

Funcţia de transfer în acest caz se obţine într-o manieră similară şi are forma:

$$H_R(s) = \frac{U_3(s)}{U_1(s) - U_2(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} \tag{14.16}$$

14.3.4. Structură cu AO şi reacţie în T, montaj inversor

În acest caz, avem [19, 34, 66]:

$$H_{Ri}(s) = \frac{Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a}{Z_1 Z_c} = \frac{\Delta}{Z_1 Z_c} \tag{14.17}$$

unde

$$\Delta = Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a,$$

iar

$$H_{Rr}(s) = \frac{\Delta}{Z_1 Z_c} \cdot \frac{1}{1 + \left[\frac{Z_b + Z_c}{Z_c} + \frac{\Delta (Z_1 + Z_i)}{Z_1 Z_i Z_c}\right] \cdot \frac{1}{A(s)}} \tag{14.18}$$

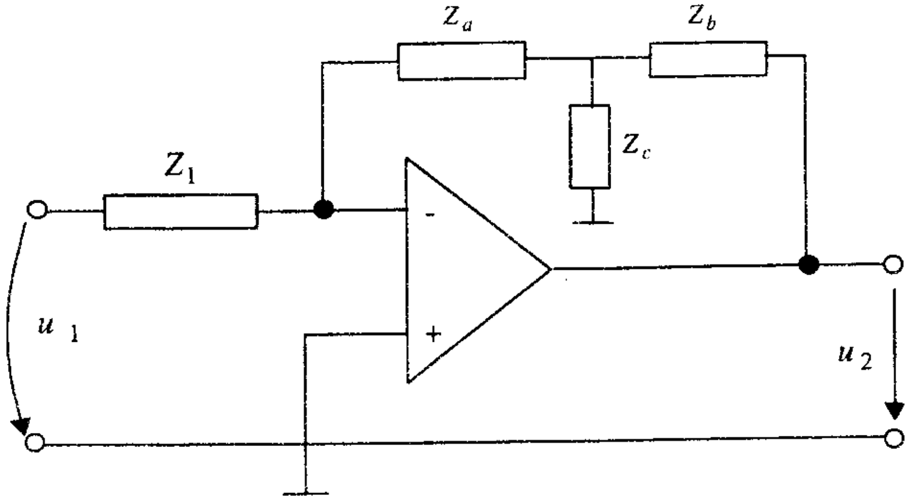


Fig. 14.11

14.3.5. Structură cu AO şi reacţie potenţiometrică de tensiune

Pentru a asigura modificarea independentă a parametrilor unui regulator, se pot utiliza diferite metode. Una dintre acestea este şi utilizarea reacţiei potenţiometrice de tensiune (fig. 14.12).

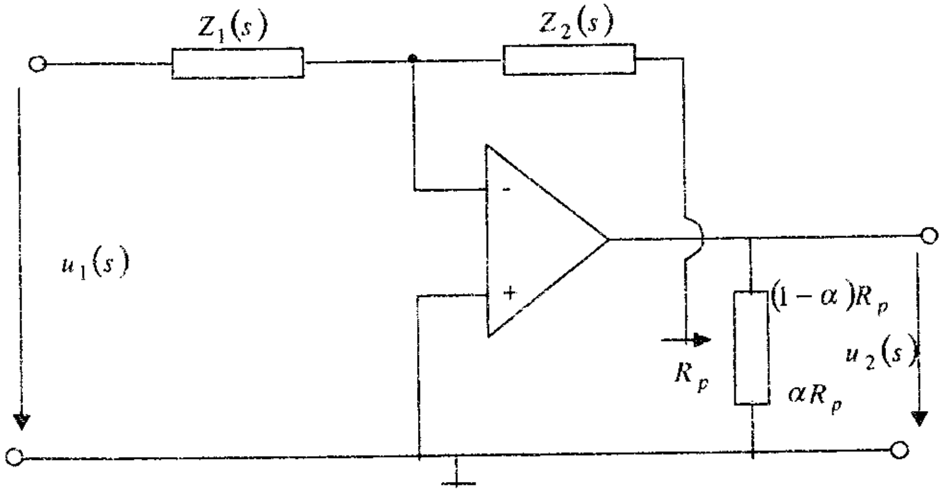


Fig. 14.12

Notând cu α poziția relativă a cursorului, $\alpha \in (0,1]$ structura se transformă într-o structură cu reacție în T- montaj inversor cu:

$Z_a = Z_2$, $Z_b = (1-\alpha)R_p$, $Z_c = \alpha R_p$.

Funcția de transfer în acest caz este:

$$H_{Ri}(s) = \frac{Z_2(1-\alpha)R_p + (1-\alpha)R_p \alpha R_p + \alpha R_p Z_2}{Z_1 \alpha R_p} \tag{14.19}$$

sau

$$H_{Ri}(s) = \frac{1}{\alpha}\frac{Z_2}{Z_1} - (1-\alpha)\frac{R_p}{Z_1} \tag{14.20}$$

Dacă se alege $R_p << |Z_1|$, atunci:

$$H_{Ri}(s) \cong \frac{1}{\alpha}\frac{Z_2}{Z_1}, \ \alpha \in (0,1]. \tag{14.21}$$

Cu aceste elemente pregătitoare se pot selecta structuri cu AO și diverse tipuri de rețele de corecție pentru realizarea legilor de reglare convenționale.

14.4. Realizarea legilor de reglare de tip P, PI, PD, PID

14.4.1. Realizarea legii de reglare de tip P

Cea mai simplă structură pentru realizarea legii de reglare P este prezentată în figura 14.13, cu

$$i_y - i_r = -i_2$$

$$\frac{u_y}{R_b} - \frac{u_r}{R_a} = -\frac{u_2}{R_2}, \ u_d = 0$$

sau

$$u_2 = -\frac{R_2}{R_b}u_y + \frac{R_2}{R_a}u_r \tag{14.22}$$

Dacă alegem $R_a = R_b = R_1$, se obține:

$$u_2 = -\frac{R_2}{R_1}(u_y - u_r) = K_R(u_y - u_r) \tag{14.23}$$

iar funcția de transfer are forma:

$$H_R(s) = -\frac{U_2(s)}{U_y(s) - U_r(s)} = -K_R = -\frac{R_2}{R_1}.$$

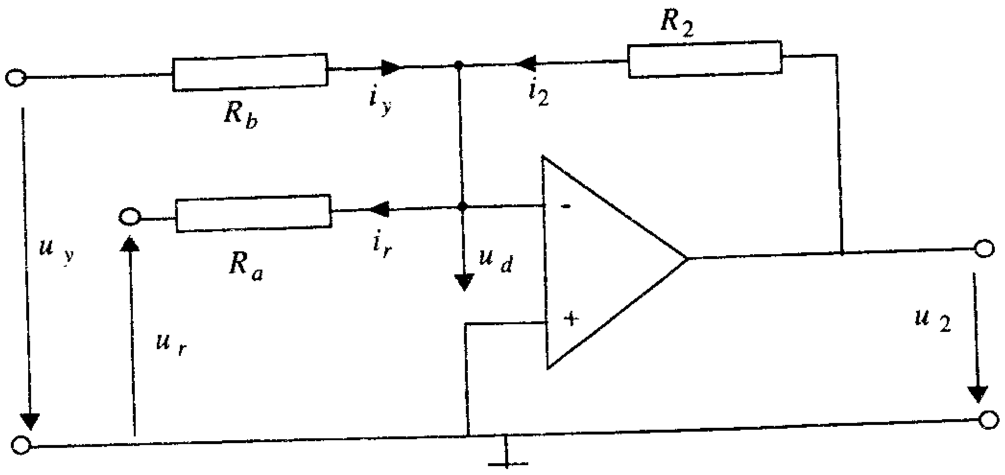


Fig. 14.13

O structură simplă pentru realizarea legii de reglare de tip P este prezentată în figura 14.14.

În cazul ideal, algoritmul de reglare obținut este de tip P, cu $H_R(s) = K_R$.

În cazul real, când $Z_i(s) = R_i$ finit și $A(s) = \frac{A_0}{\tau s + 1}$, se obține:

$$H_{Rr}(s) = \frac{R_2}{R_1}\frac{1}{1 + \dfrac{\frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R_i} + 1}{\frac{A_0}{\tau s + 1}}} = \frac{R_2}{R_1}\frac{A_0}{A_0 + \alpha\tau s + \alpha}$$

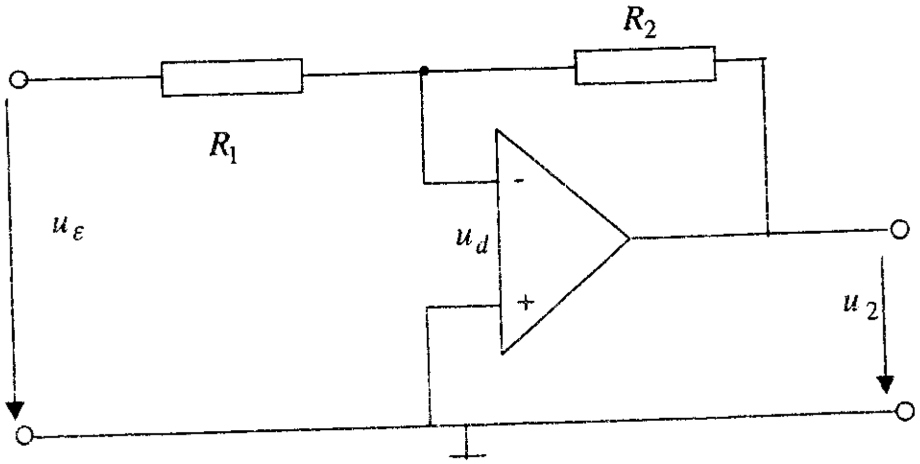


Fig. 14.14

sau

$$H_{Rr}(s)=\frac{R_2}{R_1}\frac{A_0}{A_0+\alpha}\frac{1}{\frac{\tau}{A_0+\alpha}s+1} \tag{14.24}$$

Se obține, astfel, un sistem de ordinul I cu o constantă de timp $T_r=\frac{\tau}{A_0+\alpha}$, unde $\alpha=1+\frac{R_2}{R_1}+\frac{R_2}{R_i}$ și un factor de amplificare $K_R^{'}=\frac{R_2}{R_1}\frac{A_0}{A_0+\alpha}<K_R$.

În figura 14.15, se prezintă răspunsul ideal și real al structurii prezentate în figura 14.14.

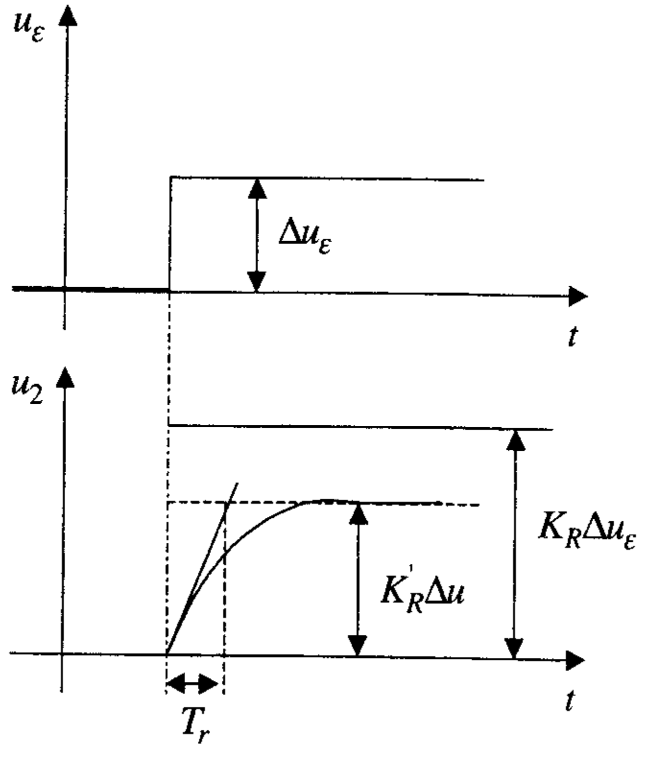


Fig. 14.15

De remarcat faptul că în montajul selectat rolul esențial în aproximarea funcției de transfer $H_{Ri}(s)$ îl joacă A_0.

Într-o manieră similară, se poate obține comportarea de tip P, dacă se folosește AO în montaj neinversor (fig. 14.16):

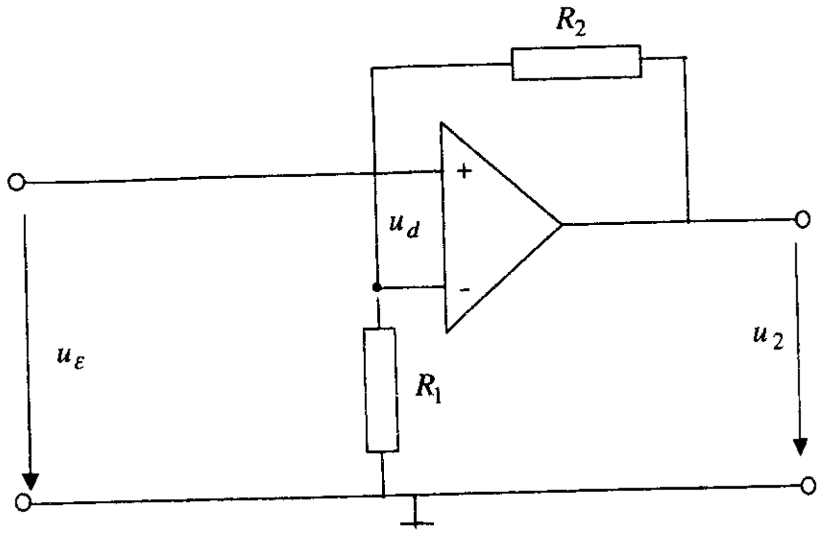


Fig. 14.16

în care

$$u_d=0,\ i_i=0$$

și

$$H_{Ri}(s)=1+\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}=1+\frac{R_2}{R_1}=K_R \tag{14.25}$$

14.4.2. Realizarea legii de reglare PD cu filtrare (PDF)

În figura 14.17 se prezintă structura AO cu reacție de tensiune în montaj inversor care realizează legea PDF cu:

$$Z_2(s)=\frac{R_2}{R_2C_2s+1},\ Z_1(s)=\frac{R_1}{R_1C_1s+1}.$$

Funcția de transfer realizată de structura din figura 14.17, în cazul ideal, este:

$$H_{Ri}(s)=\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}=\frac{R_2}{R_1}\frac{R_1C_1s+1}{R_2C_2s+1} \tag{14.26}$$

sau

$$H_{Ri}(s)=K_R\frac{T_ds+1}{\alpha T_ds+1} \tag{14.27}$$

unde

$$K_R=\frac{R_2}{R_1},\ T_d=R_1C_1 \text{ și } \alpha T_d=R_2C_2.$$

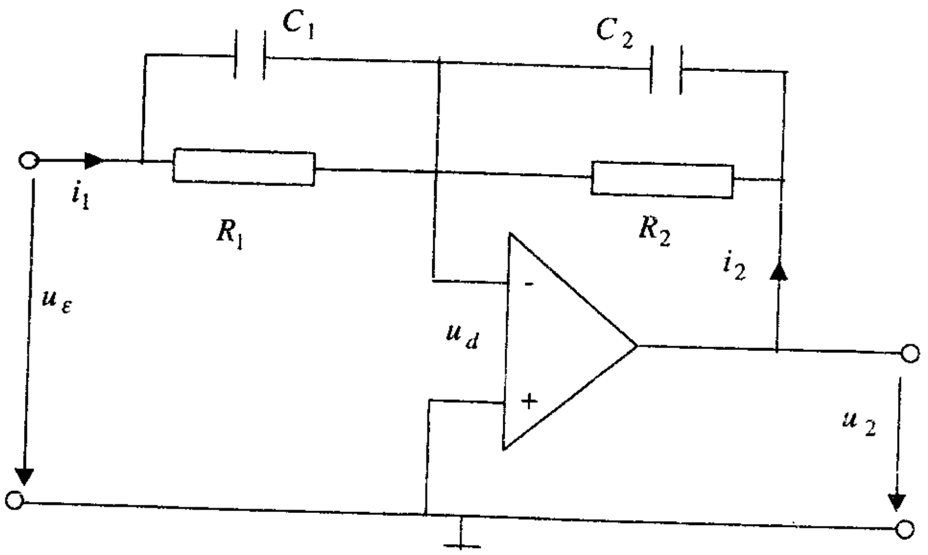


Fig. 14.17

Alegerea elementelor de circuit R_1, C_1, R_2 şi C_2 poate asigura o comportare de tip PDF, dacă $\alpha << 1$.

În mod similar, se poate obţine o funcţie de transfer de tipul PDF dacă se foloseşte borna neinversoare (fig. 14.18).

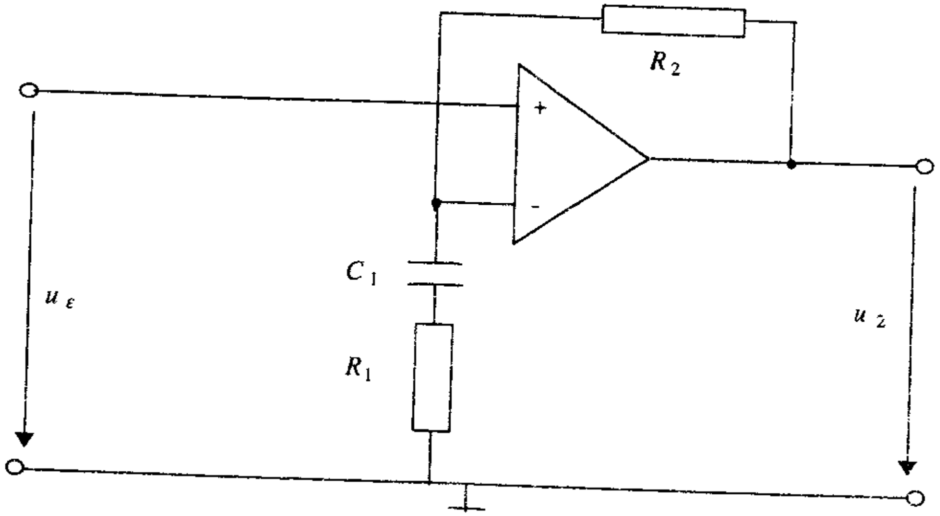


Fig. 14.18

cu

$$Z_1(s) = R_1 + \frac{1}{C_1 s},$$

$$Z_2(s) = R_2,$$

$$H_{Ri}(s) = 1 + \frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} = 1 + \frac{R_2}{R_1 + \dfrac{1}{C_1 s}} = 1 + \frac{R_2}{R_1}\frac{1}{1 + R_1 C_1 s} \qquad (14.28)$$

sau

$$H_{Ri}(s) = K_R \frac{1 + sT_d'}{1 + s\alpha T_d'}. \qquad (14.29)$$

O structură interesantă (fig. 4.19) se obţine prin includerea în reacţie a unui repetor în jurul unui AO, în care

$$i_1 = -i_2$$

$$u_d = 0$$

şi

$$\frac{u_\varepsilon}{R_1} = -\frac{u_x}{R_2}$$

$$\frac{u_x}{u_2} = \frac{R_4 + \dfrac{1}{C_3 s}}{R_3 + R_4 + \dfrac{1}{C_3 s}} \qquad (14.30)$$

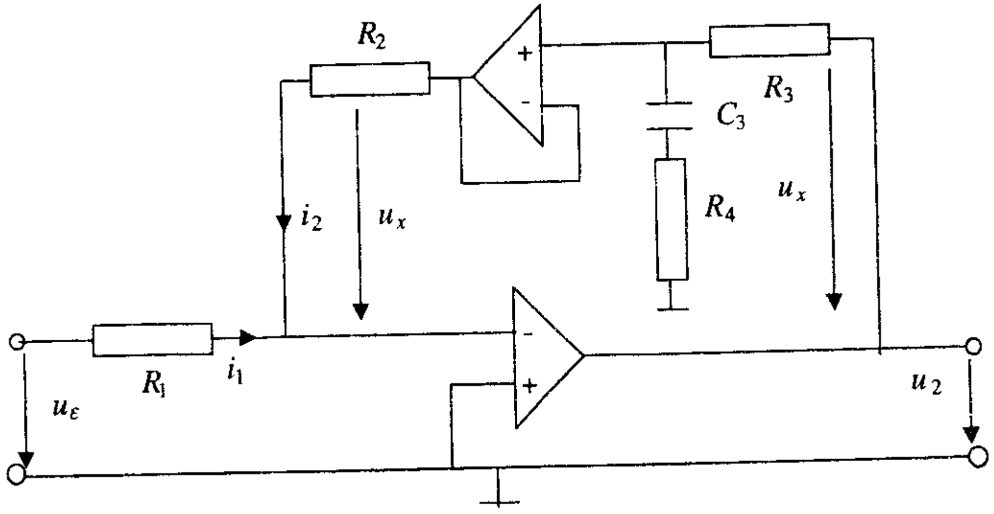


Fig. 14.19

Rezolvând (14.30) prin eliminarea tensiunii u_x, se obține:

$$H_{Ri}(s) = K_R \frac{1+sT_d}{1+sT_F} \tag{14.31}$$

unde:

$$K_R = \frac{R_2}{R_1},\ T_d = (R_3 + R_4)C_3,\ T_F = R_4 C_3 .$$

Dacă $R_4 = 0$, se obține o lege de reglare PD ideală.

14.4.3. Realizarea legii de reglare I, PI

O structură simplă pentru realizarea operației de integrare este prezentată în figura 14.20, în care $i_1 = -i_2$, $i_i = 0$ și $u_d = 0$.

În acest caz, impedanțele din circuitul de reacție sunt $Z_1(s) = R_1$, $Z_2(s) = \dfrac{1}{C_2 s}$.

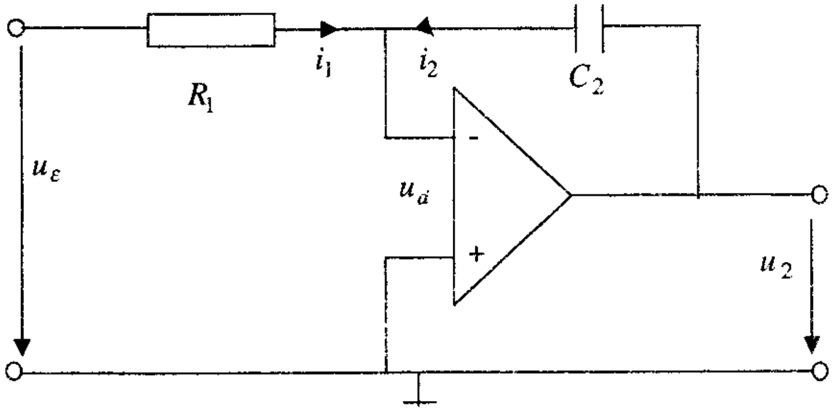


Fig. 14.20

Funcția de transfer ideală este:

$$H_{Ri}(s) = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} = \frac{1}{R_1 C_2 s} = \frac{1}{T_i s} \tag{14.31}$$

unde $T_i = R_1 C_2$ reprezintă constanta de timp integrală.

Realizarea legii de reglare PI se obține folosind, spre exemplu, structura din figura 14.21.

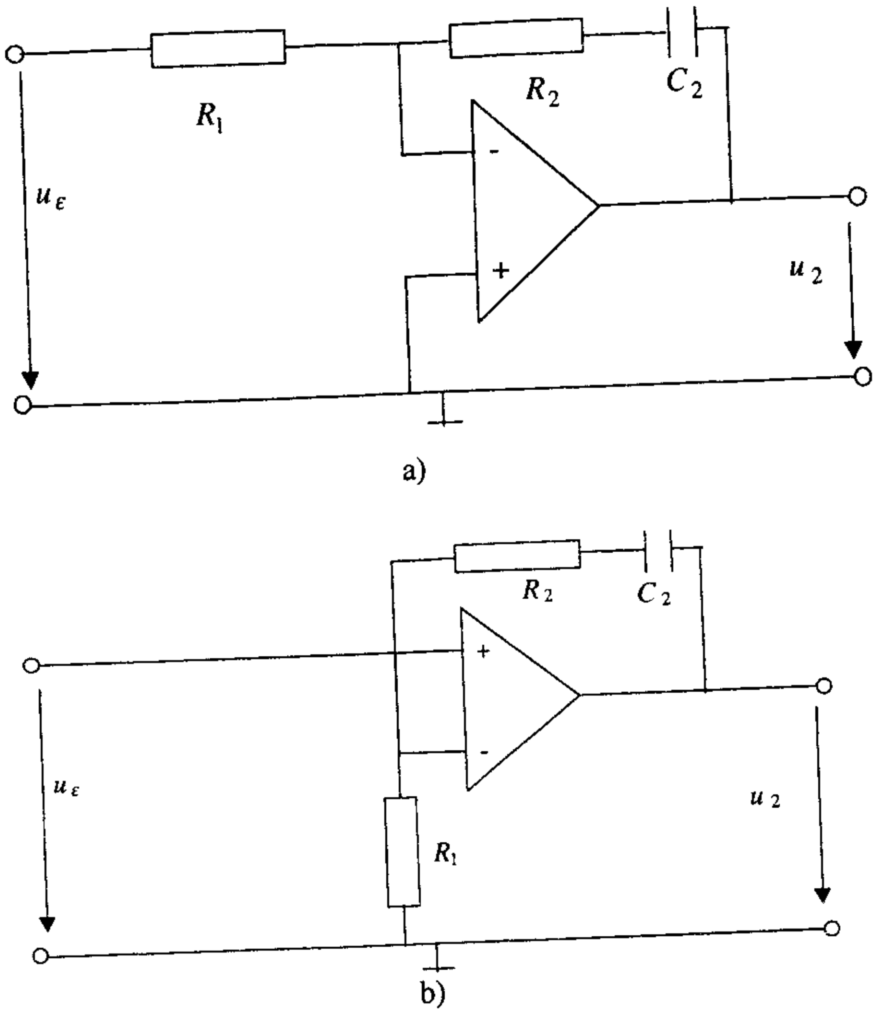


Fig. 14.21

În cazul în care AO este utilizat în montaj inversor, funcția de transfer are forma:

$$H_{Ri}(s) = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} = \frac{R_2 + \frac{1}{C_2 s}}{R_1} = \frac{R_2}{R_1}\left(1 + \frac{1}{R_2 C_2 s}\right) \tag{14.32}$$

sau

$$H_{Ri}(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right), \tag{14.33}$$

unde $K_R = \frac{R_2}{R_1}$, $T_i = R_2 C_2$.

Dacă se ia în considerație amplificarea limitată $A(s) = \frac{A_0}{\tau s + 1}$ și $R_i = finit$, se poate obține funcția de transfer reală:

$$H_{Rr}(s) = \frac{R_2}{R_1}\left(1 + \frac{1}{R_2 C_2 s}\right)\frac{1}{1 + \frac{1 + \left(1 + \frac{1}{R_2 C_2 s}\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}{\frac{A_0}{\tau s + 1}}} \qquad (14.34)$$

După efectuarea calculelor, se poate scrie funcția de transfer $H_{Rr}(s)$ sub forma:

$$H_{Rr}(s) = K_R^{'}\frac{T_i s + 1}{\alpha T_i s + 1}, \qquad (14.35)$$

unde $K_R^{'} \neq K_R$, $\alpha > 1$.

În consecință, în cazul utilizării unui amplificator cu factor de amplificare finit, $\tau \neq 0$ și R_i finit, se obține o lege de reglare de tipul întârziere-anticipație.

În cazul în care se folosește structura din figura 14.21*b*, funcția de transfer $H_{Ri}(s)$ are forma:

$$H_{Ri}(s) = 1 + \frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} = 1 + \frac{R_2 + \frac{1}{C_2 s}}{R_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1}\left(1 + \frac{1}{R_2 C_2 s}\right) \qquad (14.36)$$

sau

$$H_{Ri}(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) \qquad (14.37)$$

unde $K_R = \frac{R_2 + R_1}{R_1}$, $T_i = (R_1 + R_2)C_2$.

O altă variantă pentru realizarea legii de reglare PI este prezentată în figura 14.22. cu:

$i_1 = -i_2$, $u_d = 0$ și

$$\frac{u_\varepsilon}{R_1} = -\frac{u_x}{R_2}$$

$$\frac{u_x}{R_3} = \frac{u_2}{R_3 + \frac{1}{sC}}. \qquad (14.38)$$

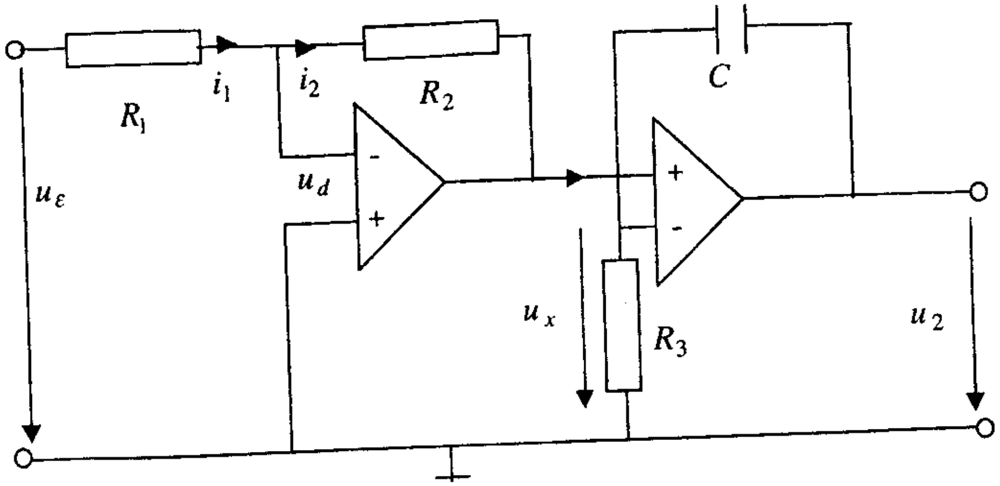


Fig. 14.22

Funcția de transfer atașată structurii din figura 14.22 se obține cu ușurință prin eliminarea tensiunii intermediare u_x:

$$H_{Ri}(s) = \frac{u_2}{u_\varepsilon} = \frac{R_2}{R_1}\frac{1 + R_3 C s}{R_3 C s} = K_R\frac{1 + T_i s}{T_i s} \qquad (14.39)$$

unde $K_R = \frac{R_2}{R_1}$, $T_i = R_3 C$.

De remarcat faptul că utilizarea acestei structuri elimină interinfluența între parametrii de acord, parametrii K_R și T_i putând fi ajustați independent.

14.4.4. Realizarea legii de reglare PID

Cea mai simplă structură pentru realizarea legii de reglare PID este prezentată în figura 14.23, cu $i_1 = -i_2$ și $u_d = 0$.

În această structură identificăm:

$$Z_2(s) = R_2 + \frac{1}{C_2 s}$$

$$Z_1(s) = \frac{R_0\left(R_1 + \frac{1}{C_1 s}\right)}{R_0 + R_1 + \frac{1}{C_1 s}} \qquad (14.40)$$

iar funcţia de transfer $H_{Ri}(s)$ are forma:

$$H_{Ri}(s)=K_R\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)\frac{T_d s+1}{T_F s+1} \qquad (14.41)$$

unde $K_R=\dfrac{R_2}{R_0}$, $T_i=R_2C_2$, $T_d=(R_0+R_1)C_1$ şi $T_F=R_1C_1$.

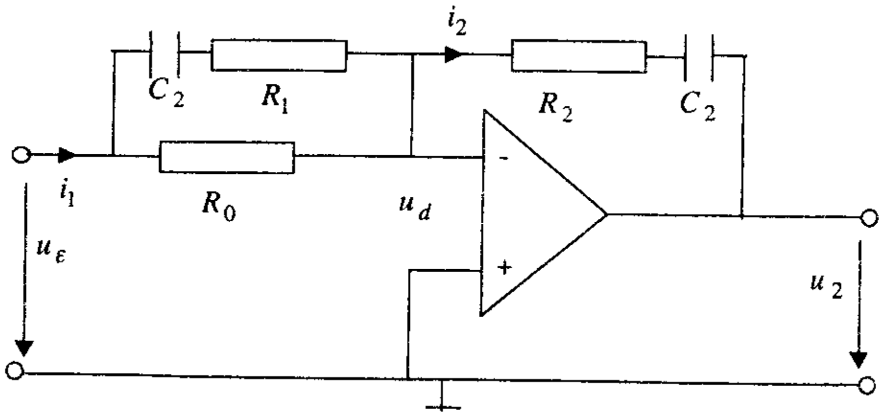


Fig. 14.23

Dacă alegem $R_1=0$, se obţine o lege de reglare PID fără filtrare. De remarcat faptul că această structură conduce la interinfluenţe între parametrii de acord ai regulatorului.

Pentru a evita interinfluenţa se poate adopta o structură cu separarea componentelor P, I şi D (fig. 14.24):

unde:

$$\frac{u_\varepsilon}{R_1+\dfrac{1}{C_3 s}}=-\frac{u_{DT1}}{R_3}$$

$$\frac{u_{DT1}}{u_\varepsilon}=-\frac{R_3C_3 s}{1+R_4C_3 s}. \qquad (14.42)$$

Funcţia de transfer a întregului ansamblu se obţine cu uşurinţă ţinând seama că ultimul AO realizează operaţia de însumare şi realizează şi factorul de amplificare independent de T_i şi T_d:

$$H_{Ri}(s)=K_R\left[1+\frac{1}{sT_i}+\frac{sT_d}{1+sT_1}\right] \qquad (14.43)$$

unde parametrii de acord se calculează cu relaţiile:

$K_R=\dfrac{R_6}{R_5}$, $T_i=R_2C_2$, $T_d=R_3C_3$ şi $T_1=R_4C_3$.

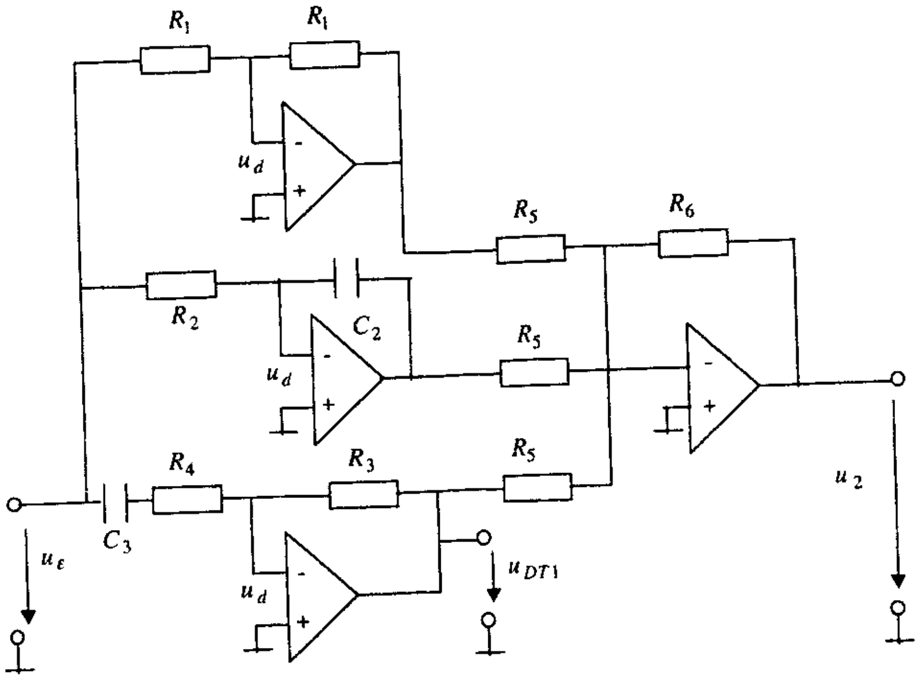


Fig. 14.24

În mod similar, în cazul structurii pentru realizarea legii de reglare de tip PI cu considerarea unui AO real, se poate obţine funcţia de transfer reală pentru algoritmul PID. Admiţând $R_1=0$ în figura 14.23, se poate scrie funcţia de transfer reală $H_{Rr}(s)$ sub forma:

$$H_{Rr}(s)=\frac{R_2}{R_0}\left(1+\frac{1}{R_2C_2 s}\right)(R_1C_1 s+1)* \qquad (14.44)$$

$$*\frac{1}{1+\dfrac{1+\dfrac{R_2}{R_0}\left(1+\dfrac{1}{R_2C_2 s}\right)(R_0C_1 s+1)+\dfrac{R_2}{R_1}\left(1+\dfrac{1}{R_2C_2 s}\right)}{\dfrac{A_0}{\tau s+1}}}$$

Din analiza relaţiei (14.44) rezultă o funcţie de transfer de forma:

$$H_{Rr}(s)=K_R\frac{1+T_i s}{\alpha T_i s+1}\frac{T_d s+1}{\beta T_d s+1}, \qquad (14.45)$$

unde $\alpha>1$ şi $\beta<1$, ceea ce evidenţiază o lege de reglare compusă din două reţele „anticipaţie-întârziere" şi „întârziere-anticipaţie".

Prin alegerea corespunzătoare a structurii circuitelor de corecție și a structurii AO în montaj inversor, neinversor sau diferențial, pot fi realizate legile de reglare convenționale cu parametrii de acord K_R, T_i, T_d, T_F cu largă aplicabilitate, atât pentru procese lente, cât și pentru procese rapide.

14.4.5. Probleme ale preciziei de realizare a legii de reglare și de acordare a algoritmilor implementați cu AO

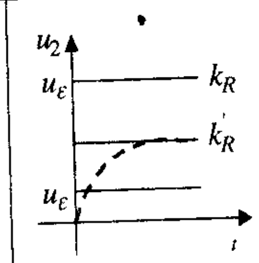
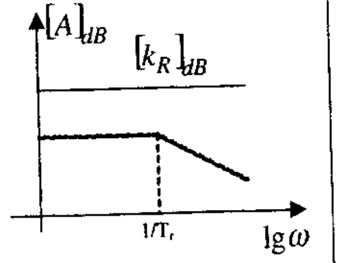
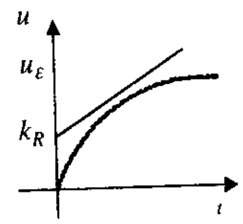
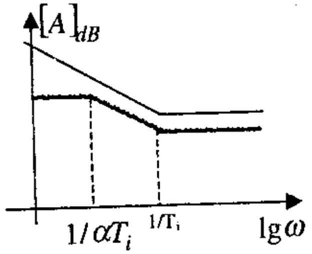
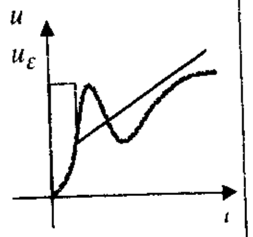
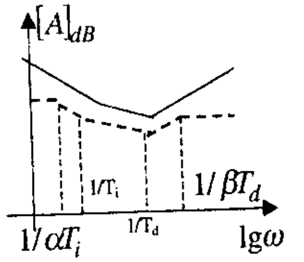
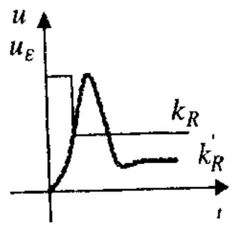
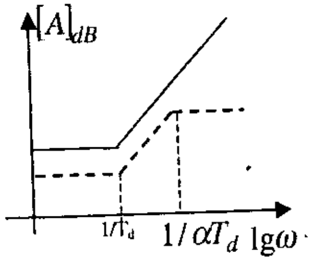
Precizia de realizare a legilor de reglare este direct influențată de performanțele AO și de structura circuitului de corecție. Așa cum s-a menționat deja, răspunsul indicial al unui regulator P este diferit pentru cazul real și ideal. În mod similar, se poate arăta diferența între comportarea ideală (AO ideal) și comportarea reală ($A(s)=\frac{A_0}{\tau s+1}$, $R_i=\text{finit}$) a algoritmilor PI și PID implementați cu AO și circuite de reacție. În tabelul 14.1 se prezintă sintetic răspunsul indicial și caracteristica de frecvență $A(\omega)$ pentru algoritmii P, PD, PI și PID, în cazul real și ideal.

De observat faptul că, în funcție de abaterile rezistenței de intrare a AO față de valoarea ideală, precum și în funcție de abaterea amplificării AO față de valoarea ideală, acestea determină modificări ale răspunsului indicial și, în mod corespunzător, o comportare în frecvență cu abateri semnificative față de comportarea ideală. Structura circuitului de corecție poate influența precizia de realizare a legii de reglare prin apariția fenomenului de interinfluență între parametrii de acord. Astfel, modificarea unui parametru determină modificări necontrolate ale celorlalți parametri.

Precizia acordării algoritmilor implementați cu AO și circuite de reacție este influențată de precizia de realizare a elementelor de circuit R și C, precum și de structura circuitelor de corecție. De menționat că, în cazul valorilor mari ale constantelor T_i și T_d, pentru regulatoarele destinate proceselor lente apar probleme în realizarea preciziei dorite de acordare, ținând seama de valorile mari ale rezistențelor variabile din structura circuitului de corecție, ca urmare a costurilor ridicate ale acestor rezistențe variabile de valori mari.

Anularea sau diminuarea efectelor interinfluenței între parametrii de acord se poate realiza prin alegerea corespunzătoare a structurii blocului de elaborare a comenzii cu AO și, evident, prin selectarea structurii circuitelor de corecție. Cea mai simplă metodă de eliminare a interinfluenței este separarea componentelor P, I și D, însă o asemenea soluție este mai complexă și mai costisitoare.

Tabelul 14.1

Tipul algoritmului	Răspuns indicial	Caracteristici de frecvență
(P) $H_{Ri}(s)=K_R$ $H_{Rr}(s)=\frac{K_R}{T_r s+1}$		
(PI) $H_{Ri}(s)=K_R\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)$ $H_{Rr}(s)=K_R'\frac{1+T_i s}{1+\alpha T_i s}$		
(PID) $H_{Ri}(s)=K_r\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)(T_d s+1)$ $H_{Rr}(s)=K_R'\frac{1+T_i s}{1+\alpha T_i s}\frac{1+T_d s}{1+\beta T_d s}$ $\alpha>1$, $\beta<1$		
(PD) $H_{Ri}(s)=K_R(1+T_d s)$ $H_{Rr}(s)=K_R'\frac{T_d s+1}{\alpha T_d s+1}$		

(Caracteristicile ideale sunt reprezentate cu linie continuă, iar caracteristicile reale, cu linie punctată)

14.5. Elemente de compatibilitate a comenzii cu diferite elemente de execuție

Blocul pentru elaborarea comenzii furnizează mărimea de comandă u_c în urma prelucrării matematice a informațiilor despre mărimea prescrisă (referința) și mărimea măsurată, reprezentată prin variabilele interne r, y și ε. Aceste mărimi sunt adimensionale normalizate și se consideră că în condiții normale de funcționare ele iau valori în intervalele $[0,1]$, respectiv $[-1,1]$ pentru eroare.

Condițiile normale de funcționare menționate mai sus se referă la faptul că mărimile fizice pe care le reprezintă iau valori în domeniile declarate ca fiind normale. Aceste variabile pot fi reprezentate, în unele aplicații, procentual:

$$r\% \;,\; y\% \in [0,\ 100]\ \%$$

sau

$$\varepsilon\% \in [-100,\ 100]\ \%$$

sau raportate la o valoare fizică limită U:

$$r, y \in [0, U] \equiv [0,1]U \;,\; \varepsilon \in [-U,\ U] \equiv [-1,\ 1]U \,.$$

În cazul implementării legii de reglare cu AO, tensiunea $U = 10\ V$, iar în cazul implementării numerice în virgulă fixă, U poate fi valoarea numerică pozitivă maximă de reprezentare a numerelor care sunt prelucrate prin algoritmi de calcul în virgulă fixă.

Ieșirea u_c din legea de reglare se poate considera ca fiind un număr real oarecare, $u_c \in R$, chiar dacă, de exemplu, din punct de vedere fizic, $u_c \in [-1,1]$.

Pentru a compatibiliza mărimea elaborată prin legea de reglare cu intrarea în elementul de execuție (ieșirea hard a regulatorului), regulatoarele sunt prevăzute cu funcții de deplasare-limitare și de adaptare. Aceste funcții sunt realizate explicit prin blocuri specifice sau sunt incorporate în blocul de elaborare a comenzii.

Funcția de deplasare este realizată prin adăugarea unei valori constante $u_c^b \in [-1,1]$ la mărimea u_c, rezultând mărimea de comandă deplasată:

$$u_c^d = u_c + u_c^b \,.$$

În felul acesta se poate ajusta o valoare dorită a ieșirii din regulator (intrarea în elementul de execuție) care să corespundă valorii $u_c = 0$ în jurul căreia au loc evoluțiile dinamice.

Compatibilitatea cu elementele finale de ieșire se asigură printr-un bloc care asigură o valoare a mărimii de comandă deplasată și limitată u_c^{dl}:

$$u_c^{dl} = \begin{cases} 0 \;, & u_c^d < 0 \\ u_c^d \;, & u_c^d \in [0, u_{c_M}] ,\quad u_{c_M} \in [0,1] \\ u_{c_M} \;, & u_c^d > u_{c_M} \end{cases} \qquad (14.46)$$

unde valoarea maximă a comenzii u_{c_M} este ajustată de utilizator.

Blocul care realizează funcția de deplasare și limitare (desaturare) este descris în regim staționar prin următoarea relație intrare-ieșire:

$$u_c^{dl} = \begin{cases} 0 \ \text{pentru}\ u_c < -u_c^b \\ u_c + u_c^b \ \text{pentru}\ u_c \in [-u_c^b,\ u_{c_M} - u_c^b] \\ u_{c_M} \ \text{pentru}\ u_c > u_{c_M} - u_c^b \end{cases} \qquad (14.47)$$

cu $u_c^b \in [-1,1]$, $u_{c_M} \in [0,1]$.

Caracteristica statică a blocului de deplasare-limitare este prezentată în figura 14.25.

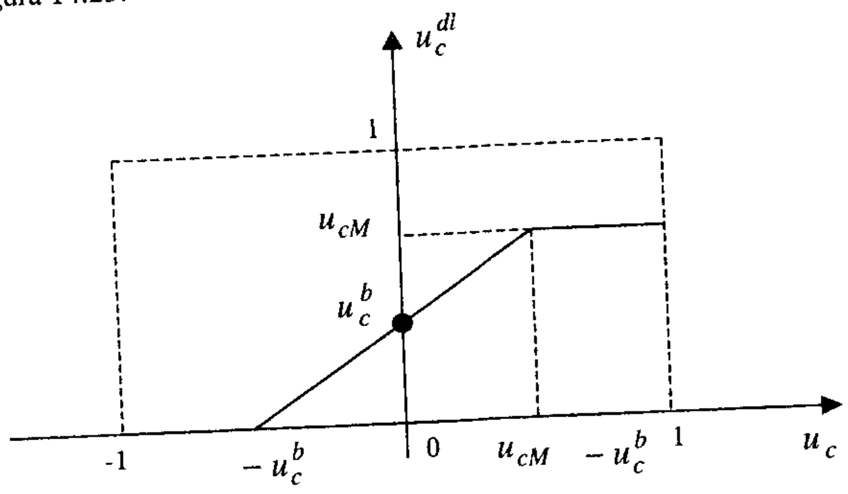


Fig. 14.25

Mărimea de comandă elaborată de regulator sau generată normal se transmite spre elementul de execuție prin intermediul unui adaptor de ieșire. Mărimea (mărimile) de ieșire din adaptor u_R^f sunt așa numitele ieșiri hard și exprimă mărimi fizice purtătoare de informații. Aceste mărimi pot fi de două tipuri: *ieșiri liniare* și *ieșiri bipoziționale*.

În general, se iau în considerație două ieșiri ale adaptorului, u_{R1}^f și u_{R2}^f, pentru a asigura la intrarea elementelor de execuție comenzi simultane cu *acțiune directă* și *inversă* pentru elemente de execuție *normal deschise* și *normal închise* (u_c^{zd}, u_c^{zi}).

Sensul de acțiune a comenzilor și limitele de la care ele sunt active sunt asigurate în blocuri specializate de adaptare hard a ieșirii [19, 34]. Blocurile de adaptare hard asigură adaptarea între semnalul intern u_c^d, respectiv u_c^i, considerat ca luând valori în intervalul $[0,1]$ sau $[0,100]$ sau $[0,U]$ volți în cazul circuitelor analogice și semnalele de ieșire u_{R1}^f și u_{R2}^f.

În cazul în care ieșirile sunt liniare, se asigură dependența de tipul:

$$U_R^f = \begin{cases} U_{Rm}^f & \text{, dacă } u_c^z < 0 \\ U_{Rm}^f + \left(U_{RM}^f - U_{Rm}^f\right)u_c^z & \text{, dacă } u_c \in [0,\ 1] \\ U_{RM}^f & \text{, dacă } u_c^z > 1 \end{cases} \qquad (14.48)$$

unde u_c^z este u_c^{zd} sau u_c^{zi}, iar U_R^f este u_{R1}^f sau u_{R2}^f.

U_{Rm}^f este comanda minimă, iar U_{RM}^f este comanda maximă în unități inginerești (fizice) transmise spre elementul de execuție.

Caracteristica statică a blocului de adaptare hard este reprezentată în figura 14.26.

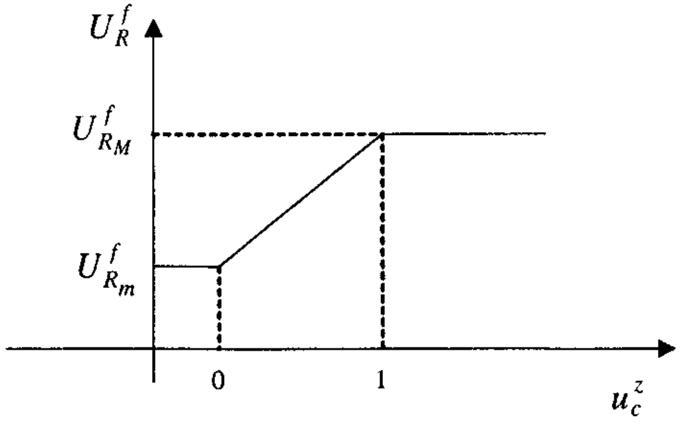


Fig. 14.26

Mărimea intermediară u_c^z se obține luând în considerație cele două regimuri de funcționare, *direct* și *invers*, în funcție de tipul elementului de execuție.

Relația între mărimea internă u_c și mărimea intermediară adaptată în blocul de adaptare hard este evidențiată în figura 14.27.

Cele două caracteristici evidențiază zona de insensibilitate și parte pozitivă (fig. 14.27*a*), respectiv parte negativă (fig. 14.27*b*).

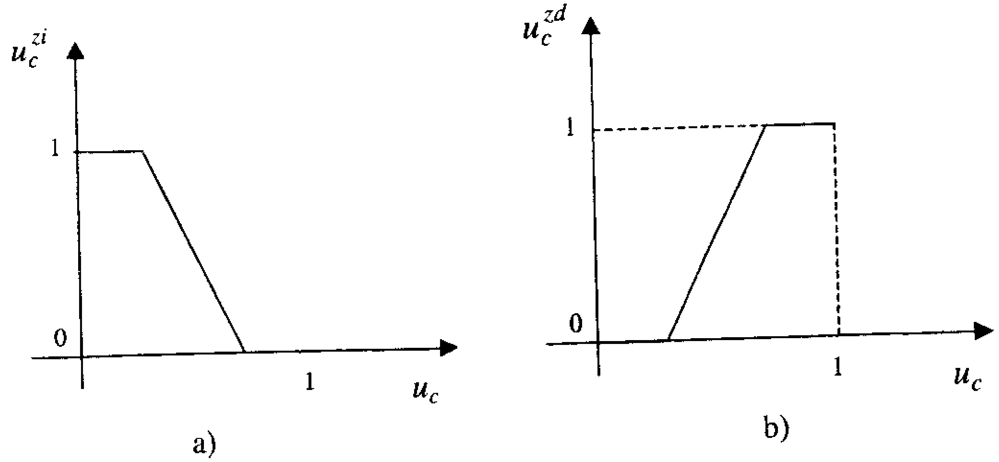


Fig. 14.27

Dacă acest bloc cu funcționare liniară generează un semnal de curent $[4,\ 20]$ mA, atunci $U_{Rm}^f = 4$, $U_{RM}^f = 20$; dacă este un semnal de tensiune $[-5,\ 5]$ V, atunci $U_{Rm}^f = -5$ și $U_{RM}^f = 5$ etc.

Analizând aspectul caracteristicilor statice ale diferitelor blocuri auxiliare incluse în structura unui regulator, evidențiem cu ușurință o serie de neliniarități, care în parte sunt naturale, în parte sunt intenționate. Pentru a stabili relația între mărimea u_R^f și mărimea măsurată din proces, reamintim că:

$$y_{IT}^{real} = \frac{y_{IT}^f - Y_{ITm}^f}{Y_{ITM}^f - Y_{ITm}^f},\quad y_{IT}\% = y_{IT}^{real} \cdot 100, \qquad (14.49)$$

unde y_{IT}^{real} este ieșirea din instalația tehnologică, exprimată în unități relative, iar Y_{ITm}^f și Y_{ITM}^f reprezintă valorile minimă și maximă ale ieșirii, reprezentate în unități fizice.

În cazul unui traductor liniar $y_{IT}^{real} = y \in [0,1]$, $y_{IT}\% = y\% \in [0,100]$. Caracteristica statică a regulatorului (fără componenta integrală) reprezintă dependența:

$$u_{R1}^f = F_1\left(y_{IT}^{real}\right),\ u_{R2}^f = F_2\left(y_{IT}^{real}\right) \qquad (14.50)$$

pentru cele două ieşiri compatibile cu elementul de execuţie. Aceste reprezentări oferă operatorului uman posibilitatea de percepţie, în unităţile inginereşti ale instalaţiei concrete, a efectelor diferiţilor parametri de ajustare în amplitudine.

În figura 14.28 sunt prezentate componentele lanţului ieşire măsurată – comandă transmisă elementului de execuţie.

Prin alegerea corespunzătoare a diferiţilor parametri ce definesc caracteristicile statice ale blocurilor auxiliare şi a blocului de elaborare a comenzii, se poate obţine o zonă liniară a caracteristicii statice a regulatorului, suficient de largă pentru a asigura un domeniu de reglare suficient de larg faţă de punctul static în raport cu referinţa. De remarcat faptul că unii parametri sunt ajustabili (K_R^{real}, u_c^b, ε_b, z_d, z_i, u_{c_M}), pe când alţi parametri sunt fixaţi prin particularităţile circuitelor utilizate în structura regulatorului.

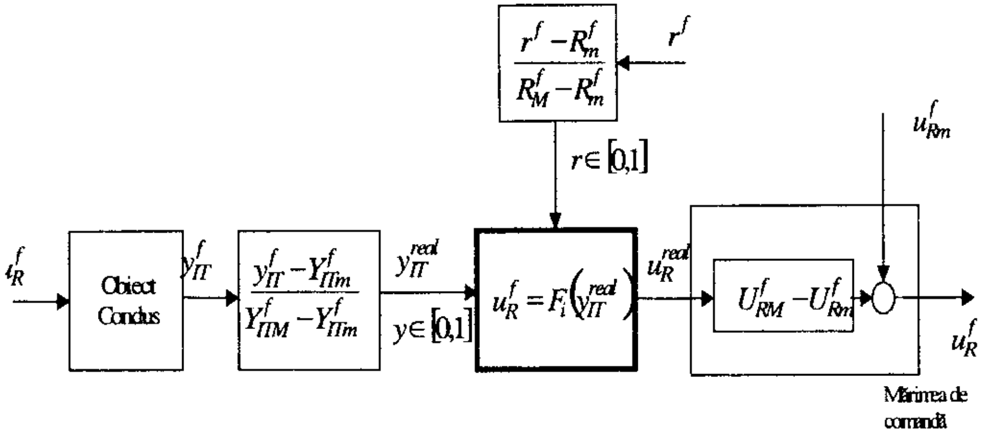


Fig. 14.28

Astfel, acordarea regulatorului pentru o aplicaţie dată nu se rezumă numai la alegerea valorilor parametrilor K_R, T_i şi T_d, ci şi la selectarea unor parametri structurali, care asigură forma dorită a caracteristicii statice a regulatorului.

Adaptarea comenzii la diferite tipuri de elemente de execuţie (pneumatice, hidraulice, electrice) se realizează prin intermediul convertoarelor şi adaptoarelor de semnal specifice.

14.6. Blocuri de transfer în structura regulatoarelor

Aşa cum s-a menţionat, orice SRA trebuie prevăzut să funcţioneze în cel puţin două regimuri de funcţionare:

- funcţionare în regim AUTOMAT (A);
- funcţionare în regim MANUL (M).

Structurile moderne de sisteme de conducere sunt prevăzute şi cu posibilitatea de funcţionare în regim CALCULATOR (C), în cazul în care comanda este elaborată la nivelul ierarhic superior (în calculator) şi se transmite direct elementului de execuţie. În aceste condiţii, regulatorul se află în stare de aşteptare sau în rezervă (back-up station).

Blocul de transfer a comenzii spre elementul de execuţie, la comutare dintr-un regim de funcţionare în alt regim de funcţionare, poate fi integrat în blocul de elaborare a comenzii sau poate fi un bloc separat.

În procesul de comutare A-M, pot apărea şocuri la elementul de execuţie, cu implicaţii nedorite pentru instalaţia tehnologică, deoarece în momentul comutării t_0, cele două mărimi concurente la intrarea elementului de execuţie u_c^a şi u_c^m pot fi diferite. Mărimea furnizată în regim automat este notată cu u_c^a şi comanda generată manual este notată cu u_c^m ($u_c^a(t_0) \neq u_c^m(t_0)$).

În structurile moderne de regulatoare sunt incluse blocuri specializate pentru echilibrare automată, astfel încât trecerea de la un regim de funcţionare la alt regim de funcţionare să se realizeze fără şocuri (Bumpless transfer). Aceste blocuri asigură, în fapt, continuitatea în timp, la momentul de comutare t_0 a funcţiei $u_c(t)$.

Sunt utilizate mai multe tehnici pentru realizarea funcţiei de comutare fără şocuri [6, 11, 19, 46]:

- comutarea A-M şi M-A, prin asigurarea unor stări iniţiale complementare;
- comutarea A-M şi M-A, prin tehnici de tip ramping;
- comutarea A-M şi M-A, prin utilizarea unui element integrator final comun;
- comutarea A-M şi M-A, prin echilibrare manuală.

În cele ce urmează se prezintă o structură a blocului de transfer ce utilizează un integrator final comun. Această metodă este aplicabilă în cazul în care comenzile manuale sunt incrementale, iar legea de reglare conţine componenta integrală în serie.

În figura 14.29 se prezintă o variantă de implementare a funcţiei de comutare fără şocuri, utilizând AO.

În regim manual, pantele nenule ale rampelor sunt:

$$\dot{u}_c^m = \pm\frac{U_m}{R_m C} = \pm\frac{U_m}{T_m}.$$

În regim automat, comanda u_c' este dată de:

$$U_c'(s) = H_R'(s)u_\varepsilon(s), \qquad (14.51)$$

unde $H_R'(s)$ este asigurată de funcţionarea în gol a unui circuit electronic cu tensiunea de ieşire u_c' şi o rezistenţă echivalentă de ieşire r_a, care determină constanta de timp T_i:

$$T_i = (r_a + R)C.$$

Pentru a realiza o lege de reglare de tip PI:

$$H_R(s) = K_R\left(1+\frac{1}{T_i s}\right) = K_R(T_i s+1)\frac{1}{T_i s} = H_R'(s)\frac{1}{T_i s}, \qquad (14.52)$$

unde

$$H_R'(s) = K_R\frac{T_i s+1}{\alpha T_i s+1} \cong K_R(T_i s+1),\ \alpha << 1,$$

deci trebuie conectat în amonte un circuit electronic care realizează regim de funcţionare în gol funcţia de transfer $H_R'(s)$.

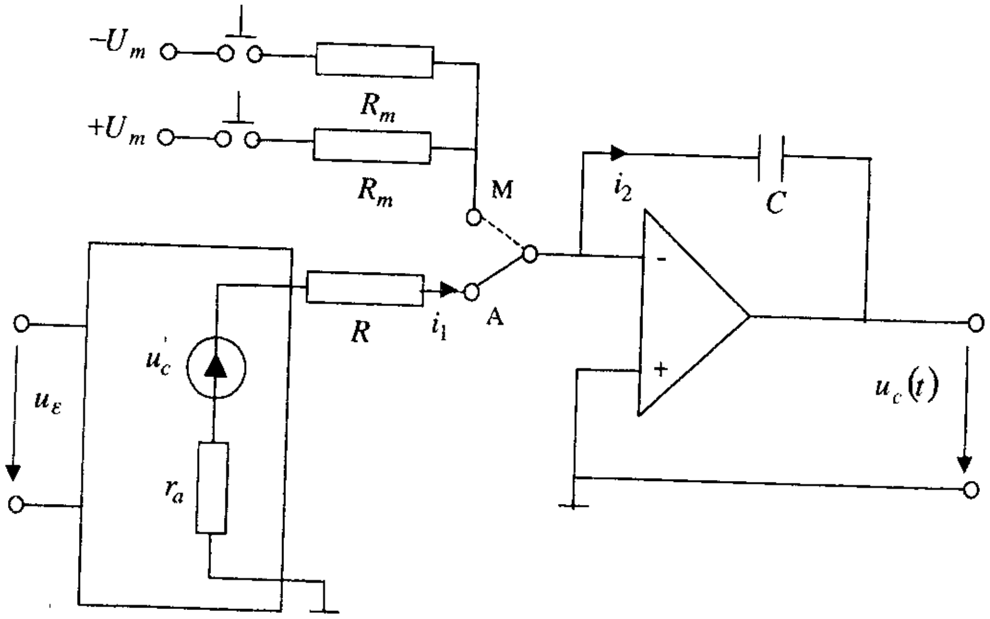


Fig. 14.29

Frecvent se utilizează structura de element PI cu un AO, două condensatoare şi intrare potenţiometrică (fig. 14.30) [34, 60, 66]. Această structură este cunoscută sub denumirea „bloc PI cu comandă manuală".

În regim automat (comutatorul în poziţie A) ieşirea $U_c(s)$ se calculează cu relaţia:

$$U_c(s) = K\left(1+\frac{1}{T_i s}\right) \text{ dacă } r = r_a + r_b << R_1,\ R_0 << R_1$$

$$K = \frac{C_1}{C_2},\ T_i = \frac{1}{\alpha}R_1 C_1,\ \alpha \in (0,\ 1]. \qquad (14.53)$$

În regim manual (comutatorul în poziţia M), ieşirea $U_c(s)$ este:

$$U_c(s) = \frac{1}{T_m s}U_m(s). \qquad (14.54)$$

Dacă se utilizează un asemenea bloc de transfer, legea de reglare care trebuie implementată se exprimă sub forma:

$$H_R(s) = H_R'(s)K\left(1+\frac{1}{T_i s}\right) \qquad (14.55)$$

în loc de

$$H_R(s) = H_R'(s)\frac{1}{T_i s}.$$

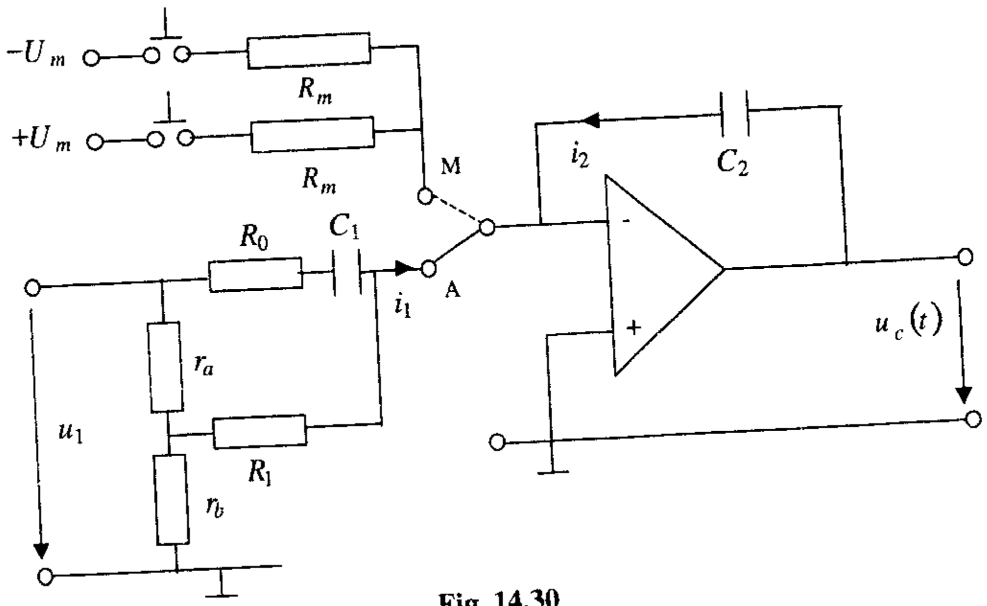


Fig. 14.30

De remarcat faptul că în ambele cazuri, la comutarea dintr-un regim de funcționare în alt regim, valoarea inițială a comenzii este egală cu ultima valoare a comenzii memorată în regimul precedent și deci nu apar șocuri la comutare.

14.7. Fenomenul wind-up și tehnici de eliminare a acestuia

Fenomenul de saturare a comenzii (wind-up) în SRA evidențiază necorelarea dintre operația de integrare inclusă în legea de reglare și limitele de saturație prezente la intrarea instalației tehnologice, limite datorate elementului de execuție și/sau echipamentelor pe care se implementează legea de reglare.

Apariția fenomenului în SRA determină o funcționare necorespunzătoare a SRA ca urmare a neliniarităților introduse de saturație, cu efecte majore asupra gradului de stabilitate și asupra preciziei SRA.

Majoritatea echipamentelor de automatizare au implementate facilități anti wind-up cu un anumit grad de complexitate, indiferent de tehnologia de realizare.

Pentru a evidenția fenomenul wind-up, se consideră structura de SRA din figura 14.31, cu regulator ce conține componenta integrală și neliniaritate de tip saturație introdusă de EE și/sau elementele auxiliare ale regulatorului.

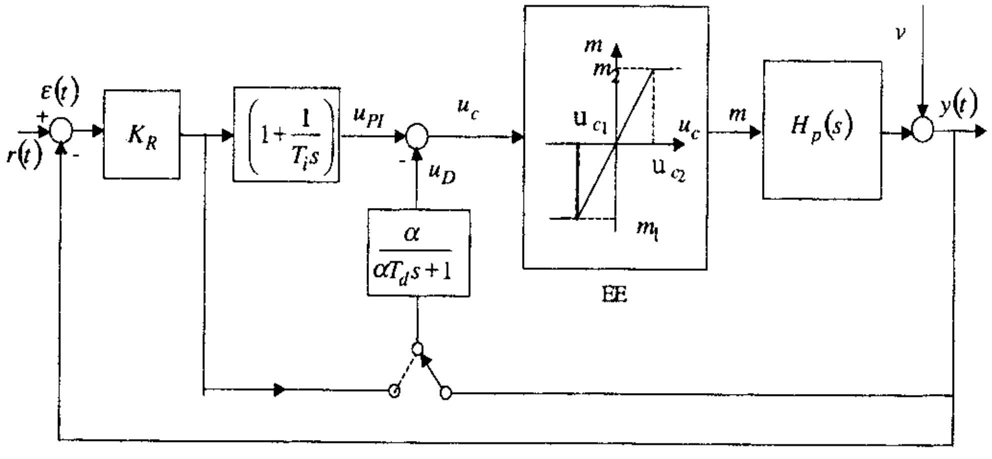


Fig. 14.31

Neliniaritatea de tip saturație poate fi descrisă cu ușurință astfel:

$$m = f(u_c) = \begin{cases} k \cdot u_c \text{ , dacă } u_c \in [u_{c1}, u_{c2}] \\ m_2 \text{ , dacă } u_c > u_{c2} \\ m_1 \text{ , dacă } u_c < u_{c1} \end{cases} \qquad (14.56)$$

unde

$$k = \frac{m_2 - m_1}{u_{c2} - u_{c1}}.$$

În cele ce urmează, se va neglija partea dinamică a EE, având în vedere constantele de timp relativ mici ale EE pentru majoritatea aplicațiilor practice.

Pentru situațiile în care mărimea de comandă u_c crește peste limita u_{c2}, rezultă o mărime de execuție limitată la valoarea maximă m_2. În aceste condiții, SRA se comportă ca un sistem în circuit deschis. Prezența perturbației la ieșirea procesului poate contribui la creșterea comenzii, cu efect asupra comenzii, care poate crește necontrolat, până ce se schimbă semnul erorii. Comanda începe să scadă și, în consecință, se poate modifica mărimea de execuție, procesul putând fi din nou controlat prin controlul fluxului de energie. Pentru a evita apariția acestui fenomen datorat acțiunii integrale, care asigură creșterea comenzii în mod nejustificat, se impune includerea în structura regulatorului a unor proceduri și dispozitive care să oprească procesul de integrare în momentul în care se atinge valoarea de saturație a mărimii de execuție m_1 sau m_2. Se asigură astfel funcționarea EE într-o *zonă de lucru* care evită intrarea în saturație a acestuia.

Zona de lucru asigură funcționarea buclei de reglare (în circuit închis) și păstrarea unei relații cunoscute pentru dependența $u_c \rightarrow m$.

În interiorul zonei de lucru pot exista paliere orizontale (zone de insensibilitate), care determină alte fenomene nedorite, dar nu fenomenul wind-up.

Fenomenul wind-up depinde, atât de neliniaritățile EE, cât și de neliniaritățile introduse de regulator prin blocurile sale auxiliare și chiar de blocul de elaborare a comenzii.

Cea mai simplă schemă antiwind-up are la bază schimbarea automată a structurii legii de reglare, cu deconectarea componentei integrale din legea de reglare la atingerea saturației EE.

În figura 14.32 se prezintă structura unui regulator cu protecție antiwind-up prin generarea unui semnal antiwind-up.

Semnalul antiwind-up se generează ca diferență între intrarea și ieșirea din EE. Acest semnal se aplică la intrarea integratorului printr-un bloc de amplificare, egal cu $\frac{1}{T_r}$.

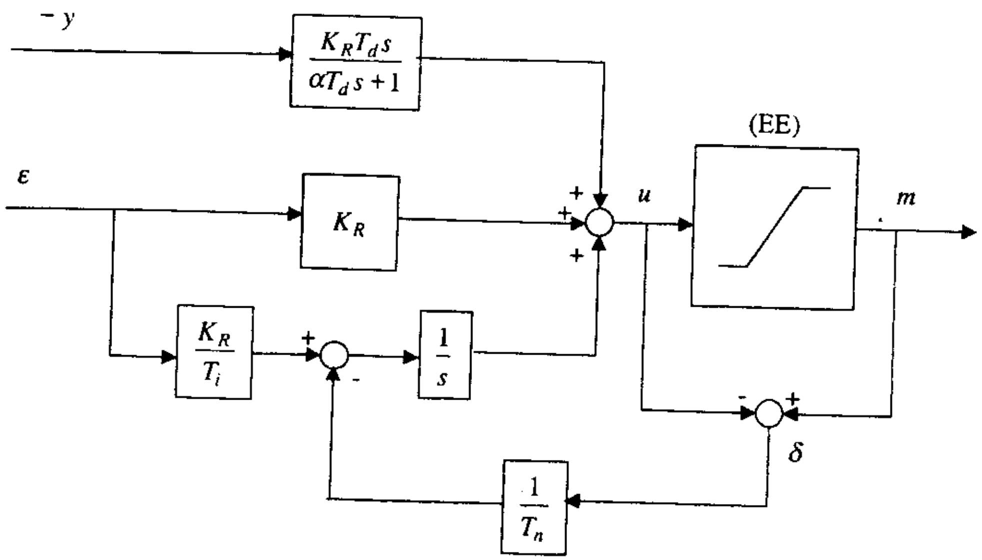


Fig. 14.32

De remarcat faptul că semnalul eroare δ (fig. 14.32) este zero când EE funcţionează în zona liniară (zona de lucru). La apariţia saturaţiei, $\delta \neq 0$ şi un semnal de reacţie încearcă a anula acest semnal prin resetarea componentei integrale, iar comanda este la limita de saturaţie. Integratorul este astfel resetat la o valoare corespunzătoare cu constanta de timp T_n, care poartă denumirea de constantă de timp de urmărire.

Această schemă de protecţie antiwind-up poate fi aplicată la orice EE care are o caracteristică arbitrară, nu în mod necesar o caracteristică de tip „saturaţie".

În cazul în care mărimea de execuţie este nemăsurabilă, se poate utiliza un semnal echivalent generat de un model al EE.

Semnalul antiwind-up se generează ţinând seama de caracteristica statică a elementului de execuţie, într-un bloc specializat cu zonă de insensibilitate (fig. 14.33).

Valorile u_{c1} şi u_{c2} depind, atât de limitele fizice între care se poate modifica mărimea de execuţie, cât şi de parametrii ajustabili din blocurile de deplasare-limitare şi adaptare.

Dacă $u_c \in [u_{c1}, u_{c2}]$, deci se situează în zona de lucru, atunci $\delta = 0$ şi legea de reglare nu este afectată de schema antiwind-up.

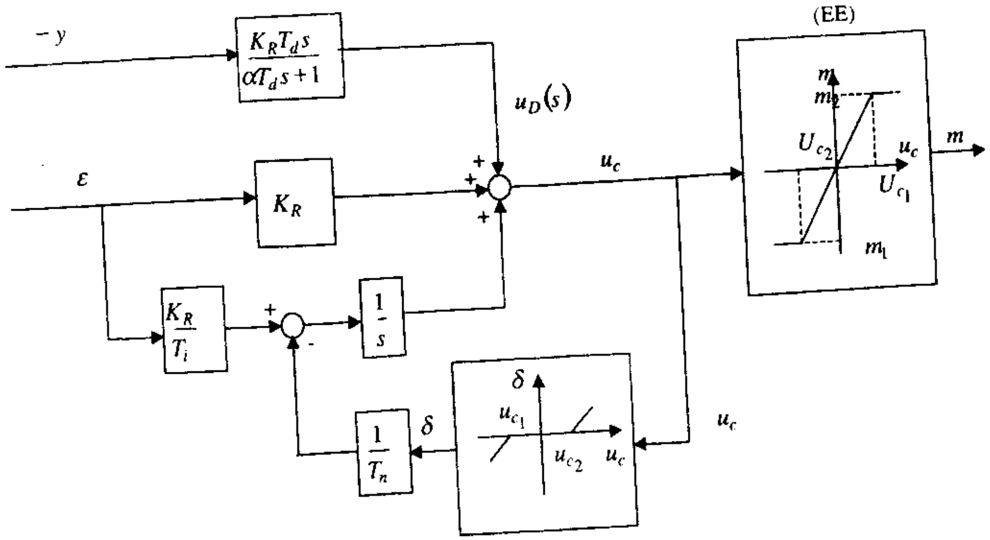


Fig. 14.33

În cazul în care $u_c > u_{c2}$ sau $u_c < u_{c1}$, semnalul $\delta \neq 0$ şi în jurul integratorului se aplică o reacţie negativă ponderată cu $\frac{1}{T_n}$. Astfel, pentru cazul în care $\delta \neq 0$, componenta integrală dispare, fiind înlocuită cu o comportare aperiodică cu constanta de timp T_n, fiind determinată de valoarea u_{c1} sau u_{c2}.

Dacă se calculează comanda $U_c(s)$, în cazul în care se atinge saturaţia pentru u_{c2}, se obţine:

$$U_c(s) = U_D(s) + K_R\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)\varepsilon(s) - \frac{1}{sT_n}\left[U_c - \frac{1}{s}U_{c2}\right]$$

sau

$$U_c(s)\left[1 + \frac{1}{T_n s}\right] = U_D(s) + K_R\frac{T_i s + 1}{T_i s}\varepsilon(s) + \frac{1}{s^2 T_n}U_{c2} \tag{14.57}$$

Dacă explicităm $U_c(s)$ din (14.57), rezultă:

$$U_c(s) = \frac{T_n s}{T_n s + 1}U_D(s) + K_R\frac{T_n}{T_i}\frac{T_i s + 1}{T_n s + 1}\varepsilon(s) + \frac{1}{s}\frac{1}{T_n s + 1}U_{c2} \tag{14.58}$$

cu cele trei componente, fără componenta integrală. Ultimul termen din (14.58) evidențiază un răspuns aperiodic cu o constantă de timp egală cu T_n şi o valoare de regim staționar egală cu U_{c2}.

De observat faptul că, în acest caz, componenta derivativă este încă o dată derivată, evidențiind un caracter dublu derivator în raport cu mărimea măsurată.

Acest ultim aspect tehnic trebuie tratat cu precauție în prezența zgomotelor, impunându-se, în multe situații, dezactivarea protecției antiwind-up, dacă legea de reglare conține componenta derivativă.

15. IMPLEMENTAREA NUMERICĂ A ALGORITMILOR DE REGLARE

15.1. Introducere

Sistemele numerice de conducere a proceselor ocupă o pondere importantă în automatizările industriale, ca urmare a avantajelor substanțiale pe care le prezintă în raport cu sistemele analogice. Astfel, capacitatea de prelucrare numerică a informațiilor, flexibilitatea şi siguranța în funcționare, complexitatea algoritmilor de conducere implementabili, compatibilitatea cu sisteme avansate de achiziție de date şi de comunicație sunt argumente importante în adoptarea soluțiilor numerice de conducere a proceselor industriale.

Evoluția spectaculoasă a tehnologiei circuitelor integrate pe scară foarte largă, a microprocesoarelor, procesoarelor specializate, a interfețelor de proces a impus în aplicațiile industriale structurile numerice de conducere.

Performanțele ridicate ale sistemelor numerice de prelucrare în timp real, bazate pe microprocesoare au impus aceste sisteme în aplicații simple sau complexe, determinând mutații conceptuale în conducerea proceselor. Cele mai avansate strategii de conducere proiectate pe baza modelelor matematice sau lingvistice ale proceselor şi-au găsit aplicabilitatea prin existența suportului hardware şi software performant pentru implementare.

Tehnologiile avansate de comunicație, compatibilitatea acestora cu sisteme performante de prelucrare şi achiziție numerică a informațiilor în timp real au impus noi concepte în conducerea proceselor.

Astfel, conducerea distribuită şi ierarhizată a proceselor complexe este completată cu succes cu sistemele de conducere cu transmitere la distanță a comenzilor prin mecanisme şi protocoale specifice rețelelor performante de calculatoare. Sistemele informatice şi de comunicație cu facilități de timp real sunt extinse cu succes în domeniul conducerii proceselor industriale, asigurându-se cerințele specifice de protecție, siguranță în funcționare şi compatibilitate cu mediul industrial.

Structurile numerice de conducere, în funcție de complexitatea proceselor, de complexitatea algoritmilor implementați, de distribuția geografică și nivelul interacțiunilor între parametri, de cerințele de performanță impuse pot fi organizate ca structuri simple cu regulator numeric orientat pe un proces sau ca structuri distribuite și ierarhizate pentru procese de medie și mare complexitate. În acest ultim caz, se evidențiază posibilitatea dezvoltării unor sisteme distribuite și paralele de prelucrare a informațiilor în timp real în configurații multiprocesor, total sau parțial cuplate. Sistemele performante de comunicație, magistralele de mare viteză, sistemele de operare multitasking cu facilități de timp real, integrate în arhitecturile de prelucrare numerică cu multiple procesoare performante, asigură implementarea și operaționalizarea celor mai avansate strategii de conducere cu fiabilitate maximă.

Cerințele *hardware*, *software* și *de comunicații* pentru un sistem de conducere numerică sunt determinate esențial de complexitatea procesului, de complexitatea funcțiilor implementate, de gradul de distribuție geografică a acestuia, de nivelul performanțelor impuse și de nivelul impus al siguranței în funcționare. Soluțiile adoptate de companii cum sunt Honeywell, Siemens, ABB și altele, care implementează sisteme distribuite de conducere, asigură flexibilitate ridicată, toleranță maximă la defecte, comunicații de mare viteză și performanțe ridicate.

Cea mai simplă structură de sistem numeric de conducere presupune un regulator numeric (microcontroler) conectat la un proces, care asigură funcțiile specifice de conducere în timp real (v. fig. 15.1).

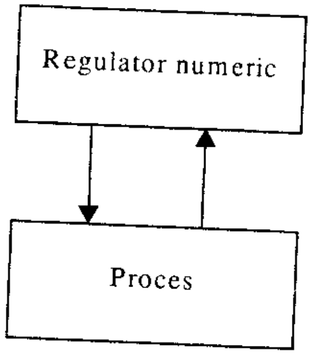


Fig. 15.1

În această structură, regulatorul numeric asigură *interfațarea cu procesul* (achiziție date din proces, transmitere comandă spre proces), *elaborarea comenzii numerice* după algoritmi prestabiliți și *comunicarea cu operatorul* și/sau cu alte regulatoare sau cu un calculator supervizor.

O asemenea arhitectură standard este aplicabilă unor procese simple, cu un număr redus de mărimi controlate.

Cea mai răspândită arhitectură de sistem de conducere este arhitectura distribuită. În figura 15.2 se prezintă o structură de sistem distribuit cu multiple regulatoare numerice conectate la o magistrală de mare viteză.

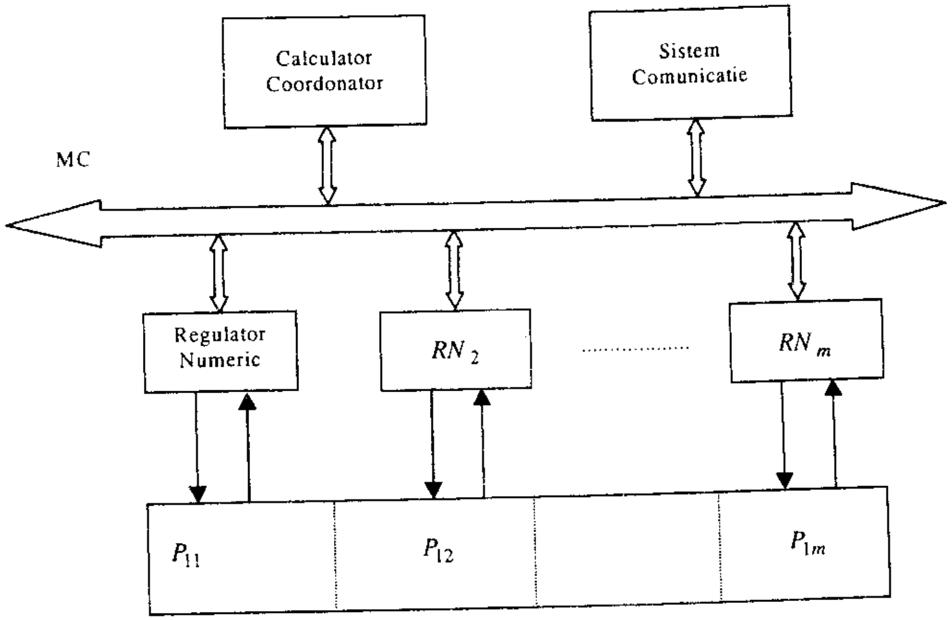


Fig. 15.2

O asemenea arhitectură evidențiază posibilitatea descompunerii procesului în subprocese P_{ij} slab cuplate și utilizarea unor regulatoare numerice multicanal pentru controlul mărimilor specifice fiecărui subproces.

Se poate evidenția, de asemenea, distribuția sarcinilor de reglare (conducere) pe mai multe regulatoare într-o distribuție geografică a subproceselor. De remarcat pentru o asemenea configurație este limitarea distribuției geografice (distanța de ordinul kilometrilor) a subproceselor. Într-o asemenea configurație regulatoarele numerice pot comunica între ele și cu nivelul ierarhic superior prin intermediul magistralei de comunicație **MC**, fiind o configurație de tipul „slab cuplată". În cadrul unei asemenea arhitecturi, regulatoarele numerice funcționează cvasiindepenedent, însă nivelul ierarhic superior poate asigura funcționarea în regim „master-slave".

Avantajele unei asemenea arhitecturi concretizate prin flexibilitate, fiabilitate și capacitate mare de prelucrare a informațiilor pot fi valorificate eficient în condițiile în care sunt integrate funcții speciale de prelucrare la

nivel local (traductoare şi elemente de execuţie inteligente) şi module hardware şi software care asigură rezervarea automată a funcţiilor şi autentificarea utilizatorilor şi a comenzilor.

Tendinţele în domeniul sistemelor numerice de conducere pot fi sintetizate, la nivelul actual al cunoaşterii în acest domeniu, prin:

- realizarea unor *sisteme deschise* hardware şi software;
- creşterea gradului de modularizare şi compatibilizarea modulelor cu magistrale de comunicaţie de mare viteză;
- translatarea unor funcţii spre nivelul de bază, includerea în sistem a unor unităţi de câmp inteligente şi compatibilizarea cu protocoale de comunicaţii BITBUS, PROFIBUS etc.
- extinderea utilizării sistemelor de operare multitasking compatibile UNIX;
- adaptarea la standardele de uz general în sistemele UNIX (TCP/IP) pentru comunicaţii;
- standardizarea software cu integrarea sistemelor de conducere industriale în sisteme informatice mari cu funcţii de conducere economică;
- flexibilitatea setului de algoritmi de conducere şi a întregului sistem de conducere şi a aplicaţiilor aferente prin abstractizarea şi sistematizarea modulelor dependente de mediul de calcul şi extern.

În cadrul acestui capitol, sunt tratate problemele specifice realizării regulatoarelor numerice cu microprocesoare şi ale implementării algoritmilor de reglare pe cale numerică.

15.2. Arhitecturi hardware pentru sisteme de conducere

15.2.1. Problematica alegerii şi dimensionării structurii şi a modulelor funcţionale

Arhitectura hardware evidenţiază modul în care este organizat şi realizat suportul fizic utilizat pentru implementarea funcţiilor deja menţionate pentru un regulator numeric. Sistemele numerice de conducere pot fi dezvoltate luând în consideraţie *cerinţe hardware*, *cerinţe de dezvoltare software* şi *cerinţe de comunicaţie*.

Principalele caracteristici care trebuie urmărite la o platformă hardware pentru regulatoare numerice sunt *puterea de calcul* (viteza de rulare a aplicaţiei, capacitatea de stocare a informaţiei) şi *cantitatea de informaţie care poate fi preluată din proces* prin intermediul interfeţelor specifice.

Proiectarea unui regulator numeric este determinată esenţial de configuraţia sistemului de conducere în care se integrează, de complexitatea procesului condus şi de complexitatea sarcinilor ce se cer a fi realizate. Regulatorul numeric funcţionând ca sistem independent pe proces, poate coopera cu alte regulatoare într-o organizare orizontală sau poate coopera în cadrul unei structuri ierarhizate-distribuite cu alte regulatoare şi cu nivelul ierarhic superior. Indiferent de structura în care se integrează regulatorul, acesta *trebuie să realizeze următoarele funcţii*:

- funcţia de achiziţie şi conversia datelor din proces;
- funcţia de memorare a datelor referitoare la evoluţia variabilelor din proces şi a datelor introduse de operator;
- funcţia de prelucrare a datelor în conformitate cu algoritmii de reglare şi comandă prestabiliţi;
- funcţia de elaborare a comenzii şi transmiterea acesteia spre elementul de execuţie;
- funcţia de comunicaţie cu operatorul şi cu nivelul ierarhic superior sau cu alte regulatoare numerice;
- funcţia de rezervare automată prin memorarea datelor vitale privind evoluţia sistemului de reglare.

Pornind de la aceste funcţii şi în strânsă corelaţie cu obiectivele reglării, cu clasa de procese căreia îi este destinat regulatorul şi cu configuraţia de sistem de conducere în care regulatorul funcţionează, pot fi concepute structuri de regulatoare numerice monocanal sau multicanal, monoprocesor sau multiprocesor.

Etapele care trebuie parcurse la **proiectarea unui regulator numeric cu microprocesoare** sunt următoarele:

- Alegerea microprocesorului în jurul căruia se organizează unitatea centrală de prelucrare;
- alegerea structurii optime a regulatorului numeric;
- alegerea, dimensionarea şi organizarea memoriilor de date şi de programe;
- proiectarea interfeţelor cu procesul pentru achiziţia datelor şi transmiterea comenzilor;
- proiectarea sistemului de comunicaţie între modulele hardware ale regulatorului;
- proiectarea interfeţelor de comunicaţie cu operatorul (sistemul de introducere şi extragere de date) şi cu nivelul ierarhic superior.

Arhitectura hardware standard pentru un regulator numeric, luând în consideraţie principalele funcţii pe care le realizează, este prezentată în figura 15.3.

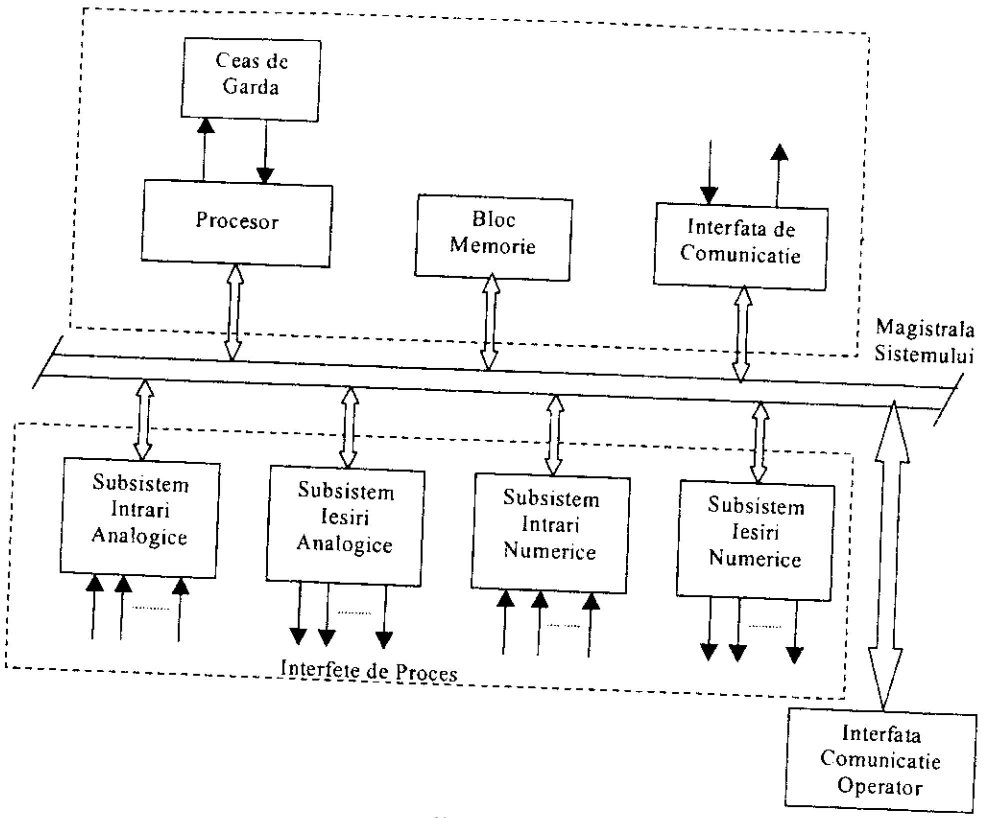


Fig. 15.3

Această arhitectură evidențiază principalele componente ale unui sistem numeric de conducere: *unitatea centrală de prelucrare*, *interfețele de proces* și *interfața de comunicație cu operatorul*. De remarcat necesitatea utilizării unor arhitecturi deschise care să permită extinderea cu noi funcții ce pot apărea în timpul exploatării, cu păstrarea compatibilității la nivel electric și funcțional între module. Aceasta impune caracterul modular și standardizarea modului de interconectare.

Flexibilitatea unei arhitecturi reprezintă modul în care aceasta poate fi adaptată cerințelor unei anumite aplicații. Se urmărește acoperirea unei clase cât mai largi de aplicații, utilizând un număr cât mai redus de tipuri de echipamente și obținerea unui grad cât mai ridicat de utilizare a acestora.

Modularizarea poate fi aplicată pentru realizarea tuturor funcțiilor, atât interfețelor de proces, cât și a unităților de prelucrare a informației și de comunicație. Alegerea gradului de modularitate trebuie făcută luând în considerație flexibilitatea, eficiența și complexitatea soluției.

O cerință importantă la proiectarea unei arhitecturi hardware este siguranța în funcționare. Aceasta este determinată, atât de fiabilitatea

elementelor componente, cât și de sensibilitatea la defecte a întregii arhitecturi. Astfel, echipamentele de conducere trebuie proiectate și realizate, astfel încât să poată funcționa în condiții dificile de exploatare cu un risc minim de defectare.

Reducerea sensibilității la defect se poate realiza, atât prin distribuirea funcțiilor pe un număr mare de echipamente cu o funcționare cât mai independentă, astfel încât defectarea unuia să nu perturbe decât în mică măsură funcționarea ansamblului, cât și prin asigurarea unei redundanțe la nivelul componentelor critice ale arhitecturii. De menționat că structurile numerice de conducere moderne sunt prevăzute cu funcții specifice de rezervare automată a modulelor sau a echipamentelor, în totalitate.

Utilizarea unor memorii nevolatile, cu prezervarea informațiilor vitale dintr-un sistem numeric de conducere în cadrul subsistemului de rezervare asigură sistemelor numerice de conducere o siguranță ridicată în funcționare.

Modulele incluse în structura unui regulator numeric permit realizarea funcțiilor de achiziție a datelor din proces, memorarea datelor și a programelor, elaborarea și transmiterea comenzilor la elementele de execuție, comunicația cu operatorul și cu nivelul ierarhic superior.

Unitatea centrală este componenta echipamentului numeric (regulatorului numeric) la nivelul căreia se realizează prelucrarea informațiilor și se elaborează comenzile. Unitatea centrală se dezvoltă în jurul unor microprocesoare de uz general sau în jurul unor procesoare specializate de tipul microcontrolerelor sau/și procesoarelor digitale de semnal (DSP).

Structura de regulator numeric poate fi de *tip monoprocesor* sau *multiprocesor* sau pot fi realizate *structuri de procesoare specializate pentru reglarea* (comanda) *în timp real* a unor procese tehnologice. La adoptarea structurii regulatorului se are în vedere faptul că aceasta trebuie să aibă o siguranță foarte ridicată în funcționare, o ridicată disponibilitate.

Regulatoarele pot fi destinate controlului unei mărimi din proces (regulator monocanal) sau pot fi multicanal, în cazul în care asigură controlul mai multor mărimi din proces.

Cele mai uzuale structuri de regulatoare numerice sunt structurile multiprocesor, destinate conducerii proceselor cu mai multe intrări și mai multe ieșiri reprezentând *regulatoare multicanal*. Adoptarea structurilor multimicroprocesor presupune asigurarea suportului hardware și software ce facilitează implementarea conceptului de execuție concurentă reală. Aceasta necesită segmentarea procesului în sarcini și utilizarea unui executiv de timp real pentru a gestiona, controla și sincroniza diversele sarcini.

Avantajele oferite de structurile de regulatoare multimicroprocesor sunt: flexibilitate ridicată, sensibilitate redusă la perturbații, timpul mult mai redus de execuție al unei sarcini, fiabilitate sporită (prin redundanță sau imunitate la defecte), dezvoltarea modulară a sistemelor, partajarea resurselor (hardware, programe, date, timp), partajarea funcțională a sarcinilor pe procesoare specializate, un raport cost/performanță excelent.

Obținerea unor configurații multiprocesor presupune realizarea mai multor sarcini, dintre care menționăm:

- defalcarea sarcinilor și repartiția acestora pe diferitele procesoare;
- determinarea celor mai eficiente structuri de interconectare a procesoarelor;
- proiectarea unor mecanisme cât mai adecvate pentru translatarea adreselor logice în adrese fizice;
- gestionarea resurselor și formarea șirurilor de așteptare;
- eliminarea interblocărilor care apar când un procesor așteaptă după o resursă alocată altuia și viceversa, nici unul dintre procesoare neputându-și continua execuția sarcinii până la obținerea resursei respective;
- proiectarea unor structuri hardware și software care să faciliteze imunitatea la defecte a sistemelor multimicroprocesor.

Structurile multimicroprocesor în cadrul regulatoarelor numerice se încadrează în categoria *sistemelor cuplate puternic*. Aceste structuri au următoarele **caracteristici**:

- dispun de un sistem de operare comun care controlează și coordonează toate interacțiunile dintre procesoare și procese;
- dispun de resurse partajate. Facilitățile I/E și alte resurse ale sistemului sunt în general partajate între procesoare, deși anumite resurse pot fi destinare unor procesoare specifice;
- redistribuirea dinamică a sarcinilor unui procesor supraîncărcat permite încărcarea egală a tuturor procesoarelor (alocarea dinamică a taskurilor);
- fiecare dintre procesoarele cooperante poate executa un număr semnificativ de calcule individual, sincronizarea procesoarelor ce cooperează fiind absolut necesară.

Proiectarea funcțională a sistemelor multimicroprocesor presupune luarea în considerație a următoarelor cerințe: alocarea statică și dinamică a taskurilor, controlul resurselor sistemului, caracteristicile elementelor de prelucrare, topologiile de interconectare și interacțiune între procesoare, efectul asupra performanțelor sistemului, fiabilitate și flexibilitate.

În cadrul structurilor multimicroprocesor, procesoarele își împart resursele hardware (procesoare, memorie, canale I/E, magistrale) și software (programe, alocarea datelor, zone tampon, șiruri de așteptare, variabile).

Interconectarea procesoarelor, a memoriilor și a dispozitivelor I/E în configurațiile multimicroprocesor se poate realiza prin magistrală comună partajată în timp, prin comutator crossbar, prin memorii multiport/multimagistrală sau legătură procesor la procesor. Cea mai eficientă structură și mai puțin complexă este magistrala unic partajată în timp. Interfețele între elementele de prelucrare solicitând magistrala depind de lungimea și frecvența ciclurilor de magistrală a acestora, ciclurile de memorie și I/E și de numărul de procesoare care împart magistrala. Capacitatea totală a sistemului este limitată de viteza de transfer a informației pe magistrală. Magistrala de sistem este coloana vertebrală a fiecărui sistem cu mai multe procesoare. Prin aceasta nu numai că sunt definite hardware-ul, software-ul și protocolul de comunicare pentru legarea procesoarelor sau a resurselor comune de magistrală, dar sunt cel mai adesea standardizate.

O magistrală de sistem pentru o configurație multimicroprocesor trebuie să conțină, față de liniile de date și adrese, *elemente pentru comanda funcțiilor*:

- cerere de acces la magistrală sau la altă resursă comună;
- decodificarea priorităților tuturor partenerilor;
- arbitrajul cu viteză mare a tuturor cererilor;
- predarea controlului magistralei noului control de magistrală;
- adresarea fiecărei surse date din sistem;
- supravegherea și testarea operațiilor magistrale.

Memoria regulatorului numeric este utilizată pentru stocarea programelor și a datelor. Memoria de tip EPROM stochează programele iar memoria de tip RAM stochează datele cu care operează regulatorul, având în vedere caracterul dinamic al acestora.

Separarea memoriilor într-un sistem numeric de conducere în timp real asigură creșterea vitezei de operare. Utilizarea unei singure memorii (de fapt, a unei singure magistrale) pentru stocarea, atât a programelor, cât și a datelor, presupune accesul la un moment dat numai la instrucțiuni sau date, în nici un caz la amândouă simultan. Din acest motiv, există posibilitatea încetinirii funcționării procesorului care necesită acces la ambele tipuri de informații simultan.

În cazul microcontrolerelor, prezența unei anumite capacități de memorare chiar în structura acestuia permite realizarea unei arhitecturi bazate pe două magistrale interne diferite, cu funcționare simultană, ceea ce

conduce la creşterea vitezei ansamblului procesor-memorie. La nivelul extern, cele două magistrale sunt de cele mai multe ori combinate într-una singură pentru a simplifica interfaţarea cu memoria suplimentară, dar se păstrează şi în acest caz o diferenţiere între accesul la memoria de program şi la cea de date prin prezenţa unor semnale de comandă diferite.

Alegerea şi dimensionarea memoriilor se realizează ţinând seama de următorii factori:

- complexitatea sistemelor de programe de aplicaţie şi de sistem;
- dimensiunea bazei de date, complexitatea regulatorului;
- cerinţele impuse medierii pentru memorarea tendinţelor.

Ceasul de gardă este un dispozitiv specific echipamentelor dedicate unor aplicaţii critice din punctul de vedere al siguranţei în funcţionare. Astfel, unitatea centrală a regulatorului numeric este prevăzută cu ceasul de gardă care are rolul de a supraveghea şi a detecta apariţia unor stări anormale de funcţionare şi a acţiona pentru readucerea sistemului la starea normală de funcţionare. Uzual, ceasul de gardă este constituit dintr-un circuit monostabil care generează un semnal de iniţializare către procesor, după un anumit timp de la pornire. Ceasul de gardă poate fi rearmat de către procesor prin activarea sub controlul programului a unui semnal de repornire a temporizării, decalându-se astfel momentul iniţializării procesorului cu încă o perioadă de timp. Programul de aplicaţie trebuie astfel construit încât în cazul funcţionarii normale să activeze semnalul de repornire a temporizării la intervale de timp mai mici decât constanta de timp a ceasului de gardă.

Majoritatea circuitelor de tip ceas de gardă conţin şi o funcţie suplimentară de monitorizare a tensiunii de alimentare a procesorului, generând semnalul de iniţializare al acestuia, de fiecare dată când tensiunea de alimentare scade sub un anumit prag, considerat a fi critic pentru o bună funcţionare.

Interfeţele de comunicaţie sunt componente importante ale unităţii centrale. Ele sunt utilizate, atât pentru interconectarea diferitelor echipamente din structura unui sistem de conducere, cât şi pentru dezvoltarea şi testarea programelor de aplicaţie.

Cele mai utilizate interfeţe de comunicaţie sunt cele de tip serial, datorită numărului redus de conexiuni electrice necesare. Aceste interfeţe sunt adaptate transmiterii informaţiei în medii cu perturbaţii puternice, fiind compatibile cu standardul RS-485. Frecvent, se practică izolarea galvanică a interfeţelor de linia de comunicaţie, atât din considerente de protecţie, dar şi pentru eliminarea efectului tensiunilor de mod comun care apar în sistemele de mari dimensiuni.

Interfaţa de comunicaţie cu operatorul are două funcţii principale, şi anume aceea de a furniza operatorului informaţii despre funcţionarea regulatorului şi de a permite intervenţia operatorului în faza de comandă şi configurare a buclelor de reglare. Pentru realizarea primei funcţii se pot folosi diferite tehnologii de afişare: afişare cu LED-uri, cu cristale lichide, afişare de tip fluorescent, cu avantaje şi dezavantaje specifice. Funcţia de comandă şi configurare a regulatoarelor se realizează apelând la tastaturi specializate cu module hardware necesare conversiei şi comunicaţiei om-maşină.

Prin intermediul interfeţelor de proces, semnalele unificate furnizate de traductoare sunt preluate, convertite în semnale numerice şi transmise în vederea prelucrării de către unitatea centrală, iar comenzile rezultate sunt convertite şi transmise spre elementele de execuţie.

Interfeţele de proces pot fi realizate separat pentru semnale de intrare analogice şi semnale numerice, sau pot fi realizate într-o structură compactă pentru semnale analogice şi numerice.

La selecţia (proiectarea) interfeţelor pentru semnale analogice se are în vedere întreaga gamă de semnale analogice furnizate de traductoare $((4 \div 20 \text{ mA}), (0 \div +5V), (-5 \div +5V), (0 \div +10V), (-10 \div +10V))$.

Principalele caracteristici şi criterii pentru alegerea şi dimensionarea interfeţelor pentru intrări analogice sunt precizia de măsurare, rezoluţia, frecvenţa maximă de achiziţie, impedanţa circuitului de intrare şi gama tensiunilor de mod comun acceptate, fiabilitatea, capacitatea de rejectare a semnalelor perturbatoare.

Precizia de măsurare descrie acurateţea cu care este achiziţionată valoarea reală a semnalului primit de la traductor, în condiţiile în care orice proces de măsurare este afectat de o serie de erori. Deşi este de dorit o precizie cât mai bună, în practică se consideră acceptabilă o valoare maximă care nu depăşeşte 0.1%.

Rezoluţia cu care se realizează achiziţia semnalului reprezintă sensibilitatea interfeţei la sesizarea variaţiilor mici ale semnalului de intrare.

Elementul care determină rezoluţia unei interfeţe de achiziţie este convertorul analog-numeric. În practică se folosesc interfeţe cu rezoluţii de 10, 12, 14 sau 16 biţi, cea mai întâlnită valoare fiind cea de 12 biţi, care asigură detecţia unei variaţii a semnalului achiziţionat de 0.025% din gama acestuia. În aplicaţii speciale se poate extinde rezoluţia interfeţei la 24 de biţi, valoarea cuantei în procesul de conversie fiind în acest caz $q = \frac{1}{2^{24}}$.

Frecvenţa maximă de achiziţie determină frecvenţa maximă de esantionare a semnalelor de intrare. Cu cât frecvenţa de achiziţie este mai

mare şi rezoluţia mai mare, interfaţa este mai performantă, dar mai costisitoare. Valoarea frecvenţei de achiziţie este dată de timpul de conversie al convertorului analog-numeric şi banda de frecvenţă a circuitelor de condiţionare a semnalului.

Achiziţia datelor din proces reprezintă una dintre cele mai importante funcţii ale regulatorului, alături de funcţia de elaborare şi transmitere a comenzilor spre elementele de execuţie. Informaţiile culese din proces şi transmise spre proces pot fi analogice, logice sau numerice. Aceste semnale evoluează în mediu industrial puternic perturbat, fiind astfel însoţite de importante zgomote. Interfeţele de proces sunt incluse în structura regulatorului, pe când elementele primare, traductoarele şi elementele de execuţie sunt echipamente de câmp. Pentru a atenua efectele nedorite ale zgomotelor ce însoţesc semnalele culese din proces şi transmise regulatorului, se impune utilizarea transmisiei diferenţiale ecranate de-a lungul întregului traseu, precum şi utilizarea unor filtre corespunzătoare.

În cazul interfeţelor multicanal care utilizează multiplexoare, frecvenţa maximă de achiziţie depinde într-o mai mare măsură şi de timpul de comutaţie al multiplexorului şi de caracteristica de frecvenţă a amplificatorului conectat după multiplexor.

Impedanţa circuitului de intrare este un factor care condiţionează conectarea interfeţelor cu traductoarele de măsură. În cazul utilizării semnalului unificat de curent se urmăreşte obţinerea unei impedanţe de intrare cât mai mici a circuitului de măsură, iar în cazul utilizării semnalului unificat de tensiune se urmăreşte obţinerea unei impedanţe cât mai mari a circuitului de intrare, pentru a nu perturba în mod sesizabil sursa de semnal.

Interfeţele pentru ieşiri analogice sunt caracterizate prin precizia de generare a semnalelor, rezoluţie, viteză de stabilizare şi impedanţă de ieşire. Precizia se evaluează prin intermediul unei erori maxime calculată raportând diferenţa maximă dintre valoarea dorită şi cea generată a semnalului la domeniul de variaţie al acestuia.

Rezoluţia descrie capacitatea interfeţei de a modifica cu valori mici valoarea semnalului generat. Elementul care determină rezoluţia unei interfeţe de ieşire este convertorul numeric-analogic.

Viteza de stabilizare este dată de timpul în care interfaţa poate modifica semnalul generat în urma unei comenzi de schimbare a acesteia. Viteza de variaţie a comenzii trebuie limitată înainte de aplicare a acesteia elementului de execuţie.

Impedanţa de ieşire este un parametru care condiţionează posibilităţile de conectare ale elementelor de execuţie la o anumită interfaţă şi are semnificaţii diferite în funcţie de semnalul utilizat.

Interfeţele pentru intrări numerice preiau din proces semnale de tip (0/1, închis/deschis) prin intermediul senzorilor sau de la dispozitive de semnalizare.

Pentru preluarea semnalelor de tip numeric sunt folosite frecvent circuite de intrare cu izolare galvanică (optocuploare) care asigură o separare electrică. Interfeţele pentru intrări numerice pot fi directe cu citirea stării curente a fiecărui semnal de intrare la momente de timp definite sau pot prelua anumite caracteristici ale semnalelor de intrare.

Interfeţele pentru ieşiri numerice servesc pentru comanda unor elemente de execuţie sau pentru semnalizare în regim de funcţionare „tot sau nimic" sau „activ/inactiv" se folosesc *interfeţe pentru ieşiri numerice*. Sunt folosite aceleaşi tipuri de semnale numerice ca şi în interfeţele pentru intrări numerice, dar cu o mai mare diversitate, ţinând seama de varietatea circuitelor determinată de puterea semnalului generat.

Şi în cazul ieşirilor numerice se utilizează frecvent izolarea galvanică a circuitelor de ieşire de interfaţă propriu-zisă, mai ales în cazul comenzilor de putere mare. Pot fi utilizate interfeţe directe, care permit modificarea explicită a stării semnalului de ieşire şi interfeţe specializate, care generează semnale ale căror caracteristici pot fi modificate. Din această ultimă categorie menţionăm interfeţele cu ieşiri de tip impulsuri modulate în durată (PWM) care generează trenuri de impulsuri de o anumită frecvenţă, durata impulsurilor putând fi modificată între zero şi durata perioadei semnalului.

15.2.2. Arhitecturi de sisteme numerice de conducere

Pornind de la structura standard cu cele trei componente principale (unitatea centrală de prelucrare, interfeţele de proces şi sistemul de comunicaţie) pot fi dezvoltate diverse arhitecturi hardware în funcţie de particularităţile procesoarelor şi memoriilor utilizate, în funcţie de complexitatea interfeţelor de proces şi de funcţiile ataşate regulatorului numeric într-o configuraţie de sisteme de conducere mai restrânsă sau mai extinsă, cu o interconectare slabă sau totală a regulatoarelor.

Dintre cele mai răspândite structuri de echipamente numerice de conducere, ţinând seama de evoluţia procesoarelor specializate (micro-controlerelor), a procesoarelor digitale de semnal, se remarcă arhitecturile concepute în jurul microcontrolerelor de 8, 16 şi 32 biţi, în jurul unor procesoare de tip DSP de mare viteză.

Rezultate satisfăcătoare în aplicaţii de conducere în timp real se obţin apelând la arhitecturi hibride *microcontroler-DSP*.

Arhitecturile modularizate prezintă un interes special, având în vedere flexibilitatea ridicată a acestora şi siguranţa ridicată în funcţionare, asigurată, atât prin redundanţe multiple, cât şi prin fiabilitate ridicată la nivelul modulelor şi componentelor.

Structura standard a oricărui microcontroler conţine cele trei componente specifice oricărui regulator numeric. În figura 15.4 se prezintă structura standard internă a unui microcontroler, care evidenţiază cele trei componente.

Componenta principală a microcontrolerului este unitatea de prelucrare (unitatea de calcul) şi constă din microprocesor, memoria EPROM nevolatilă şi memoria RAM volatilă şi ceas (timer). Această unitate asigură execuţia codurilor software ale algoritmilor de reglare şi gestionează toate celelalte module conectate la sistem. Programele de aplicaţie (codurile software) ale algoritmilor de reglare sunt memorate în EPROM, iar datele şi toate variabilele temporare sunt memorate în memoria RAM.

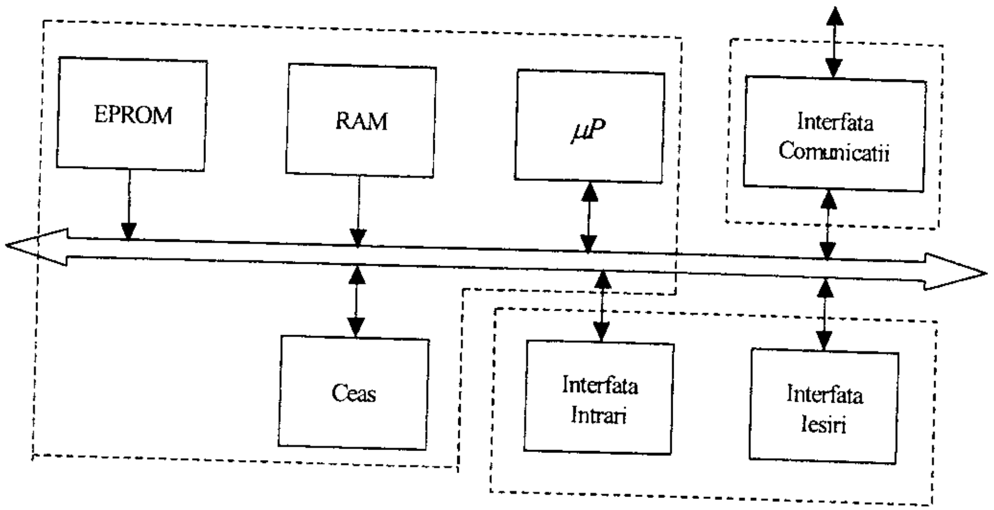


Fig. 15.4

Pentru implementarea unui algoritm PID o memorie RAM de 20 Bytes este suficientă. Pentru algoritmi mai complecşi, dimensiunea memoriei creşte corespunzător.

Subsistemul intrare/ieşire constă din circuite de interfaţă care permit microprocesorului să comunice cu senzorii şi elementele de execuţie ale procesului. Pentru procese industriale, unde se folosesc traductoare ce furnizează semnale unificate în gama $(4 \div 20 \text{ mA})$, circuitele incluse în interfaţa de intrare sunt convertoarele curent-tensiune şi convertoarele analog-numerice.

Pentru interfeţele de ieşire, în cazul elementelor de execuţie ce acceptă semnale unificate $(4 \div 20 \text{ mA})$, circuitele incluse cuprind *convertoare numeric-analogice* şi convertoare tensiune-curent.

Interfaţa de comunicaţie, care poate fi serială sau paralelă, asigură interconectarea microcontrolerului la un mediu de dezvoltare a programelor.

Componenta cea mai importantă în aceasta configuraţie este microprocesorul. Pentru alegerea acestuia trebuie avute în vedere trei consideraţii: *cerinţele de calcul*, *complexitatea programelor* şi *tipul perifericelor* necesare interfaţării la traductoare şi elemente de execuţie. Microprocesorul selectat trebuie să fie suficient de performant pentru a asigura calculele pentru toţi algoritmii ceruţi în cadrul unui interval de eşantionare.

Microcontrolerele conţin, pe lângă microprocesor, multiple periferice integrate într-un singur chip.

Microcontrolerele pot fi selectate pentru realizarea unui sistem numeric de conducere, în condiţiile în care cerinţele impuse acestui sistem pot fi satisfăcute de cele trei componente integrate. Pentru aplicaţii relativ simple, soluţia utilizării microcontrolerelor este cea recomandată, însă în cazul utilizării unor algoritmi avansaţi cu cerinţe mari de memorie şi multiple periferice se adoptă soluţia proiectării unui regulator numeric care, deşi este mai costisitoare, oferă multiple facilităţi hardware şi software.

Pentru procese rapide şi algoritmi relativ complecşi, ca acelea întâlnite în industria aerospaţială, unde intervalul de eşantionare şi calculele cerute nu pot fi acoperite de procesoare, uzual se poate adopta o soluţie hibridă cu două procesoare. Astfel, pot fi exploatate facilităţile oferite de procesoarele de semnal (DSP), datorită vitezei mari de prelucrare şi facilităţilor oferite de microcontrolerele care integrează memorii şi periferice direct conectabile cu procesorul.

Pentru a exemplifica modul de selectare a unei arhitecturi hibride, considerăm un regulator universal rapid (fig. 15.5) [70, 77, 78].

Viteza de prelucrare de zeci sau sute de MFLOPS este asigurată de procesorul DSP selectat, iar conectarea la proces şi comunicaţia sunt asigurate de microcontroler. Regulatorul numeric în arhitectura hibridă din figura 15.5 constă din două module de prelucrare distincte care realizează sarcini diferite. Modulul DSP conţine procesorul şi memoria RAM asociată. Acest modul nu are legături hardware cu dispozitive externe, el este conectat doar cu microcontrolerul printr-un canal DMA. Cel de-al doilea modul este constituit dintr-un microcontroler care asigură conexiunea cu toate dispozitivele externe prin interfeţe şi alte circuite.

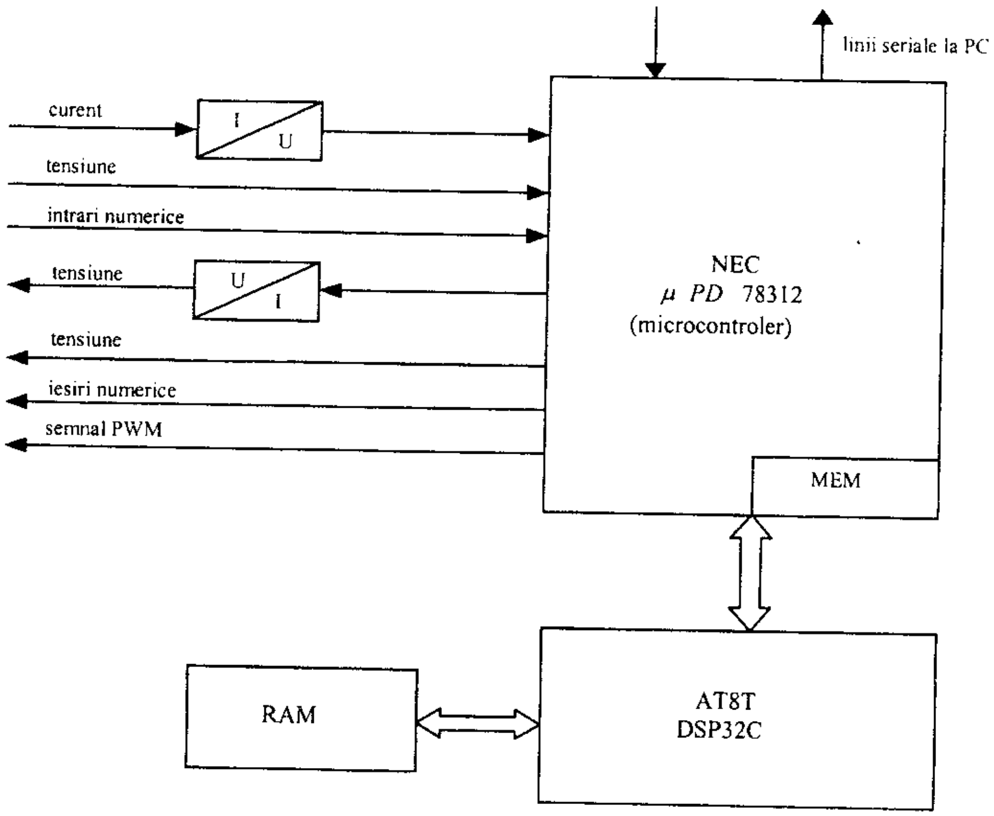


Fig. 15.5

În exemplul considerat a fost selectat un procesor de semnal DSP 32C, cu o memorie RAM de 128 Ko, cu reprezentarea pe 32 biţi şi circuite logice necesare pentru a interfaţa DSP la memoria RAM.

Controlerul DMA integrat în DSP este accesat de microcontroler printr-o magistrală de date şi comenzi de 16 biţi. Prin intermediul acestei magistrale microcontrolerul controlează citirea/scrierea oricărei locaţii de memorie în cadrul spaţiului de adrese de memorie a DSP. Această magistrală permite microcontrolerului să reseteze soft DSP. Programul ce trebuie executat pe DSP este încărcat în memoria DSP de către microcontroler prin canalul DMA. În cazul execuţiei în timp real a programului de aplicaţie, DSP va monitoriza citirea senzorilor şi transmiterea comenzilor la elementele de execuţie. Această activitate a DSP se realizează prin simpla accesare a diferitelor locaţii de memorie în care se găsesc datele referitoare la dispozitivele externe.

Microcontrolerul nu este implicat direct în execuţia algoritmilor de reglare, dar asigură taskuri suport pentru aceasta.

Primul task este de a asigura că programele de aplicaţie sunt încărcate în mod corespunzător.

Al doilea task este de a menţine sincronizarea în timp a tuturor funcţiilor regulatorului, iar cel de-al treilea task este de a gestiona toate perifericele şi comunicaţia cu un calculator gazdă.

De notat că această arhitectură este modularizată şi asigură relativ simplu, dezvoltarea aplicaţiilor, iar costurile sunt reduse.

O arhitectură de regulator numeric ce tinde să se impună pentru clase largi de aplicaţii este arhitectura modularizată. O asemenea arhitectură operează cu două magistrale, una locală şi cealaltă externă, prin intermediul căreia se asigură extinderea cu diverse module interfaţa de proces (fig. 15.6).

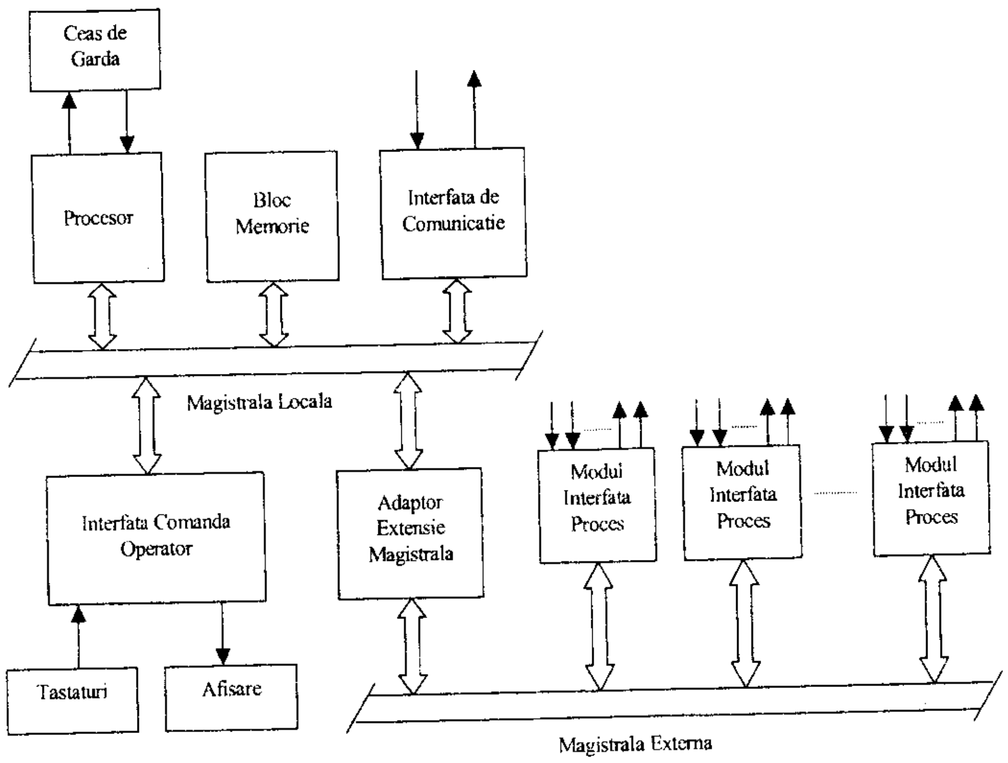


Fig. 15.6

Magistrala externă reprezintă o extensie a magistralei locale existente în structura unităţii centrale, fiind controlată direct de către procesor.

Unitatea centrală de prelucrare, împreună cu sistemul de comunicaţie cu operatorul, formează un modul a cărui prezenţă este obligatorie, ca şi sursa de alimentare a întregului sistem.

Restul de module care pot fi adăugate este reprezentat de diferite module de interfață cu procesul sau alte module care asigură compatibilitatea cu alte echipamente sau sisteme de calcul în configurații distribuite sau/și ierarhizate.

Adoptarea soluției modulare asigură compatibilizarea cu clase largi de aplicații, deci o ridicată flexibilitate, dar, în același timp, și o siguranță în funcționare foarte bună, prin rezervare practică a tuturor modulelor (inclusiv unitatea centrală de prelucrare). O analiză performanță/cost a unor arhitecturi modularizate se impune, având în vedere limitările tehnologice a numărului de module, a capacității de control a magistralei, care în anumite situații poate fi supraîncărcată, a adaptoarelor de extensie de magistrală (circuite de separare/amplificare). O arhitectură optimală se poate dezvolta pentru fiecare aplicație, limitându-se numărul de module și implicit problemele legate de siguranța în funcționare.

Pentru procese de medie și mare complexitate se extinde soluția modularizată la arhitecturi distribuite, în cadrul căreia se pot include mai multe echipamente modularizate (fig. 15.2).

În cazul în care regulatoarele numerice conectate pe magistrala de comunicație necesită o comunicare strânsă și între ele, apare necesitatea arbitrării accesului la magistrala de comunicație. În acest scop pot fi utilizate *mecanisme de arbitrare bazate pe detecția coliziunilor* și *mecanisme de arbitrare bazate pe transmiterea unui pachet de permisiune.*

O arhitectură eficientă de sistem de conducere ușor integrabilă în configurații de sisteme distribuite de conducere se poate obține în condițiile în care modulele interfeței de proces sunt „inteligente"[81].

În acest caz, interfețele de proces conțin în structura lor un procesor și un adaptor de comunicație corespunzător tipului de magistrală externă de comunicație utilizată. În cadrul acestor interfețe se implementează funcții de prelucrare primară a semnalelor achiziționate sau generate chiar la nivelul interfețelor, reducând efortul de calcul la nivelul unității centrale a regulatorului și simplificând mecanismele de comunicație.

Utilizarea unei magistrale de comunicație pentru conectarea perifericelor la unitatea centrală asigură o importantă simplificare a conexiunilor propriu-zise, prin înlocuirea numărului mare de conexiuni prezente la nivelul unei magistrale convenționale (date, adrese, semnale de control) prin numai două fire de semnal (fig. 15.7). Astfel, se simplifică structura mecanică a echipamentului prin eliminarea unor conectări costisitoare și puțin fiabile și se creează posibilitatea extinderii numărului de module.

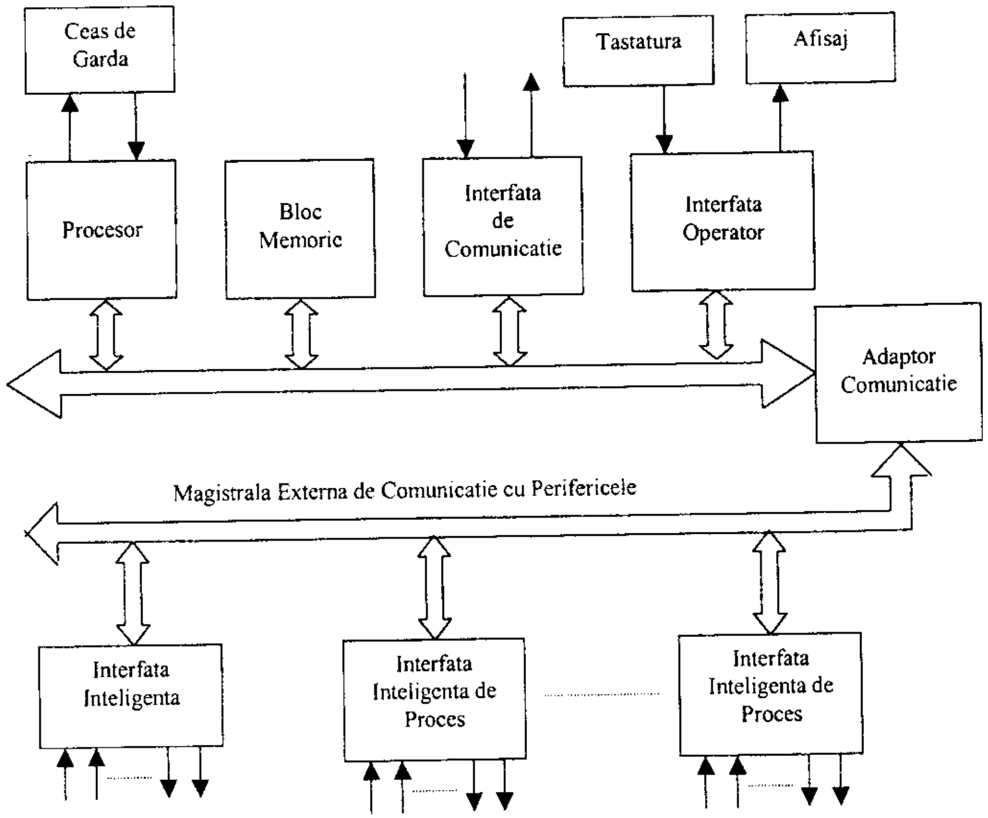


Fig. 15.7

Prin utilizarea unei magistrale de comunicație standard, se obține un echipament cu o structură deschisă. Datorită absenței unei conexiuni directe între diferitele componente ale sistemului, nu mai este necesară compatibilitatea acestora la nivelul structurii interne. Pot fi realizate diverse combinații între module dezvoltate în jurul unor procesoare diferite cu diverse tehnologii, singura cerință fiind aceea a prezenței adaptorului de comunicație cu magistrala standard utilizată.

Datorită avantajelor pe care le prezintă, arhitectura modulară cu interfețe inteligente este recomandată pentru dezvoltarea de regulatoare numerice performante care pot funcționa independent sau în configurații de sisteme distribuite de conducere.

Pentru implementarea concretă a unui asemenea regulator numeric, este necesară specificarea configurației elementelor componente și anume unitatea centrală, module de interfață, precum și alegerea unei anumite magistrale de comunicație pentru interconectarea acestora.

15.3. Probleme ale implementării algoritmilor numerici

15.3.1. Reprezentări ale algoritmilor de reglare. Realizări

Proiectarea sistemelor numerice de reglare (conducere) are ca rezultat o anumită strategie în funcție de particularitățile obiectului condus, de cerințele de performanță impuse. Aceste strategii (legi) de reglare (conducere) sunt reprezentate sub forma unor sisteme dinamice discrete în timp.

În cazul utilizării unor modele intrare-ieșire, rezultatul proiectării, în forma cea mai generală, este:

$$R(q^{-1})u_k = T(q^{-1})r_k - S(q^{-1})y_k \tag{15.1}$$

unde polinoamele $R(q^{-1})$, $T(q^{-1})$ și $S(q^{-1})$ au semnificația cunoscută și dimensiuni determinate de complexitatea modelului discret atașat procesului condus și de cerințele de performanță. Parametrii r_i, t_k și s_j sunt determinați în funcție de valorile parametrilor modelului procesului.

Metodele de proiectare bazate pe alocarea polilor, apelând la modele de stare, conduc la algoritmi de reglare reprezentați sub forma:

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + L(y_k - \hat{y}_{k|k-1})$$
$$u_k = F\hat{x}_k + Nr_k \tag{15.2}$$

sau

$$u_k = F(x_k^m - \hat{x}_{k|k}) + Nr_k$$

în cazul în care starea urmărește starea unui model de referință caracterizat prin:

$$x_{k+1}^m = f(x_k^m, r_k). \tag{15.3}$$

Matricele F, L, N sunt determinate în funcție de matricele Φ, Γ, C atașate modelului de stare al procesului (§ 7.4).

În această reprezentare, starea regulatorului este $\hat{x}_k$ și x_k^m, unde $\hat{x}_{k|k-1}$ este estimarea stării procesului pe baza datelor până la momentul $k-1$, iar x_k^m este starea modelului ce generează răspunsul dorit la semnalele de referință r_k.

În cazul în care modelul de referință este liniar, forma generală a unui algoritm de reglare (conducere) este:

$$x_{k+1}^c = A_c x_k^c + B_c y_k + C_c r_k$$
$$u_k = F_c x_k^c + G_c y_k + D_c r_k \tag{15.4}$$

unde x_k^c este starea regulatorului, iar matricele A_c, B_c, C_c, F_c, G_c și D_c au dimensiuni corespunzătoare în cazul în care $x_k^c \in \Re^{n_c}$, $y_k \in \Re^p$, $u_k \in \Re^m$, $r_k \in \Re^p$.

Ca orice sistem dinamic reprezentat prin ecuații de stare, regulatorul are un model echivalent intrare-ieșire, iar comanda poate fi calculată recurent ca în (15.1).

Există transformări simple între cele două reprezentări (cap. 2). Diferite realizări pot fi obținute prin alegeri corespunzătoare ale variabilelor de stare. Aceste reprezentări sunt echivalente din punct de vedere intrare-ieșire, dacă facem aproximarea că toate calculele sunt făcute cu precizie infinită.

În cazul real, când precizia calculelor este finită, alegerea reprezentării de stare este foarte importantă. Cuantizarea și rotunjirea în reprezentarea numerelor introduc neliniarități care pot determina instabilitate și imprecizie în realizarea obiectivelor reglării. O alegere necorespunzătoare a realizării unui algoritm de reglare poate genera sensibilitate la erorile de calcul. Este important ca regulatorul să fie transformat într-o formă robustă înainte de a fi implementat ca program de aplicație.

Cele mai folosite realizări hardware sunt: *realizarea directă*, *realizarea cascadă*, *realizarea paralelă* [6, 78].

Pentru a exemplifica modul de realizare hardware a unui algoritm numeric, se consideră legea de reglare sub forma polinomială:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \cdots + q_n z^{-n}}{1 + p_1 z^{-1} + \cdots + p_n z^{-n}} \tag{15.5}$$

sau, în timp:

$$u_k = \sum_{i=0}^{n} q_i \varepsilon_{k-i} - \sum_{j=0}^{n} p_j u_{k-j}. \tag{15.6}$$

Termenul de *realizare hardware* pentru un algoritm reprezentat ca sistem dinamic în timp discret implică o realizare cu elemente discrete de rețea, elemente de întârziere, multiplicatoare și sumatoare.

O realizare hardware directă a funcției de transfer (15.5) poate fi implementată folosind un număr minim de elemente de întârziere egal cu n (fig. 15.8), cu n variabile de stare.

Se poate ușor observa că o asemenea realizare presupune utilizarea a n elemente de întârziere, $(2n+1)$ elemente de multiplicare și două sumatoare.

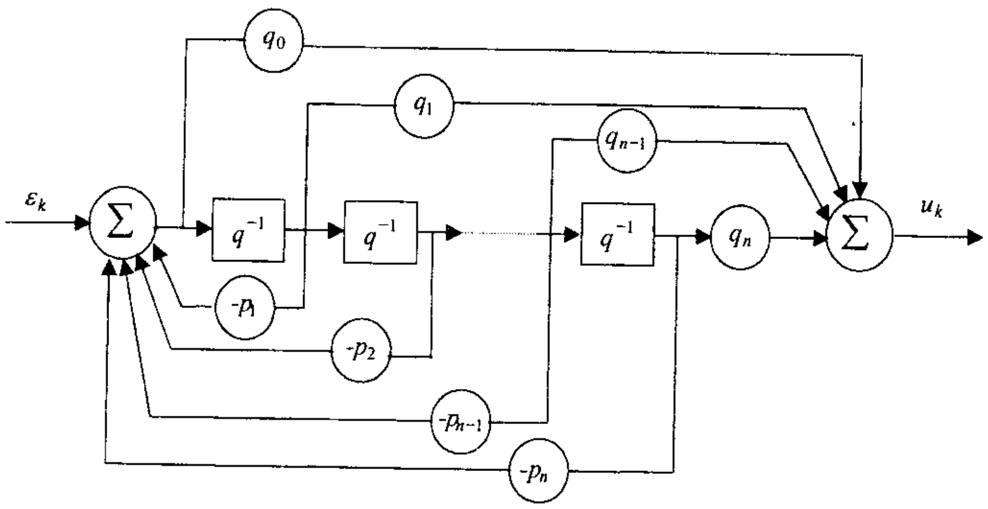


Fig. 15.8

Selectând o realizare în forma canonică controlabilă pentru $H_R(z^{-1})$, se obține realizarea hardware prezentată în figura 15.9.

În această realizare identificăm un număr minim de variabile de stare, deci n elemente de întârziere, $(2n+1)$ operații de înmulțire și mai multe sumatoare. Cele două realizări sunt practic identice, însă operațiile care se execută și ordinea acestora pentru obținerea comenzii u_k sunt diferite. Ținând seama de sursele de erori ce pot apărea și anume: cuantizarea semnalelor de intrare, rotunjirea numerelor care intervin în calcule și cuantizarea valorilor parametrilor q_i, p_j care intervin în algoritm, diversele realizări pot fi mai eficiente sau nu. Aceste erori, în esență, sunt determinate de precizia finită de reprezentare a variabilelor și a parametrilor, reprezentare în virgulă fixă a acestora cu un număr limitat de biți.

Pentru reducerea sensibilității la erorile de reprezentare se pot folosi realizări în cascadă și în paralel. În acest caz, funcția de transfer $H_R(z^{-1})$ poate fi descompusă în elemente de ordinul întâi și doi:

$$H_R(z^{-1}) = \beta \cdot H_1(z^{-1}) \cdot H_2(z^{-1}) \cdot \ldots \cdot H_p(z^{-1}) \tag{15.7}$$

unde β este o constantă și $H_i(z^{-1})$ sunt funcții de transfer de ordinul I și/sau al II-lea, iar $1 \le p \le n$.

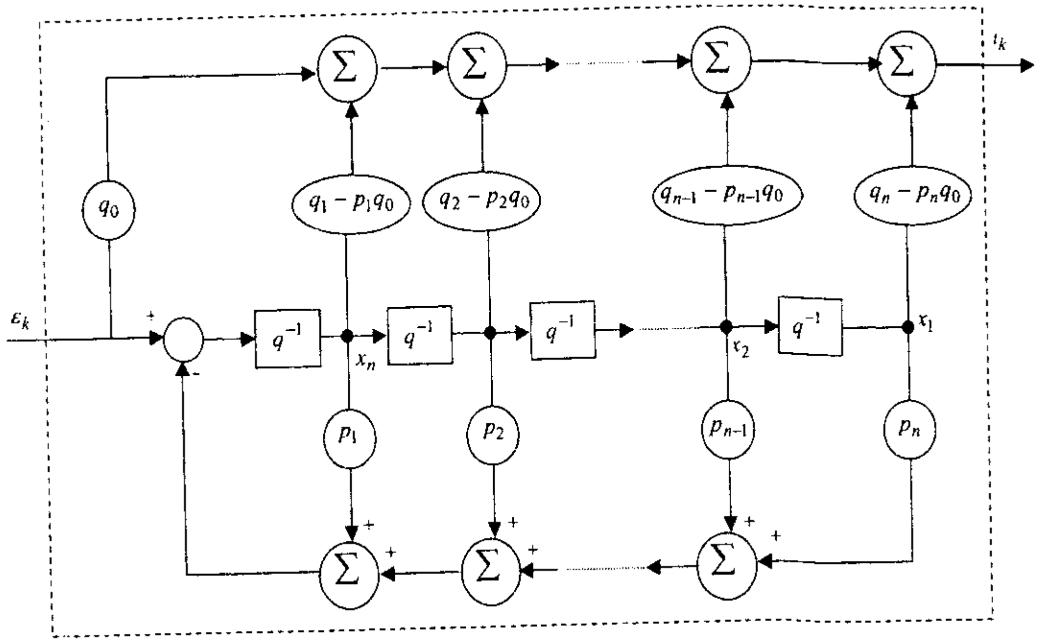


Fig. 15.9

Funcțiile de transfer $H_i(z^{-1})$ pot fi puse sub forma:

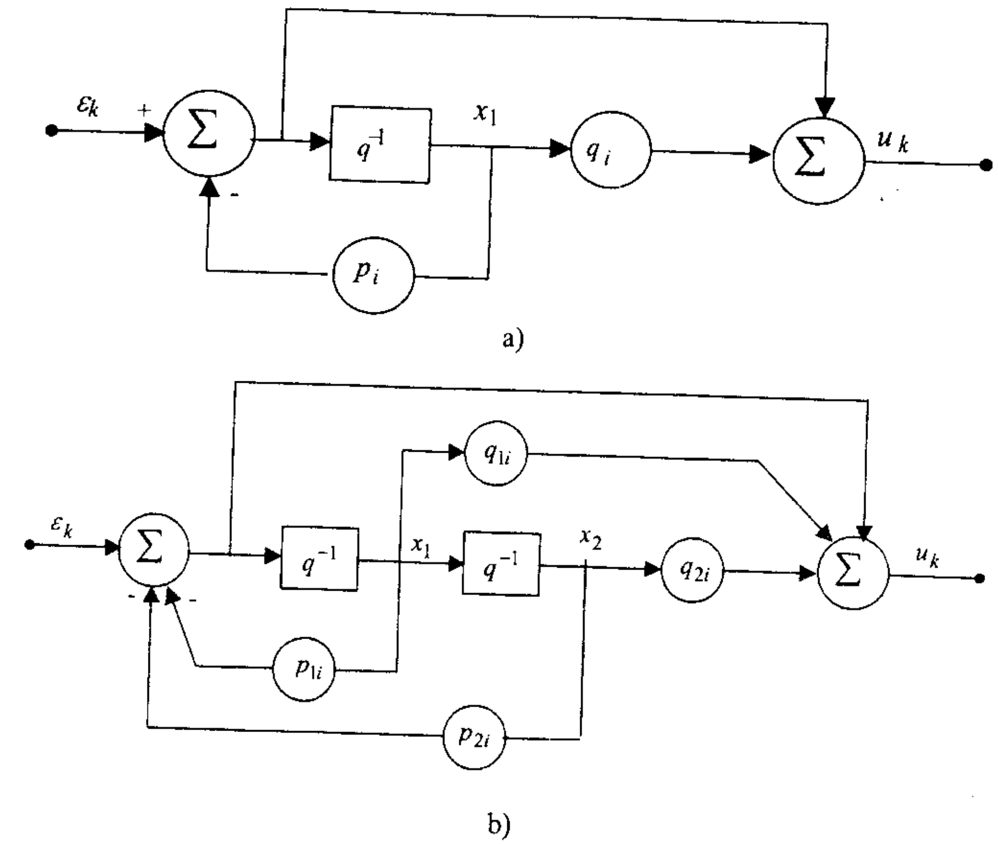
$$H_i(z^{-1}) = \frac{1 + q_{1i} z^{-1}}{1 + p_{1i} z^{-1}} \tag{15.8}$$

respectiv:

$$H_i(z^{-1}) = \frac{1 + q_{1i} z^{-1} + q_{2i} z^{-2}}{1 + p_{1i} z^{-1} + p_{2i} z^{-2}} \tag{15.9}$$

Realizări standard pentru elemente de ordinul 1 și al II-lea sunt prezentate în figura 15.10 *a*, respectiv 15.10 *b*.

Operațiile de calcul în cadrul acestor realizări sunt mai simple, iar sensibilitatea la erorile de reprezentare a variabilelor și a parametrilor este mai scăzută.



b)

Fig. 15.10

În figura 15.11 se prezintă o realizare „cascadă" a unor module de ordinul I şi al II-lea.

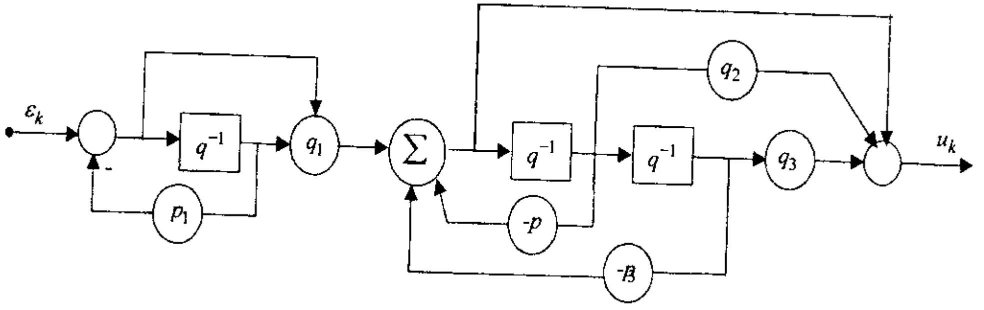


Fig. 15.11

În realizarea paralelă se consideră funcţia de transfer $H_R(z^{-1})$ descompusă sub forma:

$$H_R(z^{-1}) = \gamma + H_1(z^{-1}) + H_2(z^{-1}) + \cdots + H_p(z^{-1}), \tag{15.10}$$

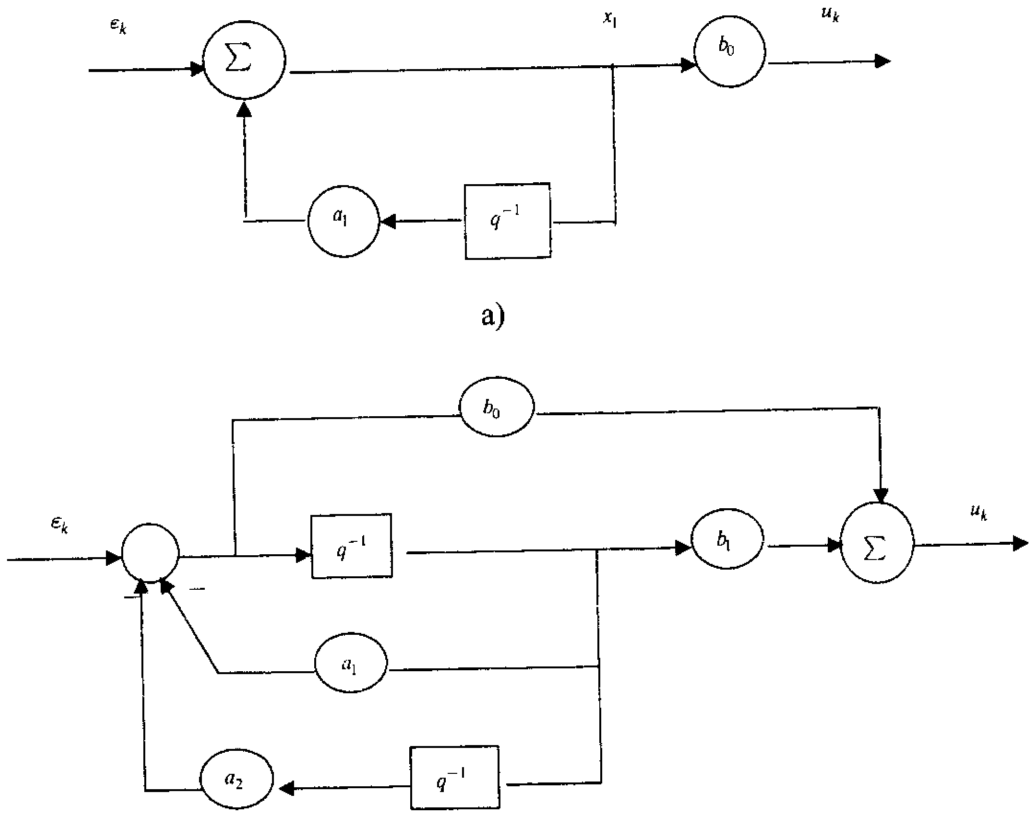
unde γ este o constantă şi $H_i(z^{-1})$ sunt funcţii de transfer de ordinul I şi/sau de ordinul al doilea de forma:

$$H_i(z^{-1}) = \frac{b_0}{1 + a_{1i}z^{-1}}, \tag{15.11}$$

respectiv:

$$H_i(z^{-1}) = \frac{b_0 + b_{1i}z^{-1}}{1 + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2}}. \tag{15.12}$$

Pentru forma (15.11) şi (15.12) a funcţiilor de transfer se obţin realizările prezentate în figura 15.12 *a,b*.



b)

Fig. 15.12

O reprezentare compactă a unei realizări în forma paralelă este dată în figura 15.13.

Ca şi în cazul precedent, pot fi evidenţiate simplificări ale operaţiilor de calcul şi o reducere a sensibilităţii la erorile de reprezentare a variabilelor şi a parametrilor în comparaţie cu realizările *directă* şi *companion*.

Performanţele unui sistem numeric de reglare sunt dependente de perioada de discretizare T, capacitatea de procesare numerică, lungimea cuvântului cu care operează microprocesorul şi de performanţele interfeţelor de proces (convertoarele A/N şi N/A).

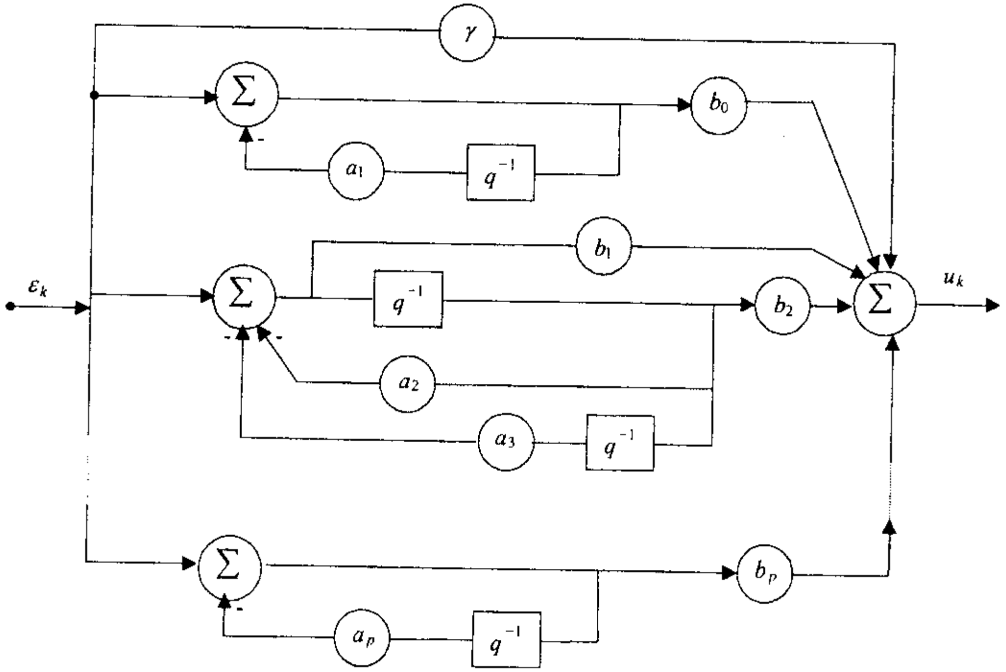


Fig. 15.13

15.3.2. Realizarea software a algoritmilor de reglare numerică

În figura 15.14 se prezintă schema unui SRA cu regulator numeric implementat ca program de aplicaţie cu intrările r_k şi y_k.

Ieşirea analogică $y(t)$ este aproximată printr-o secvenţă de numere $y_k \equiv y(kT)$, $k = 0,1,2,\cdots$, care reprezintă valorile funcţiei $y(t)$ la momente discrete de timp. În acest caz, T reprezintă perioada de eşantionare. Astfel, calculatorul (regulatorul numeric) citeşte ieşirea convertorului A/N la fiecare T secunde. Semnalul de referinţă $r_k \equiv r(kT)$ este memorat ca o

secvenţă de numere binare în memoria calculatorului. Eroarea $\varepsilon_k \equiv \varepsilon(kT)$ este formată şi procesată în calculator, în conformitate cu algoritmul de reglare. Comanda furnizată de calculator este transmisă spre elementele de execuţie prin intermediul convertorului numeric-analogic (N/A). Convertorul N/A menţine constantă valoarea numerică dată de calculator până apare următoarea comandă. Această procedură este repetată pentru fiecare perioadă de eşantionare T, cu observaţia că timpul de execuţie pentru algoritmul de reglare este mult mai mic decât T.

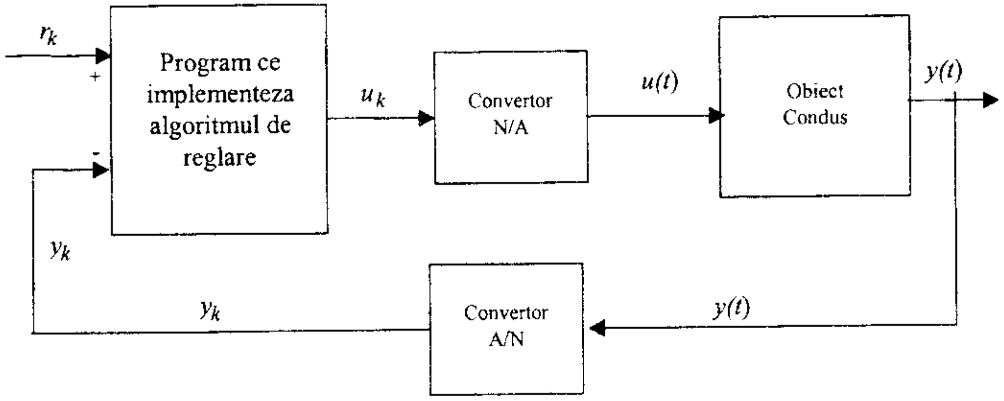


Fig. 15.14

Perioade mari de eşantionare permit realizarea algoritmilor de reglare de mare complexitate, însă banda de frecvenţă pentru SRA poate cere valori mici pentru T. Calculele trebuie realizate în cadrul perioadei T, altfel întârzierile în efectuarea calculelor pot conduce la instabilitatea SRA.

Coeficienţii care apar în algoritmii de reglare şi valorile intrării de referinţă trebuie să fie reprezentaţi printr-un număr finit de biţi. Toate aceste operaţii, împreună cu operaţiile de cuantizare (rotunjire, trunchiere), introduc imprecizii în bucla de reglare.

În cele ce urmează, sunt analizate principalele aspecte legate de implementarea algoritmilor de reglare.

Principalele întrebări la care trebuie răspuns atunci când se trece la implementarea unui sistem numeric de conducere în timp real sunt:

- Care este precizia convertoarelor?
- Care este precizia cerută la efectuarea calculelor?
- Ce fel de aritmetică se foloseşte (în virgulă fixă sau în virgulă mobilă)?

Pentru a răspunde la aceste întrebări este necesar a înţelege efectele limitărilor şi a estima consecinţele lor pentru performanţele sistemului în buclă închisă.

Sursele majore de erori la implementarea sistemelor numerice de reglare sunt: cuantizarea în convertoarele A/N, cuantizarea parametrilor, rotunjirea în urma operațiilor de adunare, scădere, multiplicare, evaluare a funcțiilor, cuantizarea în convertoarele N/A.

Convertoarele uzuale au precizii de 8, 10, 12 și 14 biți, care corespund la o rezoluție de 0.4%, 0.1%, 0.025% și 0.006%. Convertoarele N/A au, de asemenea, o precizie limitată (o precizie de 10 biți este tipică).

Un element cheie în evaluarea preciziei de implementare al unui algoritm îl constituie *„lungimea cuvântului"*. Uzual, algoritmii numerici sunt implementați apelând la microprocesoare cu lungimea cuvântului de 8, 16 sau 32 biți. Procesoarele de semnal (DSP) sunt frecvent utilizate la implementarea algoritmilor numerici, în cazul în care sunt cerute viteze mari de eşantionare.

Cele mai multe procesoare de semnal au lungimea cuvântului de 16, 24 sau 32 biți, însă acumulatoarele au lungimea mai mare, de 32 sau 56 biți. Arhitectura cu acumulator a cărui lungime este mai mare este ideală pentru calculul produselor scalare, deoarece produsele termenilor pot fi acumulate în *dublă precizie*. Procesoarele de semnal sunt foarte rapide. Operația de multiplicare și acumulare (MAP) ajunge la 100 nanosecunde. Procesoarele în virgulă mobilă sunt mai costisitoare.

Din cauza lungimii finite a cuvântului utilizată pentru reprezentarea numerelor, problemele de precizie apar atunci când un număr având m biți trebuie reprezentat printr-un număr având $n<m$ biți. Acest proces de cuantizare apare uzual în conversiile A/N, după multiplicări sau divizări, când se inserează constante etc.

Cuantizarea se realizează prin *trunchiere* sau prin *rotunjire*. Când se trunchează un număr de m biți la un număr de $n<m$ biți, atunci $(m-n)$ cei mai puțin semnificativi biți se neglijează.

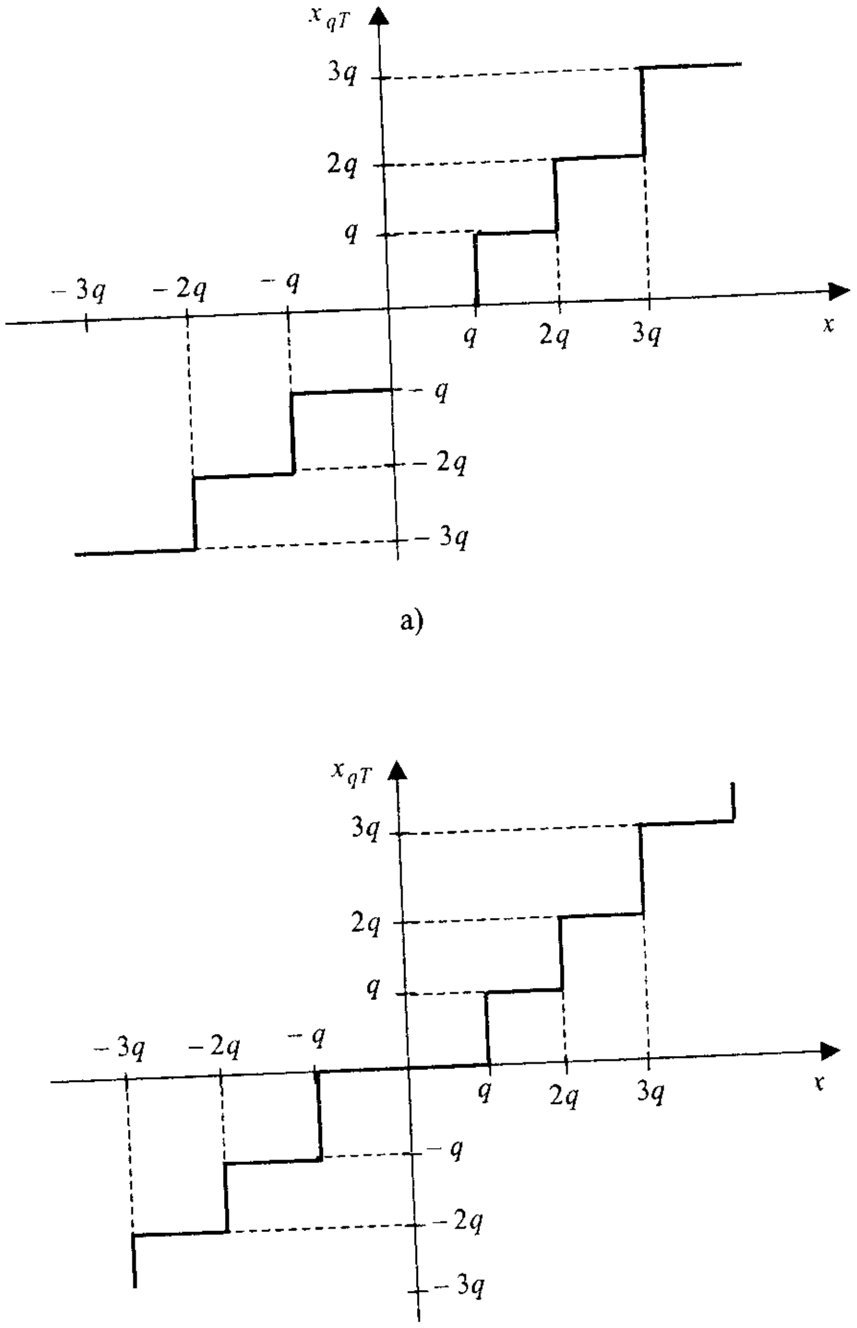
Relația exactă între valorile unei variabile continue x și valorile versiunii sale cuantizate x_{qT} folosind operația de trunchiere sunt date în figura 15.15*a* pentru cazul reprezentării *complementului lui 2* și în figura 15.15*b*.

Dacă notăm prin $\varepsilon_T = x_{qT} - x$ eroarea rezultată în procesul de trunchiere pentru cele două tipuri de reprezentare, se obține:

$$-q < \varepsilon_T \leq 0 \qquad (15.13)$$

și

$$0 \leq \varepsilon_T^{'} < q, \text{ pentru } x<0, \text{ respectiv:}$$
$$-q < \varepsilon_T \leq 0, \text{ pentru } x>0. \qquad (15.14)$$



a) b)

Fig. 15.15

Operația de rotunjire este evidențiată în figura 15.16, unde q este intervalul de cuantizare ($q = 2^{-N}$, N – lungimea cuvântului).

Eroarea de rotunjire se obține simplu: $\varepsilon_R = x_{qR} - x \in [-q/2,\ q/2]$. Aceasta este validă pentru toate cazurile de reprezentare în virgulă fixă.

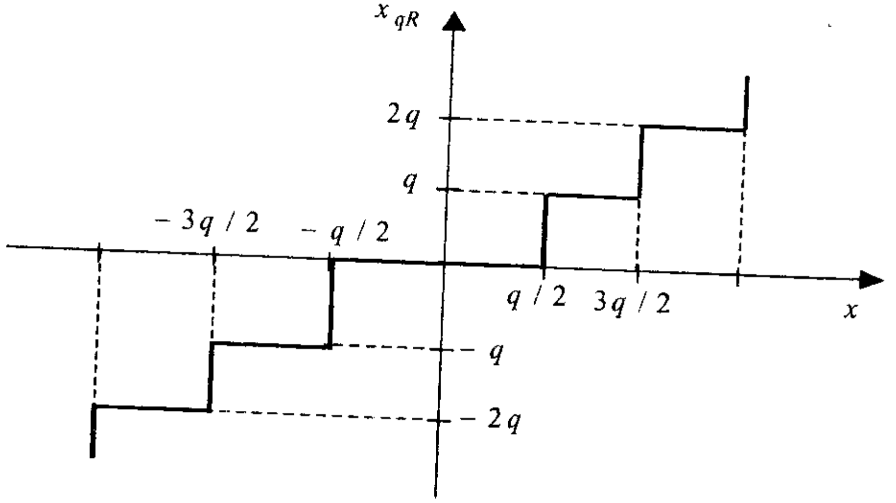


Fig. 15.16

O descriere detaliată a fenomenului de cuantizare conduce la un model neliniar care prezintă reale dificultăți de analiză. Investigarea unor cazuri simple arată că operațiile de trunchiere și rotunjire pot conduce la apariția ciclurilor limită în funcționarea SRA.

Unele efecte ale cuantizării în SRA pot fi evidențiate apelând la modele simplificate liniare. În acest caz, operațiile de cuantizare sunt modelate ca operații ideale cu perturbații aditive sau multiplicative, deterministe sau stocastice.

Erorile de trunchiere și rotunjire introduc zgomote în sistem, iar reprezentarea cu precizie finită a parametrilor algoritmului conduce la scăderea stabilității relative și a performanțelor SRA.

Operațiile cu precizie finită nu sunt, nici asociative, nici distributive, ca urmare a efectelor neliniare introduse. Rezultatul calculelor în cadrul unui algoritm de reglare depinde de ordinul și de complexitatea calculelor. Apare, astfel, problema realizării algoritmilor pentru a reduce efectele reprezentării cu *lungimea finită a cuvintelor* (LFC).

Dacă unele proprietăți ale SRA, în particular, stabilitatea este foarte sensibilă la variații sau incertitudini ale parametrilor regulatorului, atunci regulatorul poate fi considerat ca un „regulator fragil“. Asemenea

regulatoare trebuie să fie implementate cât mai precis. Este clar că un regulator care este stabil robust la efectele preciziei finite de reprezentare a parametrilor datorită efectelor (LFC) este, de asemenea, nefragil.

Apare în mod firesc întrebarea care este cea mai bună realizare a algoritmului de reglare care asigură efectul minim al erorilor de reprezentare a parametrilor asupra performanțelor SRA.

Dacă algoritmul de reglare are o reprezentare de stare de forma:

$$\begin{aligned} x_{k+1}^c &= A_c x_k^c + B_c y_k, \quad x_k^c \in \Re^{n_c} \\ u_k &= F_c x_k^c + G_c y_k \end{aligned} \qquad (15.15)$$

unde $x_k^c \in \Re^{n_c}$ reprezintă starea atașată algoritmului de reglare, rezultă o funcție de transfer:

$$H_R(z^{-1}) = F_c[zI - A_c]^{-1} B_c + G_c \qquad (15.16)$$

În cazul unei precizii infinite de reprezentare, se poate găsi o matrice T nesingulară, astfel încât:

$$F_c T(zI - T^{-1} A_c T)^{-1} T^{-1} B_c + G_c \equiv F_c (zI - A_c)^{-1} B_c + G_c .$$

Astfel, realizările lui $H_R(z)$ nu sunt unice, existând pentru $H_R(z)$ o infinitate de realizări echivalente ale algoritmului de reglare. În cazul unei precizii finite, aceste realizări nu sunt echivalente. Se poate astfel formula problema găsirii acelei matrice de transformare T care minimizează efectul lungimii finite a cuvântului (LFC). O asemenea abordare permite a măsura „fragilitatea“ regulatorului prin evaluarea sensibilității funcției de transfer a SRA la mici variații ale parametrilor algoritmului de reglare definiți prin realizarea $\tilde{A}_c$, $\tilde{B}_c$, $\tilde{F}_c$, $\tilde{G}_c$, unde $\tilde{A}_c = T^{-1} A_c T$, $\tilde{B}_c = T^{-1} B_c$, $\tilde{F}_c = F_c T$, $\tilde{G}_c = G_c$. Rezultate semnificative în această direcție sunt prezentate în [6, 59].

O analiză eficientă a efectului preciziei finite de reprezentare a parametrilor algoritmului de reglare asupra stabilității și performanțelor unui SRA numeric se poate efectua pornind de la ecuația caracteristică a SRA dată sub forma polinomului:

$$P_c(z) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots + \alpha_n = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2)\cdots(z - \lambda_n) \qquad (15.17)$$

unde coeficienții α_i sunt determinați de pozițiile polilor λ_i în interiorul cercului de rază unitară.

Polinomul P_c poate fi privit ca o funcție de z și α_i. Când parametrul α_i este schimbat la $\alpha_i + \delta\alpha_i$, polii sunt schimbați din λ_k la $\lambda_k + \delta\lambda_k$:

$$0 = P_c(\lambda_k + \delta\lambda_k,\ \alpha_i + \delta\alpha_i) \cong$$
$$\cong P_c(\lambda_k, \alpha_i) + \left.\frac{\partial P_c}{\partial z}\right|_{z=\lambda_k} \cdot \delta\lambda_k + \left.\frac{\partial P_c}{\partial \alpha_i}\right|_{z=\lambda_k} \cdot \delta\alpha_i + \cdots \tag{15.18}$$

Primul termen din (15.18) este egal cu zero. Dacă neglijăm termenii de ordinul doi și mai mare în (15.18), obținem:

$$\delta\lambda_k \cong -\left.\frac{\dfrac{\partial P_c}{\partial \alpha_i}}{\dfrac{\partial P_c}{\partial z}}\right|_{z=\lambda_k} \cdot \delta\alpha_i \tag{15.19}$$

După efectuarea calculelor, ținând seama că:

$$\left.\frac{\partial P_c}{\partial \alpha_i}\right|_{z=\lambda_k} = \lambda_k^{n-i} \text{ și } \left.\frac{\partial P_c}{\partial z}\right|_{z=\lambda_k} = \prod_{j\neq k}^{n} (\lambda_k - \lambda_j)$$

se obține:

$$\delta\lambda_k \cong -\frac{\lambda_k^{n-j}}{\prod\limits_{j\neq k}^{n} (\lambda_k - \lambda_j)} \cdot \delta\alpha_i \tag{15.20}$$

Relația (15.20) evidențiază efectul pe care îl poate avea imprecizia de reprezentare a parametrilor regulatorului asupra stabilității și performanțelor SRA.

Fragilitatea regulatorului crește odată cu mărirea vitezei de discretizare, având în vedere că marginea de stabilitate scade cu creșterea vitezei de eșantionare, polii se apropie de cercul unitate, deci erori mici în reprezentarea parametrilor algoritmului de reglare pot conduce la instabilitate și, prin urmare, regulatorul este fragil.

O analiză a „fragilității" sau a „robusteței" unui algoritm numeric se impune atunci când se trece la implementare.

Problemele legate de precizia calculelor, erorile de reprezentare și impactul acestora asupra robusteței (fragilității) regulatoarelor implementate numeric sunt prezentate în [59].

15.4. Aspecte operaționale ale implementării

Metodele de proiectare prezentate în capitolele anterioare au la bază modele liniare (liniarizate) ale obiectului condus. Obiectul condus, așa cum a fost definit în capitolul 1, conține elementul de execuție, instalația tehnologică și traductorul. În aplicațiile reale, elementul de execuție poate avea un domeniu de lucru care iese din zona de variație a mărimilor funcționale, care permite aproximarea comportării printr-un model liniar introducând, astfel, neliniarități în funcționarea sistemului. Cele mai importante neliniarități introduse de elementul de execuție sunt de tip „saturație" și „zonă de insensibilitate".

În aceste condiții, la pornirea sau/și la oprirea instalației tehnologice, precum și la variații mari ale variabilelor, fenomenele neliniare, inerent introduse de elementele de execuție, pot avea efecte dezastruoase asupra comportării SRA, dacă nu sunt prevenite. În capitolul 9 sunt prezentate metode de proiectare a sistemelor de reglare cu luarea în considerație a neliniarităților esențiale (saturație, histerezis, zonă de insensibilitate etc.), însă algoritmii de reglare neliniari obținuți necesită eforturi mari de implementare. Astfel, este practic a folosi metode euristice care să evite efectul nedorit al neliniarităților asupra performanțelor SRA.

Cea mai importantă neliniaritate introdusă de elementele de execuție este saturația, unde limitele superioară și inferioară sunt determinate de închiderea sau deschiderea completă a valvei.

Dificultățile apar deoarece regulatorul este un sistem dinamic. Când variabila de comandă se saturează, este necesar a asigura o comportare corespunzătoare a stării regulatorului.

Considerăm mai întâi algoritmul de reglare după stare, cu estimator de stare inclus (fig. 15.17).

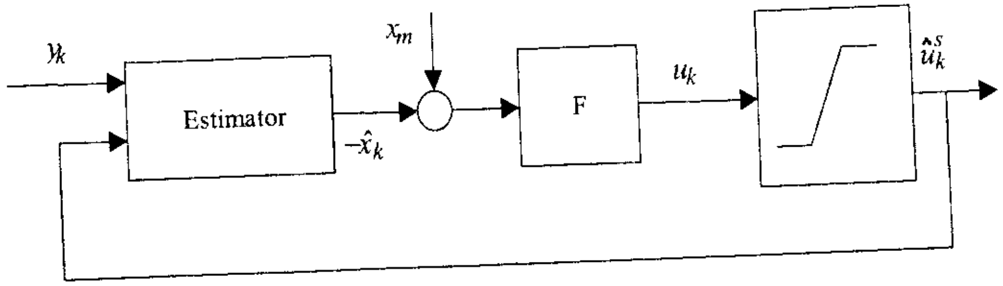


Fig. 15.17

Ecuațiile ce definesc algoritmul de reglare după stare cu estimator și model de referință în prezența saturației elementului de execuție sunt [6]:

$$\begin{aligned}
\hat{x}_k &= \hat{x}_k^0 + L\left(y_k - C\hat{x}_k^0\right) \\
\hat{x}_k^0 &= \Phi\hat{x}_{k-1} + \Gamma\hat{u}_{k-1}^s \\
\hat{x}_k &= [I - LC]\Phi\hat{x}_{k-1} + Ly_k + [I - LC]\Gamma\hat{u}_{k-1}^s \\
\hat{u}_k^s &= sat\left[F\left(x_m - \hat{x}_k\right)\right] + Nr_k
\end{aligned} \tag{15.21}$$

unde funcția sat este definită ca:

$$sat\ \ u = \begin{cases} u_{\min} & \text{pentru } u \le u_{\min} \\ u & \text{pentru } u_{\min} < u < u_{\max} \\ u_{\max} & \text{pentru } u \ge u_{\max} \end{cases} \tag{15.22}$$

pentru un scalar și:

$$sat\ u = \begin{bmatrix} sat\, u_1 \\ sat\, u_2 \\ \vdots \\ sat\, u_m \end{bmatrix}$$

pentru un vector.

Estimatorul furnizează starea corectă, dacă variabila de comandă u_k este cea calculată, sau cea estimată $\hat{u}_k$, chiar dacă aceasta atinge saturația.

Valorile u_{min} și u_{max} sunt alese pentru a corespunde limitărilor impuse de elementul de execuție. Din (15.21) se observă că starea sistemului va fi totdeauna limitată dacă matricea $(I - LC)\Phi$ este stabilă.

Este clar că $\hat{x}_k$ va fi o bună estimare a stării procesului chiar dacă valoarea se saturează în condițiile alegerii corespunzătoare a limitelor u_{min} și u_{max}.

Fenomenul „ANTI-WIND-UP" pentru modelele de stare generale poate fi evidențiat pornind de la modelul general al algoritmului de reglare:

$$\begin{aligned}
x_{k+1}^c &= A_c x_k^c + B_c y_k \\
u_k &= F_c x_k^c + G_c y_k
\end{aligned} \tag{15.23}$$

care nu include explicit estimatorul.

Dacă matricea A_c are valori proprii în afara discului unitate, variabilele de comandă se saturează și poate apărea fenomenul „wind-up". Se aproximează, de exemplu, că ieșirea a atins limita maximă și apare o eroare de reglare. Starea și comanda vor continua să crească, deși influența asupra procesului este limitată din cauza saturației.

Pentru a evita acest fenomen, trebuie ca starea din (15.23) sa aibă o valoare corespunzătoare atunci când ieșirea regulatorului se saturează. În cazul regulatoarelor convenționale, acest lucru se realizează prin introducerea funcției (modului) „urmărire", care asigură ca starea regulatorului să corespundă secvenței intrare-ieșire (u_k, y_k).

Proiectarea unui mod „urmărire" poate fi formulată ca o problemă de estimare a stării. În cazul regulatorului cu estimator explicit de stare urmărirea se realizează automat prin includerea ieșirii elementului de execuție sau a estimației acestuia în estimator [5, 45].

În cazul modelului general (15.23), vom considera același raționament ca în cazul regulatorului cu estimator explicit.

Astfel:

$$x_{k+1}^c = A_c x_k^c + B_c y_k + L\left[u_k - F_c x_k^c - G_c y_k\right]$$

sau

$$x_{k+1}^c = [A_c - LF_c]x_k^c + [B_c - LG_c]y_k + Lu_k \tag{15.24}$$

$$x_{k+1}^c = A_c^0 x_k^c + B_c^0 y_k + Lu_k \tag{15.25}$$

Dacă sistemul (15.23) este observabil, matricea L poate fi aleasă totdeauna, astfel ca matricea $A_c^0 = A_c - LF_c$ să aibă valorile proprii în interiorul discului unitate. Prin aplicarea acelorași argumente ca pentru regulatorul cu estimator explicit, legea de reglare devine:

$$\begin{aligned}
x_{k+1}^c &= A_c^0 x_k^c + B_c^0 y_k + Lu_k \\
u_k &= sat\left[F_c x_k^c + G_c y_k\right].
\end{aligned} \tag{15.26}$$

Funcția saturație se alege pentru a corespunde saturației reale a elementului de execuție.

O schemă bloc a regulatorului cu compensarea „antireset windup" este prezentată în figura 15.18.

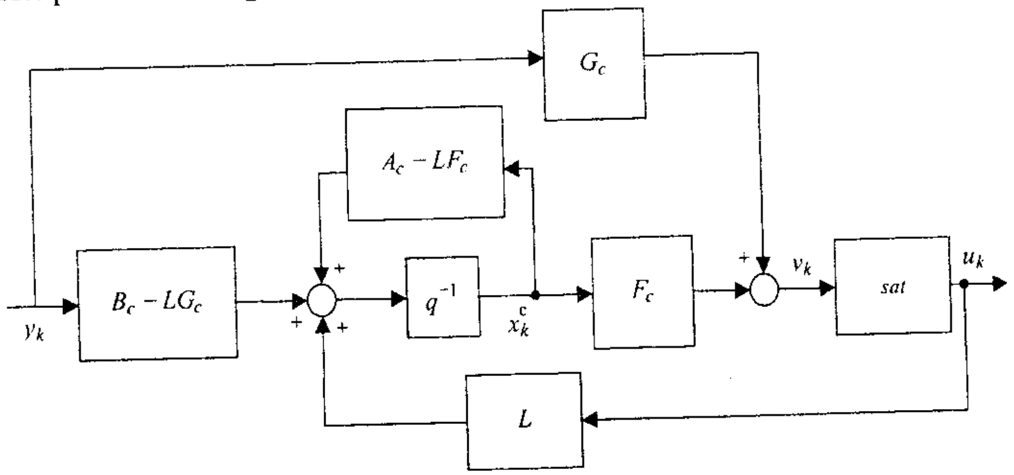


Fig. 15.18

În mod similar, se poate descrie mecanismul „antiwindup" pentru modele intrare-ieșire ale regulatorului.

Considerăm regulatorul cu două grade de liberate cu reprezentarea în formă canonică R, S, T:

$$R(q^{-1})u_k = T(q^{-1})r_k - S(q^{-1})y_k. \tag{15.27}$$

Problema este de a rescrie această ecuație într-o asemenea formă, încât să reprezinte un sistem dinamic cu estimator cu cele trei intrări.

Notăm cu $A_0(q^{-1})$ polinomul caracteristic al estimatorului antiwindup și adăugăm $A_0(q^{-1})u_k$ în ambele părți ale ecuației (15.27):

$$A_0(q^{-1})u_k = T(q^{-1})r_k - S(q^{-1})y_k + [A_0(q^{-1}) - R(q^{-1})]u_k \tag{15.28}$$

Regulatorul cu mecanism „antiwindup" este astfel descris prin ecuațiile:

$$A_0(q^{-1})v_k = T(q^{-1})r_k - S(q^{-1})y_k + [A_0(q^{-1}) - R(q^{-1})]u_k$$
$$u_k = sat\ v_k. \tag{15.29}$$

Schema bloc a regulatorului cu mecanism antiwindup este prezentată în figura 15.19 (v. § 11.6.2).

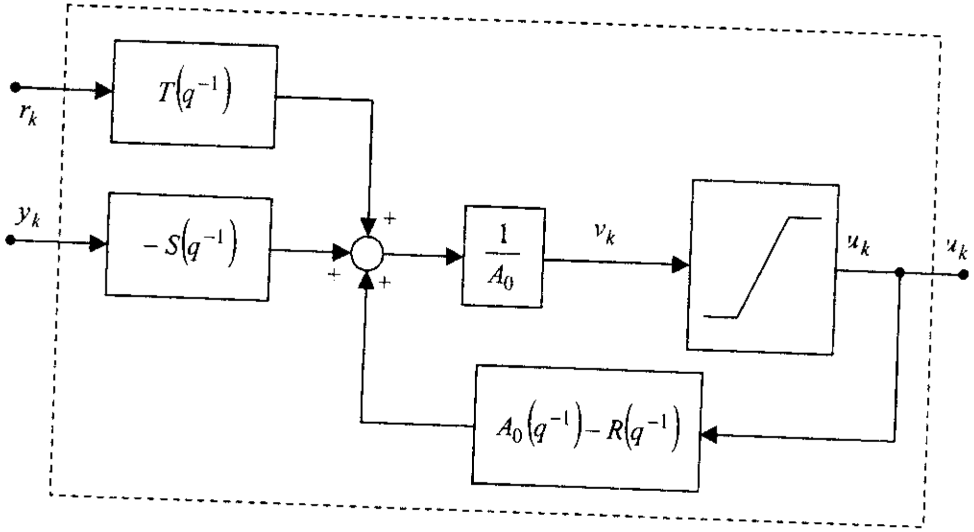


Fig. 15.19

Modelul (15.29) este identic cu (15.27) atât timp cât comanda nu se saturează. Când comanda se saturează, regulatorul poate fi interpretat ca un estimator cu dinamica dată prin polinomul $A_0(q^{-1})$.

În cazul în care $A_0(q^{-1}) = 1$ (estimator deadbeat), comanda se calculează cu relația:

$$u_k = sat[T(q^{-1})r_k - S(q^{-1})y_k + (1 - R(q^{-1}))u_k]. \tag{15.30}$$

Includerea în algoritmii de reglare a mecanismului antiwindup presupune eforturi suplimentare pentru structurarea acestora și dezvoltarea programelor de aplicație. De asemenea, trebuie avute în vedere aspectele operaționale ale algoritmilor de reglare la trecerea de la modul „AUTOMAT" la modul „MANUAL" de funcționare, precum și la modificările parametrilor.

Regimul de tranziție al regulatorului, ca sistem dinamic, de la un mod de lucru la alt mod de lucru, trebuie să se realizeze fără șocuri în nivelul comenzii și, implicit, fără șocuri pentru instalația tehnologică. Un mod de lucru „URMARIRE" se implementează în algoritmul de reglare prin includerea unui estimator de stare.

Un alt aspect operațional ce trebuie avut în vedere la implementarea unui algoritm numeric este și „inițializarea" stării acestuia la punerea în funcțiune. Un asemenea mod de lucru se regăsește și la configurarea unor structuri de reglare în cascadă. Astfel, regulatoarele secundare sunt mai întâi inițializate în regim manual și apoi trecute în regim automat, când nivelul comenzilor este apropiat.

15.5. Programarea regulatoarelor numerice

15.5.1. Introducere

Programarea este un aspect important al implementării unui sistem de conducere, atât din punctul de vedere al eficienței sistemului, cât și din punctul de vedere al timpului cerut pentru implementare.

Efortul cerut și metodele folosite pentru implementare depind de sistemul software disponibil și de natura problemei de conducere. Caracterul și dificultățile programării depind esențial de aplicație.

Pentru sistemele de timp real, așa cum sunt regulatoarele numerice mono sau multiprocesor, se utilizează programe concurente, astfel obținându-se *sisteme concurente* [34, 78].

Un program concurent este format din mai multe procese (taskuri) care se execută simultan (cel puțin temporar), aflându-se în competiție pentru a avansa din punctul de vedere al activităților efectuate. Procesul (taskul) este definit ca o parte (entitate logică) a unui program care este

executată secvențial, dar care poate fi executată concurent (sau pseudoconcurent) cu alte procese, deci acelaşi program.

Necesitatea dezvoltării sistemelor concurente provine din:

- timpul scurt de răspuns şi utilizarea eficientă a resurselor, ceea ce conduce la tehnici de specificare a stării sistemului şi a cerințelor de resurse, în mod dinamic;
- apariția unor activități concurente între procesorul central şi dispozitivele periferice, datorită utilizării eficiente a echipamentelor;
- partajarea informațiilor între programe şi comunicarea între programe, ceea ce a creat necesitatea specificării sincronizării la nivel software.

Programele concurente pot fi implementate pe diverse sisteme de calcul apelând la:

– *Multiprogramare* (procesele concurente se execută prin divizarea timpului pe un singur procesor);

– *Multiprelucrare* (procesele concurente se execută pe procesoare diferite cu memorie proprie sau comună);

– *Prelucrare distribuită* (procesele concurente se execută pe procesoare separate fără memorie comună; taskurile comunică între ele prin intermediul mesajelor).

Fie că sistemul concurent este implementat pe un sistem mono sau multiprocesor, concurența se realizează prin programare multitasking.

Programarea paralelă sau **concurentă** este *activitatea de scriere a unui program care conține o serie de părți, necesar a se afla în execuție în acelaşi moment.* Orice program de conducere a unui proces conține astfel de părți numite în mod uzual *taskuri* (sau *procese*). Programul de conducere se descompune în taskuri, fiecare task constituind în cadrul programului o etapă de execuție asincronă, cu un conținut bine delimitat (achiziție de date, conversii, calcul şi elaborare comandă, afişarea mărimilor de interes etc.).

Din punctul de vedere al regulatorului numeric, taskul reprezintă un program în formă executabilă compus, dintr-o succesiune de instrucțiuni executate secvențial.

Un sistem care permite execuția mai multor taskuri paralele se numeşte *sistem multitasking.*

Două taskuri se numesc **paralele** sau **concurente** *dacă prima instrucțiune a unui task demarează înainte ca ultima instrucțiune a celuilalt task să se încheie.*

Pe un regulator numeric monoprocesor, execuția paralelă a taskurilor se va face intercalat pe principiul distribuirii timpului unității centrale între taskuri („time slicing").

Un singur task va fi în execuție la un moment dat, dar datorită vitezei mari de lucru a procesorului, precum şi datorită modului de programare, se lasă impresia că taskurile se execută „simultan", ca şi când fiecare task ar beneficia de un procesor propriu virtual, evident ceva mai lent. Spunem, în acest caz, că are loc o *execuție pseudo-paralelă* sau o *execuție paralelă logică.*

Taskurile componente ale unui program dat sunt de două categorii: *taskuri disjuncte* sau *independente* şi *taskuri care interacționează* sau *cooperează. Două sau mai multe taskuri se numesc disjuncte dacă nu schimbă informații între ele sau dacă nu utilizează resurse în comun. În caz contrar,* se spune că ele *interacționează.* În cazul unei aplicații multitasking, avem de-a face în general cu taskuri care interacționează. Evoluția unui program alcătuit numai din taskuri disjuncte este unică, indiferent de ordinea şi de viteza de execuție a taskurilor.

Un program compus din taskuri care interacționează nu are în general o evoluție unică, ea depinzând de două aspecte:

– de modul şi posibilitatea de planificare a taskurilor pentru execuție;

– de modul şi posibilitatea de tranziție a unui task dintr-o stare în alta.

Modelul cel mai general al stărilor taskurilor şi al tranzițiilor acestora între stări este dat în figura 15.20.

Taskurile care compun o aplicație se pot afla în una dintre următoarele trei stări: *neinstalat, inactiv, activ.* Un task activ poate fi la rândul lui în una dintre următoarele substări: *blocat, gata de execuție* sau *în execuție.* Un singur task şi numai unul singur se poate afla la un moment dat în execuție.

Un task neinstalat este un task creat, rezident pe un suport extern sau în memoria calculatorului, care nu a fost adus încă la cunoştința sistemului de operare al echipamentului (regulatorului). El este făcut cunoscut sistemului prin operația de instalare în urma căreia va trece în starea inactiv.

Un task se află în starea *inactiv* dacă este instalat, dar nu s-a făcut nici un apel de intrare a lui în execuție. Prin instalare se creează şi i se alocă taskului un *vector de stare* sau un *bloc de control* al taskului care reprezintă materializarea taskului în sistem.

Vectorii de stare ai taskurilor sunt grupați într-o tabelă care este folosită de sistem pentru efectuarea schimbărilor survenite în stările taskurilor pe parcursul existenței lor.

Un task poate reveni în starea neinstalat numai din starea inactiv, dezafectându-i-se vectorul de stare.

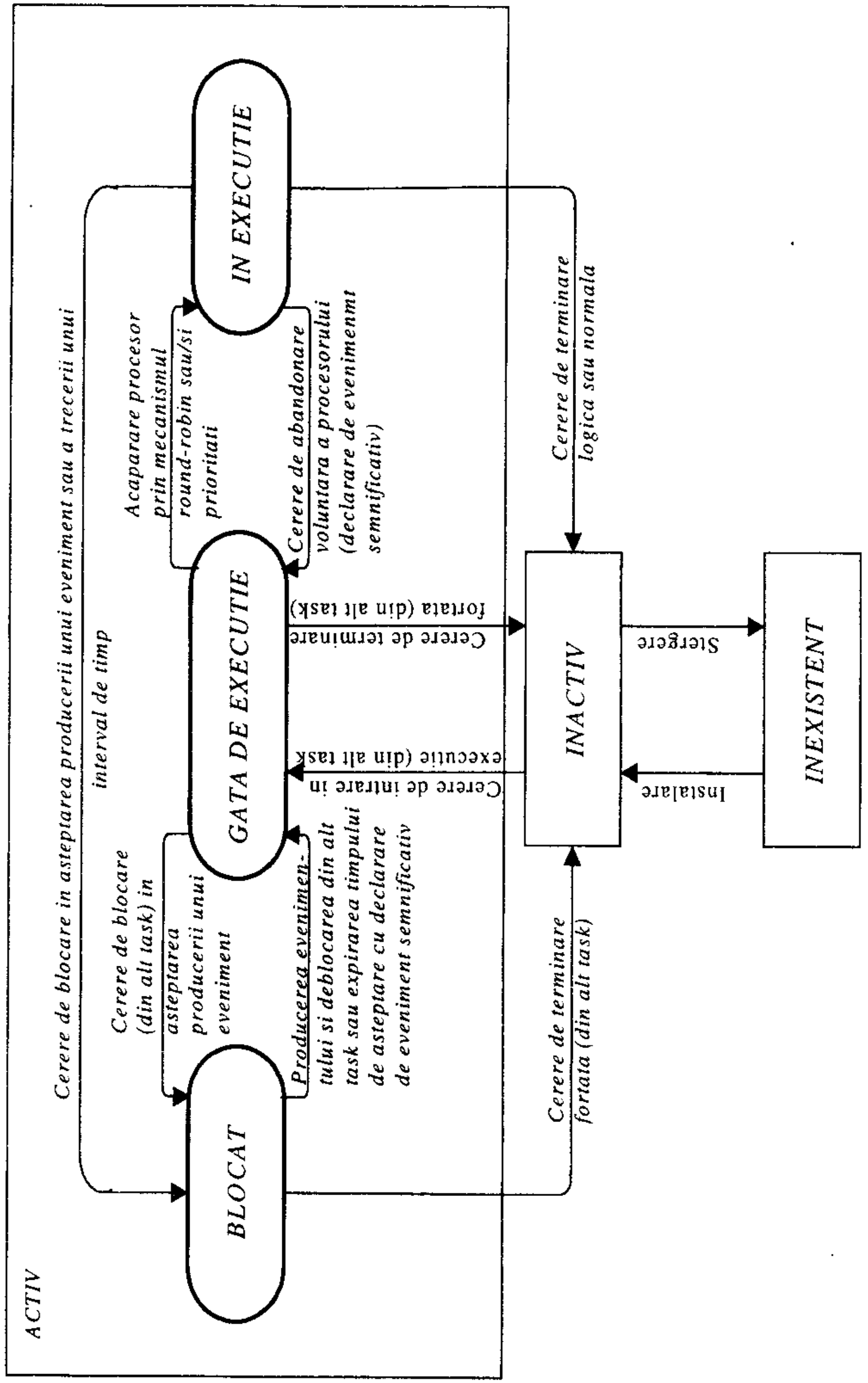


Fig. 15.20

Un task pentru care se face o cerere de intrare în execuție trece *în starea activ* și anume în substarea gata de execuție, în care el poate concura la acapararea procesorului și deci la trecerea în substarea în execuție. Acest moment nu poate fi prevăzut cu exactitate de către programator, depinzând de complexitatea aplicației și de modul în care se face planificarea taskurilor pentru intrarea în execuție.

Nucleul gestionează timpul de utilizare a unității centrale de către procese, prin planificarea acestora pentru execuție. Comutarea controlului procesorului de la un proces la altul este una dintre funcțiile cele mai importante ale sistemului de operare. Cu ajutorul acestuia se poate determina ordinea de execuție a proceselor, astfel încât funcțiile fiecărui proces să fie realizate în concordanță cu cerințele impuse.

Componenta sistemului de operare de timp real care realizează gestionarea proceselor este determinată de:

- mecanismul care realizează comutarea execuției între procese;
- modul în care planifică procesele pentru execuție.

Mecanismele de comutare se împart în două categorii:

a) mecanisme de comutare bazate pe întreruperi hardware, la care comutarea execuției proceselor este determinată de apariția unor întreruperi hardware în sistem;

b) mecanisme de comutare bazate pe întreruperi software, la care comutarea execuției este determinată de apeluri de sistem.

Planificarea executării proceselor se realizează prin intermediul planificatorului, parte componentă a nucleului, pe baza algoritmului de planificare.

Cerințele principale pentru un nucleu de timp real sunt:

- să ofere facilități pentru crearea, terminarea, întârzierea și activarea proceselor;
- să realizeze planificarea proceselor pentru execuție;
- să gestioneze dinamic resursele software și hardware;
- să gestioneze tratarea întreruperilor și să permită emiterea răspunsurilor corespunzătoare. Întreruperile sunt tratate în ordinea sosirii semnalelor corespunzătoare și ale nivelurilor lor de prioritate;
- să ofere facilități pentru cooperare între procese. Pentru realizarea sarcinilor, procesele trebuie să poată să se sincronizeze, să comunice și să dispună de facilități pentru realizarea excluderii mutuale;
- să permită conectarea unor dispozitive periferice și să ofere facilități pentru transferul datelor la/de la acestea. Operațiile de intrare/ieșire trebuie să se execute concurent cu celelalte activități ale programelor și ale sistemului de operare;

- să permită tratarea erorilor de calcul apărute în timpul execuției programelor;
- să fie adaptabile, modulare, să poată fi utilizate la dimensiuni diferite și să fie capabile să impună constrângeri de timp real soft și hard.

Un nucleu de timp real trebuie să asigure proceselor un număr minim de facilități pentru realizarea cooperării (comunicare, sincronizare și excludere mutuală) între procese și sincronizarea lor cu timpul fizic.

15.5.2. Planificarea taskurilor

Taskurile trebuie să fie planificate pentru execuție în concordanță cu cerințele sistemului de timp real. Un task intră în starea *gata de execuție* dacă apare evenimentul la care trebuie să reacționeze sistemul. Execuția taskurilor trebuie să respecte termenele ferme ale răspunsurilor și să asigure optimizarea cerințelor de timp. Planificarea urmărește garantarea respectării cerințelor temporale impuse răspunsurilor.

Evenimentele interne sau externe calculatorului pot fi prevăzute sau nu pot fi prevăzute.

Planificarea constă în ordonarea în timp a execuției taskurilor care intră în componența sistemului de timp real. Prin planificarea taskurilor se determină modul de alocare a unității centrale sau a altor resurse, taskurilor aflate în starea *gata de execuție* astfel încât să fie respectate cerințele temporale și performanțele impuse sistemului de timp real.

Planificarea poate fi efectuată de *planificator*, o componentă a sistemului de operare, sau de către proiectantul sistemului de operare prin prioritizarea taskurilor sau prin intermediul mecanismelor de sincronizare.

Un algoritm de planificare performant ar trebui să ia în considerație următorii factori:

- existența termenelor de timp real și de tipul lor;
- parametrii taskurilor sau ale secvențelor de instrucțiuni care compun răspunsul;
- momentele apariției evenimentelor sincrone și prezicerea momentelor în care se vor întâmpla evenimentele asincrone;
- resursele comune disponibile;
- duratele de timp necesare și rămase pentru execuția taskurilor;
- importanța și utilitatea răspunsurilor.

Proiectarea unui planificator care să țină seama de toți factorii menționați este o sarcină dificilă, iar limbajele de programare concurente sau de timp real precum și sistemele de operare în variantele comerciale includ planificatoare care iau în considerare un număr redus de factori.

Planificarea se poate realiza off-line sau on-line cu dezavantajul creșterii complexității sistemului de operare în acest caz.

Principalii factori care influențează performanțele unui algoritm de planificare implementat on-line sunt:

- interacțiunea dintre componente;
- concurența dintre planificator și taskuri;
- tipul taskurilor și vitezele relative ale taskurilor;
- timpul consumat de planificator;
- duratele pentru răspunsuri.

Există mai multe tipuri de planificatoare sau planificări a căror utilizare depinde de caracteristicile taskurilor și mai ales de tipul sistemului de operare.

Astfel, se poate realiza planificarea taskurilor independente după importanța taskurilor, prin ordonare după termen, după ordinea de emitere a cererii sau după durata de execuția a taskurilor în sistemele monoprocesor.

În cazul arhitecturilor multiprocesor, problema planificării taskurilor poate fi formulată ca o problemă de optimizare cu restricții a cărei rezolvare este posibilă prin metode specifice inclusiv apelând la tehnici evoluționiste.

La implementarea unui sistem de conducere numerică în timp real care în esență este un sistem înglobat (*embedded control system*) ce integrează un sistem de calcul pe o aplicație reală trebuie rezolvate o multitudine de probleme specifice operaționalizării unei strategii de conducere pe un proces real.

Astfel, se impune proiectarea sau alegerea sistemului de operare de timp real implementabil pe un suport hardware cu restricții minime care asigură elaborarea și transmiterea comenzilor spre proces cu abateri minime față de valorile teoretice obținute prin proiectarea strategiei de conducere. Extinderea teoriei sistemelor de conducere la analiza și proiectarea sistemelor înglobate apare ca o necesitate în condițiile creșterii complexității sistemelor de timp real și a cerințelor de asigurare a robusteții acestor sisteme în prezența incertitudinilor. Se poate vorbi de planificare prin reacție apelând la modele dinamice ale sistemelor de calcul de timp real și controlul comportării temporale a acestora.

Dezvoltarea separată a teoriei conducerii și a planificării prin sistemele de conducere numerice, deși are unele avantaje a condus și la efecte negative în cazul unor sisteme de conducere de mare complexitate. Multe bucle de reglare nu sunt periodice sau pot comuta între un număr de perioade de eșantionare fixate. Întreruperile în buclele de reglare nu totdeauna sunt realizate hard. O abordare separată a proiectării algoritmilor de conducere și a algoritmilor de planificare în cadrul sistemelor înglobate

(*embedded systems*) nu permite obținerea unor soluții optimale în cadrul unor aplicații cu resurse de calcul și de comunicare limitate și cu cerințe înalte de performanță și flexibilitate.

Problema proiectării integrate a comenzii și planificării poate fi astfel formulată: „Dându-se o mulțime de procese supuse conducerii și un sistem de calcul cu resurse limitate să se proiecteze un set de regulatoare și planificarea lor cu taskuri de timp real, astfel încât performanțele conducerii să fie optimale".

În cazul sistemelor distribuite de conducere planificarea este extinsă și la rețeaua de comunicație.

Principalii factori care trebuie luați în considerație la proiectarea integrată a sistemelor înglobate sunt:

- **sistemul de operare de timp real**
- **algoritmul de planificare**
- **metoda de sinteză a regulatorului**
- **caracteristicile timpului de execuție al algoritmului de conducere**
- **optimizare off-line sau on-line**
- **rețeaua de comunicație**

Sistemele de conducere reprezintă un domeniu important pentru sistemele înglobate cu cerințe și posibilități speciale. Teoria conducerii poate fi folosită cu mare succes pentru proiectarea sistemelor de calcul în timp real înglobate. Sistemele de planificare cu reacție pot fi structurate în mai multe moduri luând în considerație structurile de regulatoare și combinațiile acestora. Planificatorul cu reacție poate fi privit ca un broker de resurse care folosește calitatea serviciilor pentru a negocia cu utilizatorii de resurse – regulatoarele.

Noile generații de sisteme de conducere în timp real, ca sisteme înglobate (*real time embedded control systems*) apelează la instrumente de proiectare integrată a strategiilor de conducere și a algoritmului de planificare on-line.

15.6. Organizarea unui algoritm de reglare numerică în jurul unui EXECUTIV de timp real

Așa cum se știe, un regulator numeric reprezintă unitatea dintre structura sa hardware (configurația) si software-ul implementat (programele de aplicație). La o aceeași configurație, maniera de implementare a [...] poate fi abordată din două puncte de vedere:

– realizarea unui regulator numeric „universal", posedând o clasă mare de algoritmi de conducere, considerată acoperitoare pentru o categorie mare de procese, acești algoritmi formând o bibliotecă de programe rezidentă în memoria regulatorului; utilizarea pe proces a unui anumit set de algoritmi este rezultatul unei operații destul de laborioase de configurare a echipamentului;

– realizarea unui regulator numeric cu setul de programe de conducere strict necesar procesului căruia îi este destinat.

Este evident avantajul celui de-al doilea mod de abordare, mai ales din punctul de vedere al eficientei gestionării resurselor, dar prezintă dezavantajul necesității din partea beneficiarului a unui efort mai mare de proiectare.

Având însă la dispoziție un EXECUTIV de timp real, efortul de programare se reduce considerabil. Pentru a ilustra cele menționate, în continuare se va considera modul de organizare a algoritmului PID prezentat în figura 5.14.

Algoritmul de reglare va constitui un task (PID) parte componentă a unui program organizat pe taskuri, ca în figura 15.21.

În spatele „comutatoarelor" C_i care apar în schemă, sunt *variabile de tip eveniment*, pe care le vom numi *flaguri*, prin intermediul cărora se poate modifica foarte ușor atât structura algoritmului, cât și regimul de lucru.

Se pot evidenția cu ușurință în figura 15.21 taskurile ce compun programul de reglare numerică a unui proces cu trei variabile măsurate și trei comenzi furnizate de regulator. În aceastä structură, sunt evidențiate flagurile pentru sincronizare ① și ②, flagurile pentru excludere mutuală ③ și ④ și flagurile pentru stabilirea regimului de lucru al algoritmilor de reglare ⑤, ⑥ și ⑦.

Succesiunea logică a taskurilor într-o aplicație de timp real este următoarea: TASK INIȚIALIZARE A SISTEMULUI → TASK ACHIZIȚIE → TASK CONVE4RSIE ÎN PROCENTE SAU ÎN UNITĂȚI INGINEREȘTI → TASK COMANDĂ-CONFIGURARE (COP) → TASK REGLARE → TASK AFIȘARE.

Baza de date a regulatorului se constituie din datele obținute prin măsurări și datele introduse de operator, referințe, valori ale parametrilor de acord, variabile de stare ale algoritmului de reglare etc. Zonele de date atașate fiecărui algoritm de reglare sunt prezente, atât în memoria de lucru (RAM) a regulatorului, cât și în memoria nevolatilă, astfel încât, la oprirea tensiunii de alimentare, informațiile de bază privind configurarea blocurilor de reglare să fie menținute.

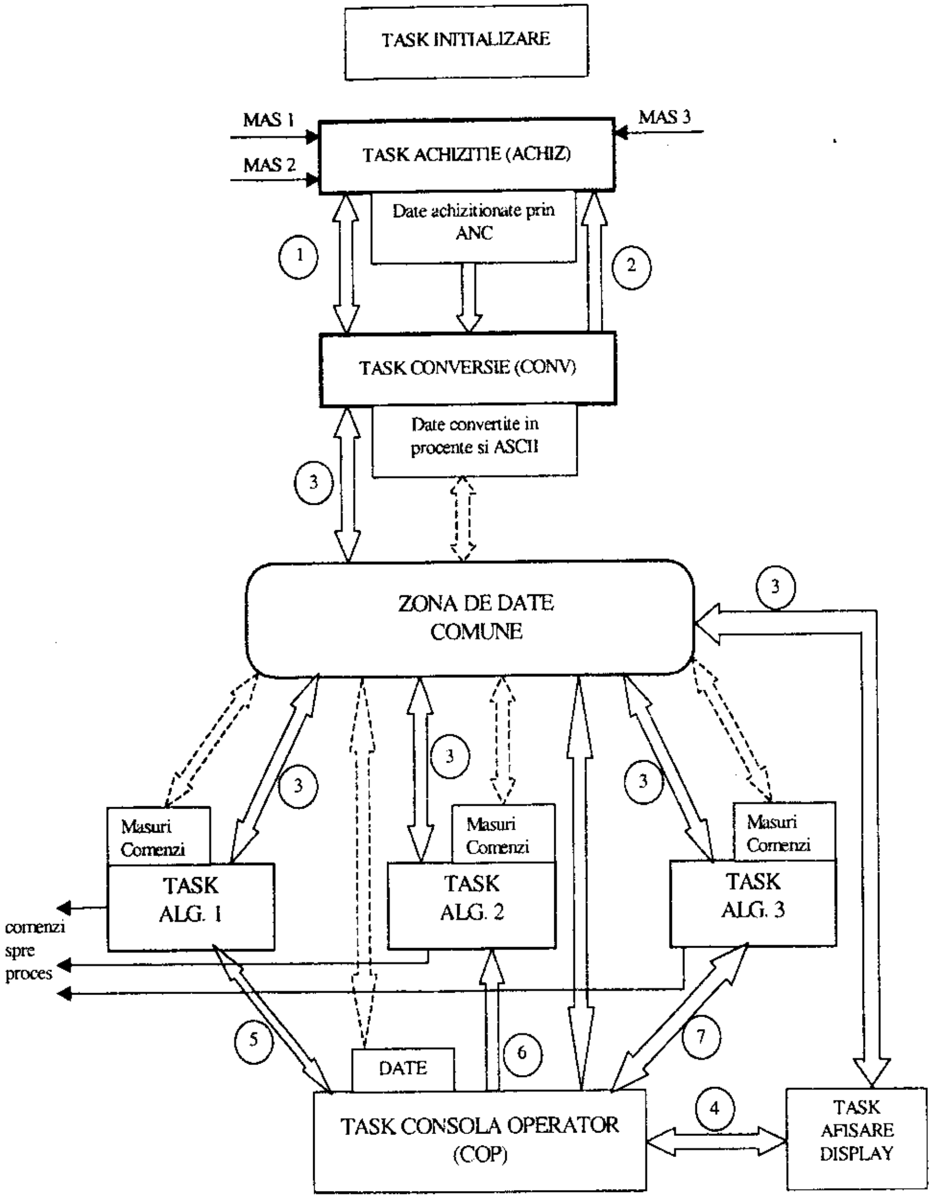


Fig. 15.21

BIBLIOGRAFIE

1. **Ackermann J.** – *Robust Control, Systems with Uncertain Physical Parameters*, Springer-Verlag, 1994.
2. **Alexander M. Mystel, Albus J.S.** – *Intelligent Systems Arhitecture, Design and Control*, John Willey & Sons Inc., 2002.
3. **Aström K.J., Hagglund T.** – *PID Controllers: Theory, Design and Tunning*, Instrument Society of America, 1995.
4. **Aström K.J., Hang C.C., Person P.** – *Towards Intelligent PID Control*, AUTOMTICA IFAC, vol. 28, No. 1/1992, pg. 1-11.
5. **Aström K.J., Wittenmark B.** – *Adaptive Control*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1989.
6. **Aström K.J., Wittenmark B.** – *Computer Controlled Systems*, Prentice Hall, 1997.
7. **Barbu V.** – *Ecuaţii Diferenţiale*, Editura Junimea, Iaşi, 1985.
8. **Belea C.** – *Automatică Neliniară*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1984.
9. **Biao Huang, Shah S.L.** – *Performance Assessment of control Loops. Theory and Applications*, Springer, 1999.
10. **Bosgra O., Kwakernaak H.** – *Design Methods for Control Systems*, Dutch Graduate Network on Systems and Control, Spring, 1994, Lecture Notes.
11. **Boyd S.P., Barrat C.H.** – *Linear Controller Design: Limits of Performance*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.
12. **Brogan W.L.** – *Modern Control Theory*, Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1985.
13. **Bruce F.A.** – *A Course in H_∞ Control Theory*, Springer Verlag, Berlin, 1987.
14. **Burns S.R.** – *Advanced Control Engineering*, Butterworth Heinemenn, 2001.
15. **Călin S., Dumitrache I.** – *Regulatoare Automate*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1985.
16. **Călin S., Dumitrache I., ş.a.** – *Reglarea Numerică a Proceselor Tehnologice*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1984.
17. **Christensen, G.S., Soliman, S.A., Nieva, R.** – *Optimal Control of Distributed Nuclear Reactors*, Plenum Press, 1990.

18. **Cârstoiu D., Olteanu A.** – *Sisteme bazate pe cunoştinţe*, Editura Politehnica Press, Bucureşti, 2002.
19. **Constantin Marin** – *Structuri şi Legi de Reglare Automată*, Editura Universitară Craiova, 2000.
20. **Dorf R.C.** – *Modern Control Systems*, 6th ed. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1992.
21. **Doyle J.C., Francis B.A., Tannenbaum A.** – *Feedback Control Theory*, New York: Macmillan, Inc., 1992.
22. **Dragomir T.L.** – *Elemente de Teoria Sistemelor*, Editura Politehnica, 2004.
23. **Driankov D., Hellendoorn H., Reinfrank M.** – *An Introduction to Fuzzy Control*, Springer Verlag, Heidellerg, 1993.
24. **Dumitrache I.** – *Intelligent Autonomous Systems*, Revue Roumaine des Sciences Techniques, no. 3, pp. 439-454, Bucureşti, 2000.
25. **Dumitrache I.** – *Intelligent Control of Industrial Robots*, Editura Mediamira, 1998.
26. **Dumitrache I., ş.a.** – *Algoritmi de Calcul pentru Sisteme Automate Liniare*, Litografia IPB, 1973.
27. **Dumitrache I., Dumitriu S., Munteanu Fl.** – *Adaptive Structure Algorithm for Microprocessor Control of D.C. Motors*, in Proceedings of 1st European Conference on Power Electronics and Applications, Bruxelles, pp. 257-262, 1985.
28. **Dumitrache I., Brăileanu Gr.** – *Some Nonlinear Control Algorithms Implemented on Microcomputer Controllers*, in Proceedins of IFAC Symposium, London, 1980.
29. **Dumitrache I., Buiu C.** – *Algoritmi genetici. Principii fundamentale şi aplicaţii în automatică*, Editura Mediamira, 2000.
30. **Dumitrache I., Buiu C., Ghica O.** – *Sisteme numerice pentru conducerea proceselor*, Editura Electra, 2002.
31. **Dumitrache I., Călin S., ş.a.** – *Automatizări şi Echipamente Electronice*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1986.
32. **Dumitrache I., Catană I., Mihu I., Muscă Gh., Iliescu S.** – *Bazele Teoretice ale Reglării Automate*, Culegere de probleme, Litografia IPB, 1989.
33. **Dumitrache I., Constantin N., Drăgoicea M.** – *Reţele neurale*, Editura Matrix, 1999.
34. **Dumitrache I., Dumitriu S., ş.a.** – *Automatizări Electronice*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1993.
35. **Dumitrache I., Mitică D.** – *Pachet de Programe de Proiectare Simulare PROSIM*, Litografia IPB, 1980.

36. **Dumitrache I.** – *Proiectarea Sistemelor numerice de Reglare*, Litografia IPB, 1985.
37. **Dumitrache I.** – *Tehnica Reglării Automate*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980.
38. **Dumitrache I., ş.a.** – *DES – Suported Agents Based Control Architecture for Flexible Manufacturing Systems*, IFAC – DECOM – TT 2004, pp. 59-65.
39. **Dumitriu S.** – *Contribuţii la Optimizarea Conducerii Proceselor Rapide*, Teză de doctorat, IPB, 1987.
40. **Florea S., Dumitrache I.** – *Elemente de Execuţie Hidraulice şi Pneumatice*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1966.
41. **Florea S., Dumitrache I., ş.a.** – *Electronică Industrială şi Automatizări*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.
42. **Frank P.M.** - *Advances In Control*, Springer, 1999.
43. **Franklin F.G., Powell J.D.** – *Digital Control of Dynamic Systems*, Addison-Wesley, Reading, Mass, 2000.
44. **Friedland B.** – *Control System Design*, New York: McGraw-Hill Book Company,1986.
45. **Gang Tao** – *Adaptive Control Design and Analysis*, Wiley-Interscience, John Wiley&Sons Inc., 2003.
46. **Goodwin G.C., Graebe S.F., Salgado M.E.** – *Control System Design*, Prentice Hall, 2001.
47. **Gupta M.M., Sinha N.K.** – *Intelligent Control Systems. Theory and Applications*, IEE Press, 1996.
48. **Guran M., Filip F.** – *Sisteme Ierarhizate în Timp Real cu Prelucrarea Distribuită a Datelor*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1986.
49. **Hangos K., Lakner R., Gazon M.** – *Intelligent Control Systems*, Kluwer Academic Publishers, 2001.
50. **Hanis C., Billings A.S.** – *Selftuning and Adaptive Control Theory and Applications*, Peter Peregrinus, Ltd., 1981.
51. **Huang B., Sirish L.S.** – *Performance Assessment of Control Loops. Theory and Applications*, Springer, 1999.
52. **Ioannou A.P., Sun J.** – *Robust Adaptive Control*, PTR Prentice Hall, 1996.
53. **Ionescu V.** – *Teoria Sistemelor Liniare*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1985.
54. **Ionescu V., Oară C., Weiss M.** – *Generalized Ricatti Theory and Robust Control, A Popov Approach*, John Wiley, 1999.
55. **Ionescu V., Popeea C.** – *Conducerea Structurală a Sistemelor Liniare*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1986.

56. **Ionescu V., Varga A.** – *Teoria Sistemelor*, Editura All, Bucureşti, 1994
57. **Iserman R.** – *Digital Control Systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
58. **Iserman R., Lachmann K.H., Drago M.** – *Adaptive Control Systems*, Prentice Hall, 1992.
59. **Istepanian R.S.H., Whidborne F.J.** – *Digital Controller Implementation and Fragility*, Springer, 2001.
60. **John C. Doyle, Francis A.B., Tannenbaum A.R.** – *Feedback Control Theory*, Macmillan Publishing Company, 1992.
61. **Karl Erik Arzen, Anton Cervin** – *Control and Embedded Computing: Survey of Research Directions* – The Proceedings of 16th IFAC World Congress 2005, pag. 342-353.
62. **Kisačanin B., Agarwal G.C.** – *Linear Control Systems*, Kluwer Academic/ Plenum Publishers, 2001.
63. **Kuo B.C.** – *Automatic Control Systems*, 6th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1991.
64. **Kwakernaak H.** – *Robust Control and H^∞- Optimization*, Automatica, 29, pp. 255-273, 1993.
65. **Lunze J.** – *Robust Multivariable Feedback Control*, Prentice-Hall, New Jersey, 1989.
66. **Lutz M., Wendt W.** – *Taschenbuch der Regelungstechnik*, Verlag, 2000.
67. **MathWorks, Inc.** – *The Student Edition of MATLAB*, version 4.0., Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1995.
68. **McFarlane D.C., Glover K.** – *Robust Controller Design Using Normalized Coprime Factor Plant Descriptions*, volume 146, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
69. **Neguaritsky M.** – *Artificial Intelligence. A Guide to Intelligent Systems*, Addison-Wesley, 2002.
70. **Nekoogar F., Moriarty G.** – *Digital Control Using Digital Signal Processing*, Prentince Hall, Information and System Sciences Series, 1999.
71. **Nguyen H.T., Sugeno M.** – *Fuzzy Systems. Modeling and Control*, Kluwer Academic Publishers, 1998.
72. **Nise N.S.** – *Control Systems Engineering*, John Wiley & Sons Inc., 2000.
73. **Ogata K.** – *Discrete–time Control Systems*, 2nd ed., Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1995.
74. **Ogata K.** – *Solving Control Engineering Problems with MATLAB*, Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1994.

75. **Ogata K.** – *Designing Linear Control Systems with MATLAB*, Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1994.
76. **Ogata K.** – *Modern control Engineering*, Prentice Hall Inc., Upper Saddle River, NJ, 1997.
77. **Olsson G., Piani G.** – *Computer Systems for Automation and Control*, Prentice Hall International, 1998.
78. **Paraskevopoulos P.N.** – *Digital Control Systems*, Prentice Hall, 1997.
79. **Passino K., Yurkovich S.** – *Fuzzy Control*, Addison-Wesley, 2000.
80. **Patterson D.W.** – *Artificial Neural Networks. Theory and Applications*, Prentice Hall, 1996.
81. **Petrescu C.** – *Configurarea asistată de calculator a sistemelor numerice de conducere*, Teză de doctorat, 2002.
82. **Preitl Ş., Precup R.E.** – *Introducere în conducerea fuzzy a proceselor*, Editura Tehnică, 1997.
83. **Răzvan V.** – *Teoria Stabilităţii*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1987.
84. **Sastry S.** – *Nonlinear Systems – Analysis, Stability and Control*, Springer, 1999.
85. **Şerban S.** – *Proiectarea sistemelor de reglare automată*, Editura Bren, 2000.
86. **Shinners S.M.** – *Advanced Modern Control System Theory and Design*, John Willey & Sons, Inc., 1998.
87. **Slotine J.J.E.** – *Nonlinear Control Systems*, Prentice Hall, 1993.
88. **Thomas L.V., Grantham J.W.** – *Nonlinear and Optimal .Control Systems*, John Willey&Sons Inc., 2000.
89. **Tertişco M., Stoica P.** – *Identificarea Asistată de Calculator*, Editura Tehnică, 1987.
90. **Voronov A.A.** – *Basic Principles of Automatic Control Theory*, Mir Publishing, Moskow, 1985.
91. **Voicu M.** – *Introducere în Automatică*, Editura Polirom, 2002.
92. **Wendt Lutz** – *Taschenbuch der Regulungstechnik*, Verlag Harri Deutsch, 1998.
93. **Zadeh L.A.** – *Fuzzy Sets*, Information and Control, 8, pp. 338-353, 1965.